Е.С. ВЕНТЦЕЛЬ, Л.А. ОВЧАРОВ

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ





Е.С.ВЕНТЦЕЛЬ, Л.А.ОВЧАРОВ

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



МОСКВА
·РАДИО И СВЯЗЬ·
1983

ББК 22.171
В29
УДК 519.212

В29 **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.**
Прикладные задачи теории вероятностей. — М.: Радио и связь, 1983. — 416 с., ил.

В пер.: 1 р. 60 к.

Содержится большое число задач прикладиого характера, относящихся к разным областям практики, глааным образом инженерно-техническим. В начале каждой главы приводятся краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач. Большинство задач снабжено не только ответами, но и развернутыми решениями, демонстрирующими важные методические приемы.

Для инженерно-технических работников, а также студентов и преподавателей вузов, заинтересованных в оаладении вероятностными методами решения прикладных задач.

$В\ \frac{1702060000\text{-}020}{046(01)\text{-}83}\ 107\text{-}82$

ББК 22.171
517.8

Рецензент академик АН УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

Редакция литературы по кибернетике и вычислительной технике

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга написана на основе многолетнего опыта преподавания теории вероятностей и ее приложений в высших технических учебных заведениях различных профилей. Основой для нее послужили также многочисленные практические задачи, встречавшиеся авторам в их научно-исследовательской и консультационной работе. Эти задачи относятся к разным областям практики, как-то : электротехника, радиотехника, передача сообщений; электронные вычислительные машины; информационные системы; надежность технических устройств, их ремонт и профилактика; точность аппаратуры; бытовое обслуживание; транспорт, здравоохранение и др.

Книга состоит из одиннадцати глав; в начале каждой главы приведена краткая сводка теоретических положений и основных формул, необходимых для решения задач.

Задачи, помещенные в книге, весьма различны как по области приложений, так и по трудности. В начале каждой главы читателю предлагаются сравнительно простые задачи, цель которых — уяснение основных понятий, приобретение и закрепление навыков применения вероятностных методов. Далее приводятся более сложные задачи, имеющие практическую направленность, решение которых становится возможным на базе усвоенных теоретических знаний и приобретенных навыков.

Авторы избегают стандартных, так называемых «типовых» задач, решаемых по определенному шаблону. Многие задачи, помещенные в книге, могут показаться трудными не только начинающему, но и искушенному в теории вероятностей читателю (наиболее трудные, по мнению составителей, отмечены звездочкой). В интересах читателя большинство задач снабжено не только ответами, но и развернутыми решениями; эти ответы и решения приводятся не в конце книги, а непосредственно за постановкой задачи (авторы рассчитывают на трудолюбивого и вдумчивого читателя, который прежде всего попытается найти решение самостоятельно). Такая структура книги очень удобна и полностью оправдала себя на примере другой книги авторов «Теория вероятностей» (М.: Наука, 1973), многократно изданной у нас и за рубежом (некоторые задачи этого издания повторены авторами в настоящей книге).

С точки зрения авторов, наибольший интерес в книге представляют постановки и развернутые решения нетривиальных задач и продемонстрированные в них методические приемы. Авторы ставят себе целью не просто решить задачу, а решить ее наиболее простыми и общими средствами. Некоторые задачи решены не одним, а разными способами. Многие решения содержат оригинальные методические приемы, которые имеют общее значение и могут найти применение в са-

мых разных областях практики. Особое значение авторы придают аппарату числовых характеристик, позволяющему решать ряд задач с исключительной простотой. Большое внимание уделяется прикладным задачам теории марковских случайных процессов.

Краткие теоретические разделы, предваряющие отдельные главы книги, в своем большинстве не конспектируют ни один из существующих учебников по теории вероятностей, а написаны на новой методической основе.

Таким образом, книга занимает в некотором смысле промежуточное положение между сборником задач и учебником по теории вероятностей. Она может быть полезна широкому кругу читателей: студентам и преподавателям втузов, а также инженерам и научным работникам, встречающимся на практике с задачами, требующими вероятностного подхода. Отметим, что подробная разработанность решений и внимание к методическим вопросам делают книгу хорошо приспособленной к задачам самообразования.

Авторы приносят глубокую благодарность академику АН УССР Б. В. Гнеденко, подробно ознакомившемуся с рукописью книги и сделавшему ряд ценных замечаний, а также академику АН СССР В. С. Пугачеву, с которым авторы многократно советовались при работе над книгой, в значительной мере следуя методическим принципам и системе обозначений, принятым в его монографии [12].

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СХЕМЕ СЛУЧАЕВ

1.0. Теория вероятиостей — математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях. Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие *случайного события* (или просто события). *Событием* называется всякий факт, который в результате опыта (испытания, эксперимента) может произойти или не произойти. Примеры событий: выпадение шестерки при бросании игральной кости; отказ технического устройства за время его работы τ; искажение сообщения при передаче его по каналу связи. С событиями связываются некоторые *числа*, характеризующие степень объективной возможности этих событий, называемые *вероятностями событий*.

К понятию «вероятность» существует несколько подходов. Один из них («классический») основан на подсчете числа исходов опыта, благоприятных данному событию, и его отношения к общему числу равновозможных исходов [см. ниже формулу (1.0.6)]. Другой подход (так называемый «частотный» или «статистический») основан на понятии частоты события в длинной серии опытов. *Частотой* (или частостью) события в серии из N опытов называется отношение числа опытов, в которых произошло данное событие, к общему числу произведенных опытов. Существуют случайные явления, в которых наблюдается *устойчивость частот*; она состоит в том, что при увеличении числа независимых опытов N частота события стабилизируется, приближаясь к какой-то постоянной величине; эта величина и называется *вероятностью события*.

Современное построение теории вероятностей как раздела математики основывается на аксиоматическом подходе и опирается на элементарные понятия теории множеств. Такой подход к построению теории вероятностей называется теоретико-множественным.

Напомним основные понятия теории множеств*).

Множеством называется любая совокупность объектов произвольной природы, каждый из которых называется *элементом множества*. Примеры множеств: множество студентов, обучающихся в данном вузе; множество натуральных чисел, не превосходящих 100; множество точек на плоскости, лежащих внутри или на границе круга с радиусом единица и центром в начале координат.

Множество обозначается по-разному: или одной большой буквой; или перечислением его элементов, данным в фигурных скобках; или указанием (в тех же фигурных скобках) правила, по которому элемент относится к множеству. Например, множество M натуральных чисел от 1 до 100 может быть записано в виде

$$M = \{1, 2, \ldots, 100\} = \{i \text{ — целое}; \ 1 \leqslant i \leqslant 100\}.$$

Множество C точек на плоскости, лежащих внутри или на границе круга с центром в начале координат, может быть записано в виде $C = \{x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, где x, y — декартовы координаты точки; R — радиус круга.

По числу элементов множества делятся на *конечные* и *бесконечные*. Множество $M = \{1, 2, \ldots, 100\}$ конечно и содержит 100 элементов (конечное множество может, в частности, состоять из одного элемента). Множество всех натуральных чисел $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ бесконечно; также бесконечно и множество четных чисел $N_2 = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$. Бесконечное множество называется *счетным*, если все его члены можно перечислить в определенной последовательности (оба выше-

*) В настоящее время эти понятия излагаются в средней школе.

приведенные бесконечные множества N и N_2 являются счетными). Множество C точек внутри и на границе круга радиуса $R > 0$

$$C = \{x^2 + y^2 \leqslant R\} \qquad (1.0.1)$$

является бесконечным и несчетным (его элементы нельзя перенумеровать один за другим).

Два множества A и B *совпадают* (или эквивалентны), если они состоят из одних и тех же элементов (совпадение множеств обозначается $A = B$). Например, множество корней уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$ совпадает с множеством $\{1, 4\}$ (а также с множеством $\{4, 1\}$).

Запись $a \in A$ означает: объект a является элементом множества A; или, другими словами, *a принадлежит A*. Запись $a \notin A$ означает: объект a не является элементом множества A.

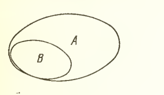


Рис. 1.0.1

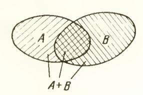


Рис. 1.0.2

Пустым множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента; оно обозначается символом $\varnothing$. Пример: множество точек плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant -1$, является пустым: $\{x^2 + y^2 \leqslant -1\} = \varnothing$. Все пустые множества эквивалентны друг другу.

Множество B называется *подмножеством* (частью) множества A, если все элементы B содержатся также и в A; обозначение $B \subseteq A$ (или $A \supseteq B$). Примеры: $\{1, 2, \ldots, 100\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 1000\}$; $\{1, 2, \ldots, 100\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 100\}$; $\{x^2 + y^2 \leqslant 1\} \subseteq \{x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

Считается, что пустое множество является частью любого множества A: $\varnothing \subseteq A$.

Включение множеств можно наглядно изображать с помощью геометрической интерпретации; в этом случае элементами множеств являются точки на плоскости (см. рис. 1.0.1, где множество B является частью множества A).

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $C = A + B$, состоящее из всех элементов A и всех элементов B (в том числе и тех, которые принадлежат и A, и B). Короче: объединение двух множеств — это совокупность элементов, принадлежащих *хотя бы одному* из них. Примеры: $\{1, 2, \ldots, 100\} + \{50, 51, \ldots, 200\} = \{1, 2, \ldots, 200\}$; $\{1, 2, \ldots, 100\} + \{1, 2, \ldots, 1000\} = \{1, 2, \ldots, 1000\}$; $\{1, 2, \ldots, 100\} + \varnothing = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Изображение объединения двух множеств A и B дано на рис. 1.0.2: вся заштрихованная область есть $A + B$.

Аналогично определяется объединение любого числа множеств: $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$ есть множество, состоящее из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств $A_1, \ldots, A_n$. Рассматриваются также объединения бесконечного (счетного) числа множеств $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ Пример: $\{1, 2\} + \{2, 3\} + \{3, 4\} + \ldots + \{n, n-1\} + \ldots = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $D = A \cdot B$, состоящее из элементов, входящих одновременно и в A, и в B. Примеры: $\{1, 2, \ldots, 100\} \cdot \{50, 51, \ldots, 200\} = \{50, 51, \ldots, 100\}$; $\{1, 2, \ldots, 100\} \cdot \{1, 2, \ldots, 1000\} = \{1, 2, \ldots, 100\}$; $\{1, 2, \ldots, 100\} \cdot \varnothing = \varnothing$. Изображение пересечения двух множеств A и B дано на рис. 1.0.3.

Аналогично определяется пересечение любого числа множеств. Множество $A_1 \cdot A_2 \dots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ состоит из элементов, входящих одновременно во все $A_1, A_2, \dots, A_n$. Определение распространяется и на бесконечное (счетное) число множеств: $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ есть множество, состоящее из элементов, входящих одновременно во все множества $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

Множества A и B называются *непересекающимися*, если их пересечение есть пустое множество: $A \cdot B = \varnothing$, т. е. нет ни одного элемента, входящего и в A, и в B (рис. 1.0.4). На рис. 1.0.5 изображено несколько попарно непересекающихся множеств.

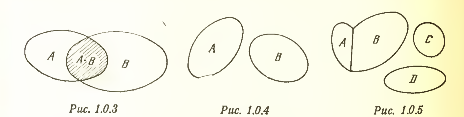


Рис. 1.0.3 *Рис. 1.0.4* *Рис. 1.0.5*

Так же как при записи обычного умножения, знак · в произведении событий часто опускается.

Этих элементарных сведений по теории множеств достаточно для того, чтобы пользоваться теоретико-множественной схемой построения теории вероятностей.

Пусть производится некоторый опыт (эксперимент, испытание), результат которого заранее неизвестен, случаен. Рассмотрим множество Ω всех возможных исходов опыта: каждый его элемент $\omega \in \Omega$ (один отдельный исход опыта) будем называть *элементарным событием*, а все множество Ω — *пространством элементарных событий*. Подмножества множества Ω называются *событиями* (или случайными событиями); любое событие A это подмножество множества Ω: $A \subseteq \Omega$.

Пример: опыт состоит в бросании игральной кости*); пространство элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; событие A — выпадение четного числа очков; $A = \{2, 4, 6\}$; $A \subseteq \Omega$. В частности, можно рассматривать событие Ω (ведь каждое множество есть свое собственное подмножество); оно называется *достоверным событием* (осуществляется при любом опыте, т. е. наверняка). Ко всему пространству Ω элементарных событий добавляется еще пустое множество $\varnothing$; это множество тоже рассматривается как событие и называется *невозможным событием* (в результате опыта оно не может произойти). Пример достоверного события: {выпадение не более 6 очков при бросании игральной кости}; пример невозможного события: {выпадение 7 очков при бросании игральной кости}.

Заметим, что элементарные события в одном и том же опыте можно задавать по-разному; например, при случайном бросании точки на плоскости положение точки можно задавать как парой декартовых координат (x, y), так и парой полярных (ρ, φ).

Непересекающиеся события A, B (такие что $AB = \varnothing$) называются *несовместными*; появление одного из них исключает появление другого. Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *попарно несовместными* (или просто несовместными), если появление каждого из них исключает появление каждого из остальных.

Говорят, что несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ *образуют полную группу*, если $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, т. е. их сумма есть достоверное событие (другими словами, в

*) Игральной костью называется кубик, на гранях которого нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 точек (или «очков»).

результате опыта непременно произойдет хотя бы одно из них). Пример: опыт — бросание игральной кости; события $A = \{1, 2\}$; $B = \{2, 3, 4\}$ и $C = \{4, 5, 6\}$ образуют полную группу: $A + B + C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

Введем аксиомы теории вероятностей. Пусть каждому событию ставится в соответствие некоторое *число*, называемое *вероятностью события*. Вероятность события A мы будем обозначать $\mathrm{P}(A)$*). Потребуем, чтобы вероятности событий удовлетворяли следующим аксиомам:

I. *Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:*

$$0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1. \tag{1.0.2}$$

II. Аксиома сложения вероятностей: *если A и B несовместные события, то*

$$\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B). \tag{1.0.3}$$

Аксиома (1.0.3) сразу обобщается на любое конечное число событий: *если A_1, A_2, ..., A_n — несовместные события, то*

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i). \tag{1.0.4}$$

III. Аксиома сложения вероятностей для бесконечной последовательности событий: *если A_1, A_2, ..., A_n, ... — несовместные события, то*

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i). \tag{1.0.5}$$

Аксиомы теории вероятностей позволяют вычислять вероятности любых событий (подмножеств пространства Ω) с помощью вероятностей элементарных событий (если их конечное или счетное число). Вопрос о том, как определить вероятности элементарных событий, при этом не рассматривается. На практике они определяются либо из соображений, связанных с симметрией опыта (например, для симмеричной игральной кости естественно считать одинаково вероятным выпадение каждой из граней), или же на основе опытных данных (частот).

Для опытов, обладающих симметрией возможных исходов, применяется способ непосредственного вычисления вероятностей событий в так называемой *схеме случаев* (иначе — схеме урн). Этот способ основан на допущении о равновероятности (равновозможности) элементарных событий. Несколько событий A_1, A_2, ..., A_n называются *равновозможными*, если в силу симметрии условий опыта относительно этих событий, вероятности их одинаковы: $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = \ldots = \mathrm{P}(A_n)$.

Если в каком-то опыте пространство элементарных событий Ω можно представить в виде полной группы несовместных и равновозможных событий ω_1, ω_2, ..., ω_n, то такие события называются *случаями* (или шансами), а про сам опыт говорят, что он *сводится к схеме случаев* (схеме урн).

Случай ω_i называется *благоприятным* событием A, если он является элементом множества A: $\omega_i \in A$.

Так как случаи ω_1, ω_2, ..., ω_n образуют полную группу событий, то

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega.$$

Так как элементарные события ω_1, ω_2, ..., ω_n несовместны, то по аксиоме сложения вероятностей

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\right) = \mathrm{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\omega_i) = 1.$$

---

*) Если событие (множество) обозначается не буквой, а словесным описанием свойств этого множества, или же формулой типа (1.0.1), или просто перечислением элементов множества, мы будем при записи вероятности пользоваться не круглыми, а фигурными скобками, например $\mathrm{P}\{x^2+y^2<2\}$.

Так как элементарные события $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ равновозможны, то вероятность каждого из них одна и та же и равна $1/n$:

$$\mathrm{P}(\omega_1) = \mathrm{P}(\omega_2) = \ldots = \mathrm{P}(\omega_n) = 1/n.$$

Отсюда непосредственно вытекает так называемая *классическая формула* для вероятности события: *если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события A в этом опыте можно вычислить по формуле*

$$\mathrm{P}_A(A) = m_A/n, \tag{1.0.6}$$

где m_A — число случаев, благоприятных событию A; n — общее число случаев.

Формула (1.0.6), принимавшаяся когда-то за определение вероятности, при современном аксиоматическом подходе есть следствие аксиомы сложения вероятностей.

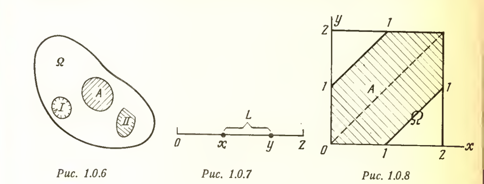


Рис. 1.0.6 Рис. 1.0.7 Рис. 1.0.8

Рассмотрим пример. В урне находятся 3 белых и 4 черных шара, тщательно перемешанных. Из урны наугад выбирается один шар. Построить для этого опыта пространство элементарных событий и найти вероятность события A = {вынут белый шар}. Для этого перенумеруем шары в урне номерами от 1 до 7; первые три шара — белые, последние четыре — черные:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}; A = \{1, 2, 3\}.$$

В силу симметрии условий задачи относительно всех шаров (шар выбирается «наугад») элементарные события равновозможны. Так как они несовместны и образуют полную группу, вероятность события A найдется по формуле (1.0.6): $\mathrm{P}(A) = m_A/n = 3/7$.

Формула (1.0.6) дает возможность в некоторых задачах, когда опыт обладает симметрией возможных исходов, непосредственно по условиям опыта вычислять вероятности событий.

Естественным обобщением и расширением непосредственного подсчета вероятностей в схеме случаев является «геометрический» подход к вычислению вероятностей событий; он применяется тогда, когда пространство элементарных событий Ω включает несчетное множество элементарных событий $\omega \in \Omega$, и, по условиям симметрии опыта, никакое из них не имеет преимущества перед другими в смысле возможности появления*). Пусть пространство элементарных событий Ω — какая-то область на плоскости (рис. 1.0.6), а элементарные события ω — отдельные точки в пределах этой области. Если опыт обладает симметрией возможных исходов (например, какой-то «точечный» объект «наугад» бросается в пределах области), то все элементарные события «равноправны», и ес-

*) Мы не говорим, что элементарные события ω «равновероятны»; как мы убедимся в гл. 5, вероятность каждого из них равна нулю.

тественно предположить, что вероятности попадания элементарного события ω в две области I и II равной площади S равны, а вероятность любого события $A \subseteq \Omega$ равна отношению площади S_A области A к площади всей области Ω:

$$P(A) = S_A/S_\Omega. \qquad (1.0.7)$$

Формула (1.0.7) представляет собой обобщение классической формулы (1.0.6) на несчетное множество элементарных событий. Симметрия условий опыта относительно его элементарных исходов ω формулируется обычно с помощью слова «наугад», что, в сущности, равносильно выбору наугад одного из шаров в урне (см. выше). Вероятности, вычисляемые с помощью такого приема, в учебниках часто называются «геометрическими вероятностями».

Пусть, например, на отрезке от 0 до 2 наугад ставятся две точки с абсциссами x и y (рис. 1.0.7). Найти вероятность того, что расстояние L между ними будет меньше единицы. Элементарное событие ω для этого случая характеризуется парой координат (x, y). Пространство элементарных событий — квадрат со стороной 2 на плоскости $x0y$ (рис. 1.0.8). $L = |y - x|$; событию $A = \{|y - x| < 1\}$ соответствует область A, заштрихованная на рис. 1.0.8.

$$P(A) = P\{|y - x| < 1\} = S_A/S_\Omega = 3/4.$$

Если пространство элементарных событий не плоское, а трехмерное, то в (1.0.7) вместо площадей S_A и S_Ω ставятся объемы V_A и V_Ω; для одномерного пространства элементарных событий — длины L_A и L_Ω соответствующих участков прямой.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Относительно событий, перечисленных в каждом примере, указать, образуют ли они в данном опыте полную группу событий (да, нет).

1) Опыт — бросание монеты; события:
$A_1 = \{$герб$\}$; $A_2 = \{$решка$\}$.
2) Опыт — бросание двух монет; события:
$B_1 = \{$два герба$\}$; $B_2 = \{$две решки$\}$.
3) Опыт — бросание двух игральных костей; события:
$C_1 = \{$на обеих костях шестерки$\}$;
$C_2 = \{$ни на одной кости нет шестерки$\}$;
$C_3 = \{$на одной из костей шестерка, на другой — нет$\}$.
4) Опыт — передача двух сигналов по каналу связи; события:
$D_1 = \{$хотя бы один сигнал не искажен$\}$;
$D_2 = \{$хотя бы один сигнал искажен$\}$.
5) Опыт — передача трех сообщений по каналу связи; события:
$E_1 = \{$все три сообщения переданы без ошибок$\}$;
$E_2 = \{$все три сообщения переданы с ошибками$\}$;
$E_3 = \{$два сообщения переданы с ошибками, одно без ошибок$\}$.

Ответ: 1) да, 2) нет, 3) да, 4) да, 5) нет.

1.2. Относительно каждой группы событий ответить на вопрос, являются ли они в данном опыте несовместными (да, нет).

1) Опыт — бросание монеты; события:
$A_1 = \{$герб$\}$; $A_2 = \{$решка$\}$.
2) Опыт — бросание двух монет; события:
$B_1 = \{$герб на первой монете$\}$;
$B_2 = \{$герб на второй монете$\}$.

3) Опыт — два выстрела по цели; события:
C_0 = {ни одного попадания};
C_1 = {одно попадание};
C_2 = {два попадания}.
4) Тот же опыт; события:
D_1 = {одно попадание}; D_2 = {один промах}.
5) Опыт — вынимание двух карт из колоды; события:
E_1 = {обе карты черной масти};
E_2 = {среди вынутых карт есть дама треф};
E_3 = {среди вынутых карт есть туз пик}.
6) Опыт — передача трех сообщений по радио; события:
F_1 = {в первом сообщении есть ошибка};
F_2 = {во втором сообщении есть ошибка};
F_3 = {в первом сообщении есть ошибка, во втором — нет}.

Ответ: 1) да, 2) нет, 3) да, 4) нет, 5) нет, 6) нет.

1.3. Относительно каждой из групп событий ответить на вопрос, равновозможны ли они в данном опыте (да, нет).

1) Опыт — бросание монеты; события:
A_1 = {герб}; A_2 = {решка}.
2) Опыт — бросание неправильной (погнутой) монеты; те же события A_1; A_2.
3) Опыт — выстрел по мишени; события:
B_1 = {попадание}; B_2 = {промах}.
4) Опыт — бросание двух монет; события:
C_1 = {два герба}; C_2 = {две решки}; C_3 = {один герб и одна решка}.
5) Опыт — вынимание наугад одной карты из колоды; события:
D_1 = {черва}; D_2 = {бубна}; D_3 = {трефа}; D_4 = {пика}.
6) Опыт — бросание игральной кости; события:
E_1 = {не менее трех очков};
E_2 = {не более трех очков}.
7) Опыт — по каналу связи передаются в одинаковых условиях три сообщения одинаковой длины; события:
F_1 = {ошибка в первом сообщении};
F_2 = {ошибка во втором сообщении};
F_3 = {ошибка в третьем сообщении}.

Ответ: 1) да, 2) нет, 3) в общем случае нет, 4) нет, 5) да, 6) нет, 7) да.

1.4. Относительно каждой из групп событий ответить на следующие вопросы: образуют ли они полную группу; являются ли несовместными; являются ли равновозможными; образуют ли группу случаев.

1) Опыт — бросание (правильной) монеты; события:
A_1 = {герб}; A_2 = {решка}.
2) Опыт — бросание двух монет; события:
B_1 = {два герба}; B_2 = {две решки};
B_3 = {один герб и одна решка}.
3) Опыт — бросание игральной кости; события:
C_1 = {1 или 2 очка}; C_2 = {2 или 3 очка}; C_3 = {3 или 4 очка};
C_4 = {4 или 5 очков}; C_5 = {5 или 6 очков}.

4) Опыт — вынимание наугад одной карты из колоды в 36 листов; события:

D_1 = {туз}; D_2 = {король}; D_3 = {дама}; D_4 = {валет}; D_5 = {десятка}; D_6 = {девятка}; D_7 = {восьмерка}; D_8 = {семерка}; D_9 = {шестерка}.

5) Опыт — выстрел по мишени; события
E_1 = {попадание}; E_2 = {промах}.

6) Опыт — передача (в одинаковых условиях) трех сообщений равной длины; события:
F_1 = {искажено первое сообщение};
F_2 = {искажено второе сообщение};
F_3 = {искажено третье сообщение}.

7) Опыт — эксплуатируются два прибора в течение времени τ; события:
G_0 = {ни один прибор не вышел из строя};
G_1 = {один прибор вышел из строя, а другой нет};
G_2 = {оба прибора вышли из строя}.

Ответ: 1) да, да, да, да; 2) да, да, нет, нет; 3) да, нет, да, нет; 4) да, да, да, да; 5) да, да, нет, нет; 6) нет, нет, да, нет; 7) да, да, нет, нет.

1.5. Монета бросается до тех пор, пока не появится подряд два герба или же две решки; после этого бросания прекращаются. Построить для этого опыта пространство элементарных событий и выделить в нем подмножество, соответствующее событию A = {понадобится не более трех бросаний}. Можно ли здесь найти вероятность события как отношение числа элементарных событий, благоприятных A, к общему числу элементарных событий, и если нет, то почему?

Решение. Элементарные события, образующие множество Ω (герб обозначен буквой «г», решка — «р»): ω_1 = {г, г}; ω_2 = {р, р}; ω_3 = {г, р, р}; ω_4 = {р, г, г}; ω_5 = {г, р, г, г}; ω_6 = {р, г, р, р}...; число этих событий бесконечно (счетно): $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$. Подмножество элементарных событий, благоприятных A; $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Определить вероятность события A как отношение числа элементарных событий, благоприятных A, к общему числу элементарных событий в данном случае нельзя, так как элементарные события ω_1, ω_2, ω_3, ... неравновозможны: каждая последующая пара менее вероятна, чем предыдущая [нахождение P (A) — см. задачу 2.19].

1.6. Многогранник, имеющий k граней ($k > 3$) с номерами 1, 2, ..., k, бросается наугад на плоскость; при этом он падает на ту или другую грань. Построить для этого опыта пространство элементарных событий и выделить в нем подмножество, соответствующее событию A = {многогранник упал на грань, номер которой не превышает числа $k/2$}.

Решение. Пространство Ω состоит из k элементарных событий: $\Omega = \{1, 2, \ldots, k\}$, где числа соответствуют номерам граней. Подмножество A состоит из элементарных событий: $A = \{1, 2, \ldots, [k/2]\}$, где $[k/2]$ — целая часть, содержащаяся в $k/2$.

1.7. В условиях предыдущей задачи многогранник — правильный; возможные значения числа граней; $k = 4$ (тетраэдр); $k = 6$ (куб); $k = 8$ (октаэдр); $k = 12$ (додекаэдр); $k = 20$ (икосаэдр). Найти для каждого из многогранников вероятность события A.

Решение. Для правильного (симметричного) многогранника появление каждой грани одинаково вероятно, так что можно вычислить $P(A)$ по формуле (1.0.6). Так как число граней всех правильных многогранников четно, то $[k/2] = k/2$ и для любого из них $P(A) = 1/2$.

1.8. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар — белый.

Ответ. $a/(a+b)$.

1.9. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

Ответ. $(a-1)/(a+b-1)$.

1.10. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынули один шар и не глядя отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, тоже белый.

Ответ. $(a-1)/(a+b-1)$.

1.11. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

Ответ. $a/(a+b)$.

1.12. Из урны, в которой a белых и b черных шаров, вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

Ответ. $a/(a+b)$.

1.13. В урне a белых и b черных шаров ($a \geqslant 2$). Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Событие $A = \{$два белых шара$\}$. Общее число случаев

$$n = C_{a+b}^2 = (a+b)(a+b-1)/(1 \cdot 2),$$

где $C_k^m = \dfrac{k!}{m!\,(k-m)!}$ — число сочетаний из k элементов по m.

Число благоприятных случаев

$$m_A = C_a^2 = a(a-1)/(1 \cdot 2).$$

Вероятность события A

$$P(A) = m_A/n = m_A/n = a(a-1)/[(a+b)(a+b-1)].$$

1.14. В урне a белых и b черных шаров ($a \geqslant 2$, $b \geqslant 3$). Из урны вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность p того, что два из них будут белыми, а три черными.

Решение. Общее число случаев

$$n = C_{a+b}^5 = \frac{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Число благоприятных случаев

$$m = C_a^2 C_b^3 = \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}\,\frac{b(b-1)(b-2)}{1\cdot 2\cdot 3};$$

$$p = \frac{m}{n} = \frac{10a(a-1)\,b(b-1)(b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)}.$$

1.15. В партии, состоящей из k изделий, имеется l дефектных. Из партии выбирается для контроля r изделий. Найти вероятность p того, что из них ровно s изделий будут дефектными.

Ответ. $p = C_l^s C_{k-l}^{r-s}/C_k^r$.

1.16. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятности событий:

A = {четное число очков};
B = {не менее 5 очков};
C = {не более 5 очков}.

Ответ: $\mathrm{P}(A) = 1/2$; $\mathrm{P}(B) = 1/3$; $\mathrm{P}(C) = 5/6$.

1.17. В урне a белых и b черных шаров ($a \geqslant 2$; $b \geqslant 2$). Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно: A = {шары одного цвета}; B = {шары разных цветов}?

Решение.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{C_a^2 + C_b^2}{C_{a+b}^2} = \frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)};$$

$$\mathrm{P}(B) = \frac{C_a^1 C_b^1}{C_{a+b}^2} \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Сравнивая числители этих дробей, находим

$$\mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B) \text{ при } a(a-1) + b(b-1) < 2ab,$$

т. е. $(a-b)^2 < a + b$;

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \text{ при } (a-b)^2 = a + b;$$
$$\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B) \text{ при } (a-b)^2 > a + b.$$

1.18. Из ящика, содержащего n перенумерованных изделий, наугад вынимают одно за другим все находящиеся в нем изделия. Найти вероятность того, что номера вынутых изделий будут идти по порядку: $1, 2, \ldots, n$.

Ответ. $1/n!$

1.19. Тот же ящик, что и в предудущей задаче, но каждое изделие после вынимания вкладывается обратно и перемешивается с другими, а его номер записывается. Найти вероятность того, что будет записана естественная последовательность номеров: $1, 2, \ldots, n$.

Ответ. $1/n^n$.

1.20. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд

в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстракласса. Найти вероятность следующих событий:

A = {все команды экстракласса попадут в одну и ту же группу};

B = {две команды экстракласса попадут в одну из групп, а три — в другую}.

Ответ.

$$P(A) = \frac{2C_5^5 C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34}; \quad P(B) = \frac{C_5^2 C_{13}^7 + C_5^3 C_{13}^6}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}.$$

1.21. Некто купил карточку Спортлото и отметил в ней 6 из имеющихся 49 номеров, после чего в тираже разыгрываются 6 «выигравших» номеров из 49. Найти вероятности следующих событий:

A_3 = {верно угаданы 3 выигравших номера из 6};

A_4 = {верно угаданы 4 номера из 6};

A_5 = {верно угаданы 5 номеров из 6};

A_6 = {верно угаданы все 6 номеров}.

Решение. Задача эквивалентна выниманию 6 шаров из урны, в которой 6 белых шаров (выигравшие номера) и $49 - 6 = 43$ черных (не выигравшие).

$$P(A_3) = \frac{C_6^3 C_{43}^3}{C_{49}^6} \approx 0{,}01765; \quad P(A_4) = \frac{C_6^4 C_{43}^2}{C_{49}^6} \approx 0{,}000969;$$

$$P(A_5) = \frac{C_6^5 C_{43}^1}{C_{49}^6} \approx 0{,}00001845; \quad P(A_6) = \frac{1}{C_{49}^6} \approx 0{,}715 \cdot 10^{-7}.$$

1.22. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число, например 07 (семь), 14 (четырнадцать) и т. п. Найти вероятность того, что число будет четным.

Решение. Четность числа определяется его последней цифрой, которая должна быть четной (нуль — тоже четное число). Искомая вероятность есть вероятность того, что на втором месте появится одно из чисел 0, 2, 4, 6, 8, т. е. 5/9.

1.23. На пяти карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5. Две из них, одна за другой, вынимаются. Найти вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой.

Решение. Опыт имеет два возможных исхода:

A = {второе число больше первого};

B = {второе число меньше первого}.

Так как условия опыта симметричны относительно A и B, то $P(A) = P(B) = 1/2$.

1.24. В ящике находятся однотипные изделия, изготовленные разными заводами; из них a изделий изготовлены заводом I, b изделий — заводом II, c изделий — заводом III. Из ящика вынимают одно за другим все находящиеся в нем изделия и отмечают места их изготовления. Найти вероятность того, что при этом изделие завода I появится раньше, чем изделие завода II.

Решение. В условиях задачи наличие или отсутствие в ящике изделий завода III роли не играет; искомая вероятность равна вероятности вынуть первым изделие завода I из ящика, где a изделий завода I и b изделий завода II, т. е. $a/(a+b)$.

1.25. Имеются два ящика, содержащих типовые элементы замены (ТЭЗ). В первом ящике a исправных ТЭЗ и b неисправных; во втором — c исправных и d неисправных. Из каждого ящика наугад вынимается по одному ТЭЗ. Найти вероятность того, что оба ТЭЗ будут исправными.

Решение. Каждый ТЭЗ из первого ящика может комбинироваться с каждым ТЭЗ из второго; число случаев $n=(a+b)(c+d)$. Число благоприятных случаев $m=ac$; вероятность события равна $ac/[(a+b)(c+d)]$.

1.26. В условиях задачи 1.25 найти вероятность того, что вынутые ТЭЗ будут различными по качеству.

Ответ. $(ad+bc)/[(a+b)(c+d)]$.

1.27. В тех же условиях найти вероятность того, что оба вынутых ТЭЗ будут неисправны.

Ответ. $bd/[(a+b)(c+d)]$.

1.28. В ящике имеется k перенумерованных однотипных изделий с номерами 1, 2, ..., k. Из ящика l раз вынимается наугад по одному изделию, его номер записывается и изделие кладется обратно в ящик. Найти вероятность p того, что все записанные номера будут различны.

Решение. Число случаев $n=k^l$. Число благоприятных случаев равно числу размещений из k элементов по l, т. е. $m=k(k-1)\ldots(k-l+1)$. Вероятность события

$$p=\frac{m}{n}=\frac{k(k-1)\ldots(k-l-1)}{k^l}=\frac{k!}{k^l(k-l)!}.$$

1.29. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность p того, что у него снова получилось слово «книга».

Ответ. $p=1/5!=1/120$.

1.30. Тот же вопрос, если было составлено слово «ананас».

Решение. Число случаев $n=6!$; число благоприятных случаев уже не один, как в задаче 1.29, а $m=3!\,2!$, так как повторяющиеся буквы «а» и «н» можно произвольным образом переставлять между собой: $p=3!\,2!/6!=1/60$.

1.31. Из полной колоды карт (52 листа, 4 масти) вынимается сразу несколько карт. Сколько карт нужно вынуть для того, чтобы с вероятностью, большей чем 0,50, утверждать, что среди них будут карты одной и той же масти?

Решение. Обозначим $A=\{$наличие среди k вынутых карт не менее двух одной масти$\}$.

При $k=2$: $n=C_{52}^2$; $m_A=C_{13}^2\cdot 4$; $P(A)=0{,}235<0{,}50$.

При $k=3$: $n=C_{52}^3$; $m_A=C_{13}^3\cdot 4+C_{13}^2C_{39}^1\cdot 4$; $P(A)=0{,}602>$ $>0{,}50$.

Итак, нужно вынуть $k\geqslant 3$ карт.

1.32. N человек случайным образом рассаживаются за круглым столом ($N > 2$). Найти вероятность p того, что два фиксированных лица A и B окажутся рядом.

Решение. Общее число случаев $n = N!$; подсчитываем число благоприятных случаев m. Двух лиц A и B можно посадить рядом двумя способами; остальных — $(N-2)!$ способами; тогда $m = 2N(N-2)!$; $p = 2N(N-2)!/N! = 2/(N-1)$. Эту же задачу можно решить проще: пусть лицо A садится куда угодно; тогда для B остается $N-1$ место, из них 2 благоприятных; $p = 2/(N-1)$.

1.33. Та же задача, но стол прямоугольный, и N человек рассаживаются случайно вдоль одной из его сторон.

Решение. $n = N!$; благоприятные случаи делятся на две группы: 1) A сидит с краю; 2) A сидит не с краю. Число первых $m_1 = 2(N-2)!$; число вторых $m_2 = 2(N-2)(N-2)!$; $p = (m_1 + m_2)/n = 2(N-1)(N-2)!/N! = 2/N$.

1.34. Имеется M операторов и N перенумерованных приборов, которые они могут обслуживать. Каждый оператор выбирает случайным образом и с одинаковой вероятностью любой прибор, но с условием, что ни один прибор не может обслуживаться больше, чем одним оператором. Найти вероятность того, что будут выбраны для обслуживания приборы с номерами 1, 2, ..., M.

Решение. Число способов, которыми можно распределить M операторов по N приборам, равно числу размещений из N элементов по M: $n = N(N-1)\dots(N-M+1)$. По условиям задачи все эти способы равновероятны, т. е. представляют собой группу случаев. Число благоприятных случаев (при которых обслуживаются только первые M приборов) равно $m = M!$ Отсюда искомая вероятность

$$p = \frac{M!}{N(N-1)\dots(N-M+1)} = \frac{1}{C_N^M}.$$

1.35. В ящике имеется K ТЭЗ, из них K_1 элементов 1-го типа, ... K_i элементов i-го типа, ..., K_m элементов m-го типа; $\sum_{i=1}^{m} K_i = K$. Из ящика выбирают наугад k ТЭЗ. Найти вероятность того, что среди них будет k_1 ТЭЗ 1-го типа, ..., k_i ТЭЗ i-го типа, ..., k_m ТЭЗ m-го типа.

Решение. Общее число случаев n равно числу способов, какими можно вынуть k ТЭЗ из K: $n = C_K^k$. Число благоприятных случаев

$$m = C_{K_1}^{k_1} C_{K_2}^{k_2} \dots C_{K_m}^{k_m} = \prod_{i=1}^{m} C_{K_i}^{k_i},$$

так как k_1 ТЭЗ первого типа можно выбрать $C_{K_1}^{k_1}$ способами, ..., k_m ТЭЗ m-го типа — $C_{K_m}^{k_m}$ способами, и все эти способы могут комбинироваться между собой. Искомая вероятность

$$p = \prod_{i=1}^{m} C_{K_i}^{k_i} \Big/ C_K^k.$$

1.36. В отделение связи поступило 4 телеграммы; всего имеется четыре канала связи. Телеграммы случайным образом распределяются по каналам; каждая телеграмма с одной и той же вероятностью передается по любому из четырех каналов. Найти вероятность события A = {на один из каналов попадут три телеграммы, на другой — одна телеграмма, а два оставшихся канала будут не загружены}.

Решение. Общее число случаев $n = 4^4$. Число способов, какими можно выбрать один канал, на который попадет три телеграммы, $C_4^1 = 4$; число способов, какими можно выбрать канал, на который попадет одна телеграмма, $C_3^1 = 3$. Число способов, какими можно выбрать из четырех телеграмм три, чтобы направить их в один канал, $C_4^3 = 4$. Общее число благоприятных случаев $m_A = 4 \cdot 3 \cdot 4$.

$$\mathrm{P}(A) = m_A/n = 4 \cdot 3 \cdot 4/4^4 = 3/16.$$

1.37. M телеграмм случайным образом распределяются по N каналам связи ($N > M$). Найти вероятность события

A = {на каждый канал придется не больше одной телеграммы}.

Решение. Общее число случаев N^M. Число способов, какими можно выбрать M каналов из N, чтобы направить на них по одной телеграмме, равно C_N^M. Число способов, какими можно выбрать из M телеграмм одну и направить ее в первый из отмеченных каналов, равно $C_M^1 = M$; число способов, какими можно выбрать вторую телеграмму из оставшихся $M - 1$, равно $C_{M-1}^1 = M - 1$, и т. д. Общее число благоприятных событию случаев будет $m_A = M(M-1)\ldots 1 = M!$.

$$\mathrm{P}(A) = C_N^M \cdot M!/N^M.$$

1.38*. В отделение связи поступило M телеграмм, которые случайным образом распределяются по N каналам связи. Каналы перенумерованы. Найти вероятность того, что на 1-й канал попадет ровно k_1 телеграмм, на 2-й канал — k_2 телеграмм и т. д., на N-й канал — k_N телеграмм, причем $\sum\limits_{i=1}^{N} k_i = M$.

Решение. Число случаев $n = N^M$. Находим число благоприятных случаев m. Число способов, какими можно выбрать из M телеграмм k_1, равно $C_M^{k_1}$; число способов, какими можно из оставшихся $M - k_1$ телеграмм выбрать k_2, равно $C_{M-k_1}^{k_2}$ и т. д. Число способов, какими можно из $M - (k_1 + \ldots + k_{N-1}) = k_N$ телеграмм выбрать k_N, равно $C_{k_N}^{k_N} = 1$. Все эти числа нужно перемножить.

$$m = C_M^{k_1} C_{M-k_1}^{k_2} \ldots C_{M-(k_1+\ldots+k_{N-1})}^{k_{N-1}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{M!}{k_1!\,(M-k_1)!} \, \frac{(M-k_1)!}{k_2!\,[M-(k_1+k_2)]!} \ldots \frac{[M-(k_1+k_2+\ldots+k_{N-2})]!}{k_{N-1}!\,k_N!} =$$

$$= \frac{M!}{k_1!\,k_2!\ldots k_N!} = \frac{M!}{\prod\limits_{i=1}^{N} k_i!};$$

$$\mathrm{P}(A) = m/n = M! \Big/ \left(N^M \prod_{i=1}^{N} k_i!\right).$$

1.39*. В условиях задачи 1.37 найти вероятность того, что из N каналов будет l_0 таких, на которые не попадет ни одна телеграмма, l_1 — таких, на которые попадет ровно одна телеграмма, и т. д.; l_M таких, на которые попадут все M телеграмм: $l_0 + l_1 + \ldots + l_M = N$; $0 \cdot l_0 + 1 \cdot l_1 + \ldots + Ml_M = M$.

Решение. Общее число случаев $n = N^M$. Чтобы найти число благоприятных случаев m, нужно перемножить число способов, какими можно выбрать каналы, и число способов, какими можно выбрать телеграммы. Число способов, какими можно выбрать каналы, равно

$$N!/(l_0!\, l_1! \ldots l_M!) = N! \Big/ \prod_{k=0}^{M} l_k!.$$

Найдем число способов, какими можно выбрать телеграммы. Они распадаются на группы: начальная группа (по 0 телеграмм) пустая; первая содержит l_1 телеграмм; вообще k-я — kl_k телеграмм ($k = 1, 2, \ldots, M$). Число способов, какими можно выбрать группы телеграмм, равно

$$\frac{M!}{(1 \cdot l_1)!\,(2l_2)!\,(3l_3)! \ldots (Ml_M)!} = \frac{M!}{\prod\limits_{k=1}^{M} (kl_k)!}. \qquad (1.39.1)$$

Теперь определим число способов, какими можно выбрать телеграммы внутри k-й группы так, чтобы на каждый канал пришлось по k телеграмм. Это число способов равно

$$(kl_k)!/(\underbrace{k!\,k! \ldots k!}_{l_k \text{ раз}}) = (kl_k)!/(k!)^{l_k},$$

а число способов, какими можно выбрать все телеграммы для всех групп, равно произведению таких чисел для разных k:

$$\prod_{k=1}^{M} \frac{(kl_k)!}{(k!)^{l_k}}. \qquad (1.39.2)$$

Перемножая (1.39.1) и (1.39.2), получаем число способов, какими можно выбрать телеграммы:

$$\frac{M!}{\prod\limits_{k=1}^{M} (kl_k)!} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^{M} (kl_k)!}{\prod\limits_{k=1}^{M} (k!)^{l_k}} = \frac{M!}{\prod\limits_{k=1}^{M} (k!)^{l_k}}.$$

Умножая это на число способов, какими можно выбрать каналы, находим число благоприятных случаев

$$m = \frac{N!}{\prod\limits_{l=0}^{M} l_l!} \cdot \frac{M!}{\prod\limits_{k=1}^{M} (k!)^{l_k}}.$$

Отсюда вероятность интересующего нас события

$$P(A) = \frac{N!\,M!}{N^M \prod\limits_{i=0}^{M} l_i! \prod\limits_{k=1}^{M} (k!)^{l_k}}. \qquad (1.39.3)$$

1.40. На круглом экране радиолокатора радиуса r имеется точечное изображение объекта M (рис. 1.40), занимающее случайное положение в пределах экрана, причем ни одна область в пределах экрана не имеет преимуществ перед другой (изображение объекта «наугад бросается» на экран). Рассматривается событие A, состоящее в том, что расстояние ρ от точки M до центра экрана будет меньше, чем $r/2$: $A = \{\rho < r/2\}$. Найти вероятность этого события.

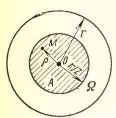


Рис. 1.40

Р е ш е н и е. Пространство Ω элементарных событий — внутренность круга радиуса r. Область A заштрихована на рис. 1.40.

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi r^2/4}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

1.41. Имеется магнитофонная лента длины $L = 200$ м, на обеих сторонах которой записаны сообщения; на одной стороне сообщение длины $l_1 = 30$ м, на другой — длины $l_2 = 50$ м; местоположение записей неизвестно. В связи с повреждением ленты нам пришлось удалить ее участок длины $l_0 = 10$ м, начинающийся на расстоянии 80 м от начала ленты. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{$ни та, ни другая записи не повреждены$\}$;
$B = \{$первая запись повреждена, вторая — нет$\}$;
$C = \{$вторая запись повреждена, первая — нет$\}$;
$D = \{$обе записи повреждены$\}$.

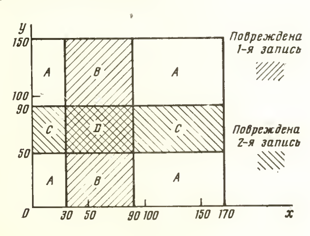


Рис. 1.41

Р е ш е н и е. Из того, что положение записей совершенно неизвестно, делаем вывод, что любое положение начала каждой из них, при котором вся запись умещается на ленте, столь же правдоподобно, как любое другое. Абсциссу начала первой записи обозначим x, второй y. Пространство элементарных событий — прямоугольник длины $L - l_1 = 170$ м, высоты $L - l_2 = 150$ м (рис. 1.41). На рис. 1.41 разными видами штриховки отмечены области, соответствующие повреждению первой и второй записей, буквами A, B, C, D — области, соответствующие каждому из событий A, B, C, D (все эти области, кроме D, состоят из частей).

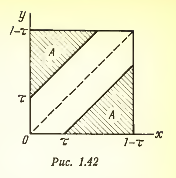


Рис. 1.42

$$S_\Omega = 170 \cdot 150 = 25\,500 \text{ м}^2;$$
$$S_A = 30 \cdot 60 + 80 \cdot 60 + 30 \cdot 50 + 80 \cdot 50 = 12\,100 \text{ м}^2;$$
$$S_B = 60 \cdot 60 + 60 \cdot 50 = 6600 \text{ м}^2;$$
$$S_C = 30 \cdot 40 + 80 \cdot 40 = 4400 \text{ м}^2;$$
$$S_D = 60 \cdot 40 = 2400 \text{ м}^2.$$
$$\mathrm{P}(A) = 0{,}474; \quad \mathrm{P}(B) = 0{,}259;$$
$$\mathrm{P}(C) = 0{,}173; \quad \mathrm{P}(D) = 0{,}094.$$

1.42. По радиоканалу в течение промежутка времени (0; 1) передаются два сигнала длительностью $\tau < 1/2$; каждый из них с одинаковой возможностью начинается в любой момент интервала $(0; 1 - \tau)$. Если сигналы перекроют друг друга хотя бы частично, оба они искажаются и приняты быть не могут. Найти вероятность того, что сигналы будут приняты без искажений.

Р е ш е н и е. Обозначим x момент начала первого сигнала, y — второго. Пространство элементарных событий показано на рис. 1.42. Заштрихованные области A соответствуют событию:

$$A = \{\text{сигналы не искажены}\} = \{|x - y| < \tau\}.$$
$$\mathrm{P}(A) = S_A/S_\Omega = (1 - 2\tau)^2/(1 - \tau)^2.$$

1.43. Имеются две параллельные линии телефонной связи длины l (рис. 1.43, a), расстояние между которыми $d < l$. Известно, что на каждой из линий где-то есть разрыв (неизвестно, в каком месте). Найти вероятность того, что расстояние R между точками разрыва будет не больше a $(d < a < \sqrt{l^2 + d^2})$.

Р е ш е н и е. Абсциссу первой точки разрыва обозначим x, второй y; $R = \sqrt{|x - y|^2 + d^2}$; событие, о котором идет речь, $A = \{|x - y|^2 + d^2 \leqslant a^2\} = \{|x - y| \leqslant \sqrt{a^2 - d^2}\}$. Пространство

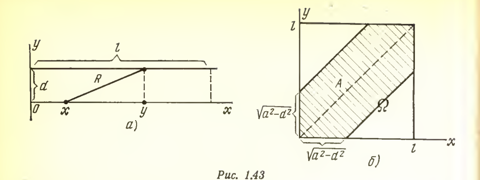


Рис. 1.43

элементарных событий — квадрат со стороной l; $S_\Omega = l^2$. Область A заштрихована на рис. 1.43, *б*.

$$S_A = 2l\sqrt{a^2-d^2} + a^2 - d^2;$$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{l}\sqrt{a^2-d^2} + \frac{a^2-d^2}{l^2}.$$

1.44. Стержень длины 1 произвольным образом разламывается на три части x, y, z (рис. 1.44, *а*). Найти вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.

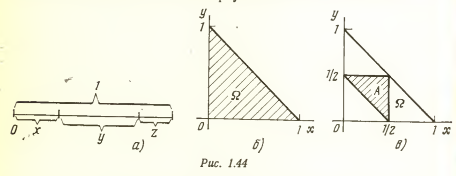
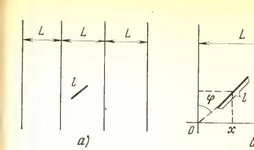


Рис. 1.44

Решение. Элементарное событие ω характеризуется двумя параметрами: x и y [так как $z = 1 - (x + y)$]. Будем изображать это событие точкой на плоскости $x0y$ (рис. 1.44, *б*). На величины x, y наложены условия: $x > 0$; $y > 0$; $x + y < 1$; пространство элементарных событий есть внутренняя часть прямоугольного треугольника с катетами, равными единице; $S_\Omega = 1/2$. Условие A, чтобы из отрезков x, y, $1 - (x + y)$ можно было составить треугольник, сводится к двум следующим: 1) сумма любых двух сторон больше третьей; 2) разность любых двух сторон меньше третьей. Этому условию соответствует треугольная область A (рис. 1.44, *в*) с площадью $S_A = (1/2)(1/4) = 1/8$; $\mathrm{P}(A) = S_A/S_\Omega = 1/4$.

1.45. *Задача Бюффона*. Плоскость разграфлена параллельными прямыми на расстоянии L друг от друга (рис. 1.45, *а*). На плоскость



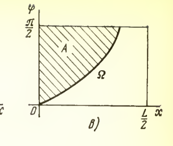


Рис. 1.45

наугад бросается игла (отрезок) длины $l < L$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь из прямых.

Решение. Будем характеризовать исход опыта (положение иглы) двумя числами: абсциссой x центра иглы относительно ближайшей прямой слева и углом φ, который составляет игла с направлением прямых (рис. 1.45, б). Тот факт, что игла бросается на плоскость наугад, будем понимать так, что все значения x и φ одинаково возможны. Очевидно, можно (не теряя общности) ограничить возможные значения x участком от 0 до $L/2$, φ — от 0 до $\pi/2$, а возможность пересечения рассматривать только для одной из прямых (ближайшей левой). Пространство элементарных событий Ω — прямоугольник со сторонами $L/2$ и $\pi/2$ (рис. 1.45, в); $S_\Omega = L\pi/4$. Игла пересечет прямую, если абсцисса x ее центра будет меньше, чем $(l/2)\sin\varphi$; интересующее нас событие $A = \{x < (l/2)\sin\varphi\}$. Область A заштрихована на рис. 1.45, в; площадь ее

$$S_A = \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi = \frac{l}{2}; \quad P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{2l}{\pi L}.$$

Примечание. Эта формула, полученная Бюффоном еще в XVIII в., неоднократно подвергалась экспериментальной проверке, для чего подсчитывалась частота пересечений в длинной серии бросаний. С помощью этой формулы производилась даже приближенная оценка числа π и были получены вполне удовлетворительные результаты.

ГЛАВА 2

АЛГЕБРА СОБЫТИЙ. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.0. Основными в теории вероятностей являются не прямые, а косвенные методы вычисления вероятностей, когда вероятности интересующих нас событий выражаются через вероятности других событий, с ними связанных. Для этого, прежде всего, нужно уметь выражать интересующие нас события через другие. Этим целям служит так называемая *алгебра событий*. Для событий вводятся понятия «сумма событий», «произведение событий» и некоторые другие, а также правила действий с событиями. Заметим, что все эти понятия вводятся

только тогда, когда события, о которых идет речь, представляют собой подмножества одного и того же пространства элементарных событий Ω.

Так как события в нашем теоретико-множественном изложении представляют собой *множества*, то действия с ними (сложение, умножение) определяются так же, как соответствующие действия с множествами (см. гл. 1).

Все же повторим некоторые определения и дадим им геометрическую интерпретацию. Пространство элементарных событий мы будем изображать прямоугольником, а события — частями этого прямоугольника (рис. 2.0.1). *Суммой* $A + B$ *двух событий* A *и* B называется событие, состоящее в том, что произойдет хотя бы одно из этих событий (заштрихованная область на рис. 2.0.1). Очевидно, сумма двух событий представляет собой объединение (сумму) соответствующих множеств. Аналогично *суммой нескольких событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие $\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, состоящее в выполнении хотя бы одного из них. Суммироваться может и бесконечное (счетное) число событий: $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$

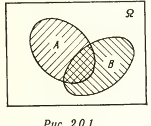


Рис. 2.0.1

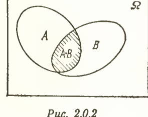


Рис. 2.0.2

Произведением $A \cdot B$ *двух событий* A *и* B называется событие, состоящее в совместном выполнении того и другого события (пересечение соответствующих множеств, рис. 2.0.2). *Произведением нескольких событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \ldots A_n$, состоящее в совместном выполнении всех этих событий (пересечение соответствующих множеств). Перемножаться может и бесконечное (счетное) число событий: $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$

Из определения суммы и произведения событий следует, что

$$A + A = A;\ A \cdot A = A;\ A + \Omega = \Omega;\ A \cdot \Omega = A;\ A + \varnothing = A;$$
$$A \cdot \varnothing = \varnothing.$$

Если $A \subseteq B$, то $A + B = B$; $A \cdot B = A$.

Операции сложения и умножения событий обладают рядом свойств, присущих обычным сложению и умножению.

1. Переместительное свойство:

$$A + B = B + A;\ A \cdot B = B \cdot A.$$

2. Сочетательное свойство:

$$(A + B) + C = A + (B + C);\ (AB)\, C = A\, (BC).$$

3. Распределительное свойство:

$$A\, (B + C) = AB + AC.$$

Все эти свойства вытекают из того, что события являются множествами (см. гл. 1).

Противоположным событием для события A (или его дополнением) называется событие $\bar{A}$, состоящее в непоявлении события A : $\bar{A} = \{A$ не появилось$\}$.

Изображение противоположного события дано на рис. 2.0.3. Область $\bar{A}$ дополняет A до полного пространства Ω.

Из определения противоположного события следует, что

$$\overline{(\bar{A})}=A;\quad \bar{\Omega}=\varnothing;\quad \bar{\varnothing}=\Omega.$$

Легко убедиться (рис. 2.0.4), что если $B\subseteq A$, то $\bar{A}\subseteq\bar{B}$. Также легко убедиться (рис. 2.0.5) в следующих свойствах противоположных событий:

$$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B};\quad \overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}.$$

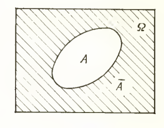


Рис. 2.0.3

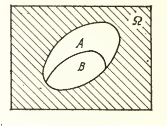


Рис. 2.0.4

Правила алгебры событий позволяют, комбинируя между собой различные простые события, образовывать другие, более сложные.

Вероятности сложных событий можно вычислять с помощью вероятностей других, более простых, пользуясь двумя основными правилами теории вероятностей: 1) правилом сложения вероятностей и 2) правилом умножения вероятностей. Эти правила часто называют основными теоремами теории вероятностей. На самом деле они являются теоремами только для схемы случаев, а для опытов, не сводящихся к схеме случаев, вводятся аксиоматически.

1. Правило сложения вероятностей. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*, т. е. если $A\cdot B=\varnothing$, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{2.0.1}$$

Это правило было введено аксиоматически в гл. 1 (аксиома II).

Правило сложения вероятностей легко обобщается на случай произвольного числа n несовместных событий: если $A_i\cdot A_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{2.0.2}$$

Правило сложения обобщается и на случай бесконечного (счетного) числа событий: если $A_i\cdot A_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{2.0.3}$$

(см. аксиому III гл. 1).

Из правила сложения вероятностей вытекает, что *если события A_1, A_2, ..., A_n несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице*; т. е. если

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=\Omega,\ A_i\cdot A_j=\varnothing \text{ при } i\neq j,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) = 1. \qquad (2.0.4)$$

В частности, так как два противоположиых события A и $\bar{A}$ иесовместны и образуют полную группу, то *сумма вероятностей противоположных событий равна единице*:

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\bar{A}) = 1. \qquad (2.0.5)$$

Чтобы сформулировать правило умножения вероятностей, иадо ввести понятие условиой вероятиости. *Условной вероятностью события A при наличии события B* [обозначается $\mathrm{P}(A \mid B)$] называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло.

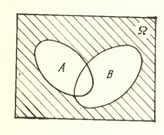


Рис. 2.0.5

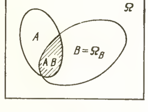


Рис. 2.0.6

Условие, состоящее в том, что событие B произошло, равиосильно изменению условий опыта, когда из всех элементариых событий остаются только те, которые благоприятны событию B, а все остальиые отбрасываются. Из этого следует, что вместо пространства элементарных событий Ω рассматривается новое пространство Ω_B, соответствующее событию B (рис. 2.0.6). Область AB, соответствующая пересечеиию A и B, благоприятиа событию A при наличии события B.

2. Правило умиожения вероятностей. *Вероятность произведения двух событий A и B равна вероятности одного из них* (например, A), *умноженной на условную вероятность другого при наличии первого*:

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A), \qquad (2.0.6)$$

или, если в качестве первого события взять B,

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B). \qquad (2.0.7)$$

Правило умножения вероятностей обобщается иа произвольиое число событий:

$$\mathrm{P}(A_1A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3 \mid A_1A_2) \ldots \mathrm{P}(A_n \mid A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \qquad (2.0.8)$$

Из (2.0.6) вытекает следующее выражение для условной вероятности:

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(A), \qquad (2.0.9)$$

т. е. *условная вероятность одного события при наличии другого равна вероятности произведения двух событий, деленной на вероятность того из них, которое предполагается выполненным.*

Аналогичио формуле (2.0.9) можио иаписать

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(B). \qquad (2.0.10)$$

Два события A и B иазываются *независимыми*, если появление одиого из них не меняет вероятности появлеиия другого:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A), \qquad (2.0.11)$$

или, что равносильно,

$$P(B \mid A) = P(B). \tag{2.0.12}$$

Для двух независимых событий правило умножения вероятностей принимает вид

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \tag{2.0.13}$$

т. е. *вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

Несколько событий называются *независимыми в совокупности* (или просто независимыми), если появление любого числа из них не меняет вероятностей остальных событий. Для нескольких независимых событий правило умножения (2.0.8) принимает вид

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n), \tag{2.0.14}$$

т. е. *вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

Несколько опытов называются *независимыми*, если вероятность того или иного исхода каждого из них не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Следствием правил сложения и умножения вероятностей является теорема о повторении опытов, состоящая в следующем. *Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, то вероятность того, что в данной серии опытов событие A появится ровно m раз, выражается формулой*

$$P_{m,n} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \tag{2.0.15}$$

или, обозначая $1 - p = q$,

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{2.0.16}$$

Вероятность того, что в серии из n независимых опытов событие A появится не менее m раз, выражается формулой

$$R_{m,n} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{2.0.17}$$

или же

$$R_{m,n} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{2.0.18}$$

Из двух формул (2.0.17) и (2.0.18) выбирают ту, которая содержит меньше членов.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Может ли сумма двух событий A и B совпадать с их произведением?

Ответ. Да, может, если событие A эквивалентно событию B ($A \subseteq B$ и $B \subseteq A$). Например, если искажение сообщения, передаваемого по каналу связи, может быть вызвано только наличием помех на участке времени, занятом сообщением, и непременно происходит при их наличии, то события

A = {сообщение искажено},

B = {на участке времени, занятом сообщением, имелись помехи}

эквивалентны: $A = B$; $A + B = A = B$; $AB = A = B$.

2.2. Доказать, что если два события A и B совместны, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (2.2.1)$$

Решение. Представим событие $A+B$ как сумму трех несовместных событий: $A\overline{B}$ (A, но не B); $\overline{A}B$ (B, но не A) и AB (и A и B) (см. рис. 2.2):

$$A+B=A\overline{B}+\overline{A}B+AB.$$

Выражаем события A и B:

$$A=AB+A\overline{B};\ B=\overline{A}B+AB.$$

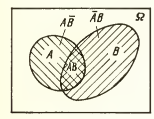


Рис. 2.2

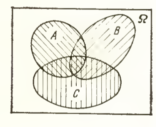


Рис. 2.3

Пользуясь правилом сложения вероятностей, находим:

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB); \qquad (2.2.2)$$
$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB),$$
$$P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB).$$

Складывая два последних выражения, получаем

$$P(A)+P(B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+2P(AB).$$

Вычитая отсюда (2.2.2), получаем

$$P(A)+P(B)=P(A+B)+P(AB),$$

откуда и следует (2.2.1). Из (2.2.1) следует, что всегда

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B),$$

и знак равенства достигается только при несовместных событиях.

2.3. Написать выражение для вероятности суммы трех совместных событий.

Решение. Из рис. 2.3 получаем

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-$$
$$-P(BC)+P(ABC).$$

2.4. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:

$A=$ {герб на первой монете}; $B=$ {цифра на первой монете}; $C=$ {герб на второй монете}; $D=$ {цифра на второй монете}; $E=$

$=$ {хотя бы один герб}; $F =$ {хотя бы одна цифра}; $G =$ {один герб и одна цифра}; $H =$ {ни одного герба}; $K =$ {два герба}.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: 1) $A+C$; 2) AC; 3) EF; 4) $G+E$; 5) GE; 6) BD; 7) $E+K$.

Ответ. 1) $A+C=E$; 2) $AC=K$; 3) $EF=G$; 4) $G+E=E$; 5) $GE=G$; 6) $BD=H$; 7) $E+K=E$.

2.5. По каналу связи передаются последовательно три сообщения; каждое из них может быть передано правильно или искажено. Рассматриваются события:

$A_i =$ {i-е сообщение передано правильно};

$\overline{A}_i =$ {i-е сообщение искажено} ($i = 1, 2, 3$).

Выразить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i, $\overline{A}_i$ следующие события:

$A =$ {все три сообщения переданы правильно};

$B =$ {все три сообщения искажены};

$C =$ {хотя бы одно сообщение передано правильно};

$D =$ {хотя бы одно сообщение искажено};

$E =$ {не менее двух сообщений переданы правильно};

$F =$ {не более одного сообщения передано правильно};

$G =$ {первое правильно переданное сообщение — третье по порядку}.

Ответ. $A = A_1A_2A_3$; $B = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$; $C = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3$; $D = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3$; $E = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$; $F = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; $G = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

2.6. Проводится наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

$A =$ {обнаружен ровно один из четырех объектов};

$B =$ {обнаружен хотя бы один объект};

$C =$ {обнаружено не менее двух объектов};

$D =$ {обнаружено ровно два объекта};

$E =$ {обнаружено ровно три объекта};

$F =$ {обнаружено все четыре объекта}.

Указать, в чем состоят события: 1) $A+B$; 2) AB; 3) $B+C$; 4) BC; 5) $D+E+F$; 6) BF. Совпадают ли события BF и CF? Совпадают ли события BC и D?

Ответ. 1) $A+B=B$; 2) $AB=A$; 3) $B+C=B$; 4) $BC=C$; 5) $D+E+F=C$; 6) $BF=F$. События BC и CF совпадают; BC и D не совпадают.

2.7. Ниже указаны опыты и события, которые в них могут произойти. Назвать противоположные для всех этих событий.

1) Передаются два сообщения по каналу связи: событие $A =$ {оба сообщения переданы правильно}.

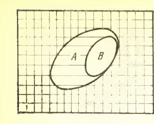


Рис. 2.8

2) Вынимается один шар из урны, в которой два белых, три черных и четыре красных шара; событие B = {появление белого шара}.

3) Передаются пять сообщений; событие C = {не менее трех сообщений переданы правильно}.

4) Производятся n выстрелов по мишени; событие D = {хотя бы одно попадание}.

5) Производится профилактический осмотр технического устройства, состоящего из k узлов; каждый узел в результате осмотра может быть либо сразу налажен, либо отправлен в ремонт. Событие E = {ни один узел не придется ремонтировать}.

6) Двое игроков играют в шахматы; событие F = {выигрыш белых}.

Ответ. 1) $\overline{A}$ = {хотя бы одно из сообщений искажено}; 2) $\overline{B}$ = = {появление черного или красного шара}; 3) $\overline{C}$ = {не более двух сообщений переданы правильно}; 4) $\overline{D}$ = {ни одного попадания}; 5) $\overline{E}$ = {хотя бы один узел придется ремонтировать}; 6) $\overline{F}$ = {выигрыш черных или ничья}.

2.8. Событие B есть частный случай события A: $B \subseteq A$, т. е. из того, что произошло событие B следует, что событие A произошло. Следует ли из $\overline{B}$, что $\overline{A}$ произошло?

Ответ. Нет, не следует. Например, опыт состоит в передаче двух сообщений; событие A = {хотя бы одно сообщение искажено}; событие B = {оба сообщения искажены}. Если произошло событие $\overline{B}$ = = {искажено менее двух сообщений}, то из него еще не следует, что не искажено ни одного (событие $\overline{A}$). Напротив, из $\overline{A}$ следует $\overline{B}$ ($\overline{A} \subseteq \overline{B}$).

На рис. 2.8 показаны события A и B, причем $B \subseteq A$, а также противоположные им события $\overline{A}$ (вертикальная штриховка) и $\overline{B}$ (горизонтальная штриховка). Непосредственно видно, что $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

2.9. Если событие B представляет собой частный случай события A ($B \subseteq A$), зависимы эти события или нет?

Ответ. Зависимы, если $P(A) \neq 1$, так как $P(A/B) = 1$.

2.10. Зависимы или независимы: 1) несовместные события; 2) события, образующие полную группу; 3) равновозможные события?

Ответ. 1) Зависимы, так как появление любого из них обращает в нуль вероятности всех остальных; 2) зависимы, так как непоявление всех, кроме одного, обращает в единицу вероятность последнего; 3) могут быть как зависимы, так и независимы.

2.11. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события:

A = {герб на первой монете}; D = {хотя бы один герб}; E = = {хотя бы одна цифра}; F = {герб на второй монете}. Определить, зависимы или независимы пары событий: 1) A и E; 2) A и F; 3) D и E; 4) D и F. Определить условные и безусловные вероятности событий в каждой паре.

Ответ.
1) $P(E) = 3/4$, $P(E|A) = 1/2$, события зависимы;
2) $P(A) = 1/2$, $P(A|F) = 1/2$, события независимы;
3) $P(D) = 3/4$, $P(D|E) = 2/3$, события зависимы;
4) $P(D) = 3/4$, $P(D|F) = 1$, события зависимы.

2.12. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают (одновременно или последовательно) два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми*).

Ответ. По правилу умножения вероятностей

$$P\{\text{оба шара белые}\} = P\{\text{бб}\} = \frac{a}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1}.$$

2.13. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шара будут белыми.

Ответ. $[a/(a+b)]^2$.

2.14. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

Решение. Событие может появиться в двух несовместных вариантах: {бч} или {чб}; по правилам сложения и умножения

$$P\{\text{бч}+\text{чб}\} = \frac{a}{a+b}\,\frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b-1} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

2.15. Та же задача, но шары вынимаются последовательно и после вынимания первый шар возвращается в урну.

Ответ. $2ab/(a+b)^2$.

2.16. В урне a белых и b черных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

Решение. Вероятность события может быть найдена непосредственно (см. задачу 1.12). Тот же результат может быть найден и по правилам сложения и умножения:

$$P\{\text{бб}+\text{чб}\} = \frac{a}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b-1} = \frac{a}{a+b}.$$

2.17. В урне a белых, b черных и c красных шаров. Три из них вынимаются наугад. Найти вероятность того, что по крайней мере два из них будут одноцветными.

Решение. Чтобы найти вероятность события — по крайней мере два шара будут одноцветными, перейдем к противоположному $\bar{A}$ = = {все шары разных цветов}.

$$P(\bar{A}) = P\underbrace{\{\text{бчк}+\text{бкч}+\text{кчб}+\dots\}}_{6\ \text{комбинаций}} =$$

*) Данная задача, как и ряд других в этой главе, может быть решена и с помощью непосредственного подсчета числа случаев; здесь требуется решить их с помощью правил сложения или умножения.

$$=6\frac{a}{a+b+c}\frac{b}{a+b+c-1}\frac{c}{a+b+c-2}.$$

Отсюда

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\bar{A})=1-\frac{6abc}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)}.$$

2.18. Монету бросают до тех пор, пока не появятся подряд два герба или две решки (см. задачу 1.5). Найти вероятность события A = {понадобится не более трех бросаний}.

Решение. Обозначая «г» — герб, «р» — решка, запишем А виде A = {гг} + {рр} + {грр} + {ргг}. По правилам сложения и умножения

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}\{\text{гг}\}+\mathrm{P}\{\text{рр}\}+\mathrm{P}\{\text{грр}\}+\mathrm{P}\{\text{ргг}\}=$$
$$={}^1/_2\cdot{}^1/_2+{}^1/_2\cdot{}^1/_2+{}^1/_2\cdot{}^1/_2\cdot{}^1/_2+{}^1/_2\cdot{}^1/_2\cdot{}^1/_2={}^3/_4.$$

2.19. В шкафу находятся девять однотипных приборов. В начале опыта все они новые (ни разу не бывшие в эксплуатации). Для временной эксплуатации берут наугад три прибора; после эксплуатации их возвращают в шкаф. На вид прибор, бывший в эксплуатации, не отличается от нового. Найти вероятность события

A = {после трехкратного выбора и эксплуатации не останется новых приборов}.

Решение. Событие A может произойти одним-единственным способом: и первый раз, и второй, и третий из шкафа будут взяты новые приборы. Первый раз это обеспечено, поэтому

$$\mathrm{P}(A)=1\cdot{}^6/_9\cdot{}^5/_8\cdot{}^4/_7\cdot{}^3/_9\cdot{}^2/_8\cdot{}^1/_7\approx 0{,}0028.$$

2.20. Условия задачи 2.19 изменены следующим образом: в шкафу находятся $N = lM$ приборов; для временной эксплуатации берут наугад M приборов. Найти вероятность p того, что после l-кратного повторения такой процедуры в шкафу не останется новых приборов.

Ответ.
$$p=\frac{(N-M)!}{[N(N-1)\ldots(N-M+1)]^{l-1}}.$$

2.21. В шкафу стоят n новых приборов; k из них выбирается наугад и в течение некоторого времени эксплуатируется ($k\leqslant n/2$). После этого приборы возвращаются в шкаф. Затем снова выбираются наугад k приборов. Найти вероятность p того, что все эти k приборов будут новыми.

Ответ. $p=\dfrac{n-k}{n}\,\dfrac{n-k-1}{n-1}\cdots\dfrac{n-2k+1}{n-k+1}=\dfrac{[(n-k)!]^2}{n!\,(n-2k)!}.$

2.22. Прибор состоит из четырех узлов — первого, второго, третьего и четвертого, которые за время τ работы прибора могут независимо друг от друга выходить из строя. Надежность (вероятность безотказной работы) i-го узла равна p_i; вероятность отказа $q_i = 1 - p_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Найти вероятности следующих событий:

A = {все узлы работают безотказно};
B = {первый узел отказал, остальные нет};
C = {один из узлов отказал, другие нет};
D = {отказало ровно два узла из четырех};
E = {отказало не менее двух узлов};
F = {отказал хотя бы один узел}.

Ответ. $\mathrm{P}(A) = p_1p_2p_3p_4$; $\mathrm{P}(B) = q_1p_2p_3p_4$; $\mathrm{P}(C) = q_1p_2p_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1p_2p_3q_4$; $\mathrm{P}(D) = q_1q_2p_3p_4 + p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + q_1p_2q_3p_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4$; $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(D) + q_1q_2q_3p_4 + q_1q_2p_3q_4 + q_1p_2q_3q_4 + p_1q_2q_3q_4 + q_1q_2q_3q_4$; $\mathrm{P}(F) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

2.23. На железнодорожную сортировочную станцию поступает состав из k вагонов, направляемых в различные адреса; в адрес A_1 направляются k_1 вагонов, в адрес A_2 — k_2 вагонов, в адрес A_3 — k_3 вагонов ($k_1 + k_2 + k_3 = k$). Вагоны в составе занимают то или другое положение независимо друг от друга; все места в составе для любого вагона равновероятны. Найти вероятность того, что все вагоны, направляемые в один и тот же адрес, будут стоять рядом.

Ответ. Событие B, о котором идет речь, может появиться в шести вариантах (число перестановок из трех элементов $P_3 = 6$). Находим вероятность одного из этих вариантов.

C = {сначала идут все k_1 вагонов, направляемых в A_1, затем k_2 вагонов — в A_2, затем k_3 вагонов — в A_3}.

$$\mathrm{P}(C) = \frac{k_1}{k}\,\frac{k_1-1}{k-1}\cdots\frac{1}{k-k_1+1}\,\frac{k_2}{k-k_1}\,\frac{k_2-1}{k-k_1-1}\cdots$$
$$\cdots\frac{1}{k-k_1-k_2+1}\,\frac{k_3}{k-k_1-k_2}\,\frac{k_3-1}{k-k_1-k_2-1}\cdots 1;$$
$$\mathrm{P}(B) = 6\mathrm{P}(C).$$

2.24. В ящике находятся однотипные изделия; среди них a изделий завода I и b изделий завода II. Выбирается наугад $2k$ изделий ($2k < a$, $2k < b$). Найти вероятность того, что среди выбранных изделий будет больше изделий первого, чем второго завода.

Решение. Данную задачу проще решить, комбинируя метод непосредственного подсчета вероятностей с правилом сложения. Событие A = {больше изделий завода I, чем завода II} можно представить в виде суммы

$$A = A_{k+1} + A_{k+2} + \ldots + A_{2k} = \sum_{i=k+1}^{2k} A_i,$$

где A_i = {появление i изделий завода I}.

Непосредственным подсчетом находим

$$\mathrm{P}(A_i) = \frac{C_a^i\,C_b^{2k-i}}{C_{a+b}^{2k}}, \quad \text{откуда} \quad \mathrm{P}(A) = \sum_{i=k+1}^{2k} \frac{C_a^i\,C_b^{2k-i}}{C_{a+b}^{2k}}.$$

2.25. В партии, состоящей из N изделий, имеется M дефектных. Из партии выбирается для контроля n изделий. Если среди контрольных окажется более m дефектных, бракуется вся партия. Найти вероятность того, что партия будет забракована.

Р е ш е н и е. Событие A = {партия забракована} можно представить в виде суммы

$$A = A_{m+1} + A_{m+2} + \dots + A_m = \sum_{i=m+1}^{n} A_i,$$

где A_i = {среди контрольных изделий i дефектных}.

$$P(A_i) = \frac{C_M^i\, C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}\ ;\ P(A) = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{C_M^i\, C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}.$$

2.26. В ящике имеются однотипные изделия различных сортов; среди них a изделий со знаком качества, b изделий первого сорта и c изделий второго сорта ($a \geqslant 4$, $b \geqslant 4$, $c \geqslant 4$). Из ящика выбирают одновременно и наугад четыре изделия, не обращая внимания на их качество. Рассматриваются события:

A = {среди выбранных изделий хотя бы одно со знаком качества};
B = {среди выбранных изделий хотя бы одно второго сорта}.
Найти вероятность события $C = A + B$.

Р е ш е н и е. Переходя к противоположному событию $\overline{C}$ = {нет ни A, ни B} = {все изделия первого сорта}, имеем

$$P(\overline{C}) = \frac{b}{a+b+c}\,\frac{b-1}{a+b+c-1}\,\frac{b-2}{a+b+c-2}\,\frac{b-3}{a+b+c-3},$$

откуда $P(C) = 1 - P(\overline{C})$.

2.27. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

О т в е т. $1 - (1 - p)^n$.

2.28. Имеется m радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл обзора обнаруживает объект с вероятностью p (независимо от других циклов и от других станций). За время T каждая станция успевает сделать n циклов. Найти вероятность следующих событий:

A = {объект будет обнаружен хотя бы одной из станций};
B = {объект будет обнаружен каждой из станций}.

О т в е т. $P(A) = 1 - (1 - p)^{mn}$; $P(B) = [1 - (1 - p)^n]^m$.

2.29. Имеется группа из k космических объектов, каждый из которых независимо от других обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью p. За группой объектов ведут наблюдение независимо друг от друга m радиолокационных станций. Найти вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

Р е ш е н и е. Переходим к противоположному событию $\overline{A}$ = {все объекты будут обнаружены}:

$$P(\overline{A}) = [1-(1-p)^m]^k; \; P(A) = 1-[1-(1-p)^m]^k.$$

2.30. Над изготовлением изделия работают последовательно k рабочих; качество изделия при передаче следующему рабочему не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью p_1, второй — с вероятностью p_2, и т. д. Найти вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.

Ответ. $1-\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)$.

2.31. В лотерее n билетов, из которых l выигрышных. Некто покупает k билетов. Определить вероятность того, что он выиграет хотя бы на один билет.

Ответ.

$$1-\frac{n-l}{n}\,\frac{n-l-1}{n-1}\ldots\frac{n-l-k+1}{n-k+1}=1-\frac{(n-l)!\,(n-k)!}{n!\,(n-l-k)!}.$$

2.32. Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью 1/4 попадает в каждую ячейку. Найти вероятность того, что шарики попадут в соседние ячейки.

Решение. Событие A = {шарики попали в соседние ячейки} разобъем на сумму стольких вариантов, сколько можно образовать пар соседних ячеек; получим $A = A_1 + A_2 + A_3$, где

A_1 = {шарики попали в первую и вторую ячейки};

A_2 = {шарики попали во вторую и третью ячейки};

A_3 = {шарики попали в третью и четвертую ячейки}.

Вероятность каждого варианта одна и та же и равна

$$^1/_4 \cdot {}^1/_4 \cdot 2 = {}^1/_8; \; P(A) = {}^3/_8.$$

2.33. k шариков разбрасываются случайным образом и независимо друг от друга по n ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии ($k < n$). Найти вероятность того, что они займут k соседних ячеек.

Решение. k соседних ячеек из n можно выбрать $n-k+1$ способами. Вероятность попадания k шариков в каждую из групп соседних ячеек равна $(1/n)^k k!$ (так как их можно разбросать по этим ячейкам $k!$ способами). Вероятность события A = {шарики попали в k соседних ячеек} равна $P(A) = (1/n)^k\ k!\,(n-k+1)$.

2.34. На станцию связи за день поступило 20 телеграмм, адресованных в четыре различных пункта (по пять в каждый пункт). Из всех телеграмм выбирается наугад четыре. Найти вероятности событий:

A = {все телеграммы адресованы в разные пункты};

B = {все телеграммы адресованы в один и тот же пункт}.

Решение. Чтобы выполнялось событие A, адрес первой телеграммы может быть совершенно произвольным; второй — не таким, как у первой, третьей — не таким, как у первых двух, у четвертой — не таким, как у первых трех. По правилу умножения вероятностей

$$P(A)=1\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{5}{17}\approx 0{,}130$$

Аналогично

$$P(B)=1\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{2}{17}\approx 0{,}00413$$

2.35. Вычислительная машина состоит из n блоков. Надежность (вероятность безотказной работы) в течение времени T первого блока равна p_1, второго — p_2 и т. д. Блоки отказывают независимо друг от друга. При отказе любого блока отказывает машина. Найти вероятность того, что машина откажет за время T.

Ответ. $1-\prod\limits_{i=1}^{n} p_i$.

2.36. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью p. Найти: 1) вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания; 2) вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включить зажигание не более двух раз.

Ответ. 1) $(1-p)p$; 2) $1-(1-p)^2=(2-p)p$.

2.37. По каналу связи передаются три сообщения; каждое из них может быть передано с различной степенью точности. Передача одного сообщения может привести к одному из событий:

$A_1=\{$сообщение передано правильно$\}$;

$A_2=\{$сообщение частично искажено$\}$;

$A_3=\{$сообщение полностью неразличимо$\}$.

Вероятности событий A_1, A_2, A_3 известны и равны p_1, p_2, p_3 $(p_1+p_2+p_3=1)$. Считая, что сообщения искажаются (или передаются правильно) независимо одно от другого, найти вероятности следующих событий:

$A=\{$все три сообщения переданы без искажений$\}$;

$B=\{$хотя бы одно сообщение полностью неразличимо$\}$;

$C=\{$не менее двух сообщений искажено полностью или частично$\}$.

Ответ. $P(A)=p_1^3$; $P(B)=1-(p_1+p_2)^3$; $P(C)=3(p_2+p_3)^2p_1+p_3^3$.

2.38. Две радиолокационные станции ведут наблюдение за областью пространства, в которой перемещается объект, в течение времени τ. За это время первая станция успевает произвести $2n_1$ циклов обзора, вторая — $2n_2$ циклов. За один цикл обзора первой станции объект обнаруживается (независимо от других) с вероятностью p_1, второй — с вероятностью p_2. Найти вероятности событий:

$A=\{$объект обнаружен за время τ хотя бы одной из станций$\}$;

$B=\{$объект обнаружен первой станцией и не обнаружен второй$\}$;

$C=\{$объект не обнаружен за первую половину времени τ, но обнаружен за вторую$\}$.

Решение. $P(A)=1-P(\overline{A})$.

$\overline{A}=\{$объект не обнаружен ни одной из станций$\}$;

$$P(\bar{\bar{A}}) = (1-p_1)^{2n_1}(1-p_2)^{2n_2};\ P(A) = 1-(1-p_1)^{2n_1}(1-p_2)^{2n_2};$$
$$P(B) = [1-(1-p_1)^{2n_1}](1-p_2)^{2n_2};$$
$$P(C) = (1-p_1)^{n_1}(1-p_2)^{n_2}[1-(1-p_1)^{n_1}(1-p_2)^{n_2}].$$

2.39. Радиолокационная станция за один цикл обзора обнаруживает объект с вероятностью p. Сколько потребуется циклов обзора для того, чтобы объект был обнаружен с вероятностью не меньшей, чем $\mathcal{P}$?

Решение. Обозначим N неизвестное число циклов. Должно быть выполнено условие $1-(1-p)^N \geqslant \mathcal{P}$, откуда $(1-p)^N \leqslant 1-\mathcal{P}$. Логарифмируя, имеем

$$N \lg(1-p) \leqslant \lg(1-\mathcal{P});\quad N \geqslant \lg(1-\mathcal{P})/\lg(1-p). \tag{2.39}$$

2.40. Сообщение, передаваемое по каналу связи, состоит из n знаков (символов). При передаче каждый знак искажается (независимо от других) с вероятностью p. Для надежности сообщение дублируется (повторяется k раз). Найти вероятность того, что хотя бы одно из переданных сообщений не будет искажено ни в одном знаке.

Решение. Вероятность того, что одно отдельное сообщение не будет искажено, равна $(1-p)^n$; вероятность того, что хотя бы одно из k сообщений не будет искажено

$$P(A) = 1-[1-(1-p)^n]^k.$$

2.41. В условиях задачи 2.40 сколько раз должно быть передано сообщение для того, чтобы вероятность хотя бы одного неискаженного сообщения стала не меньше $\mathcal{P}$?

Ответ. По формуле (2.39) имеем $N \geqslant \lg(1-\mathcal{P})/\lg[1-(1-p)^n]$.

2.42. Важное сообщение передается одновременно по n каналам связи, причем для надежности по каждому каналу оно повторяется k раз. При одной передаче сообщение (независимо от других) искажается с вероятностью p. Каждый канал связи (независимо от других) «забивается» помехами с вероятностью Q; «забитый» канал не может передавать никаких сообщений. Найти вероятность события

A = {хотя бы один раз сообщение передано без искажений}.

Решение. Обозначим

B = {по одному каналу сообщение хотя бы один раз передано без искажений}.

Для выполнения события B канал, во-первых, не должен быть забит помехами и, во-вторых, хотя бы одно сообщение по нему не должно быть искажено:

$$P(B) = (1-Q)(1-p^k).$$

Вероятность события A, состоящего в том, что хотя бы на одном канале произойдет событие B, равна

$$P(A) = 1-[1-P(B)]^n = 1-[1-(1-Q)(1-p^k)]^n.$$

2.43. Происходит воздушный бой между двумя самолетами: истребителем и бомбардировщиком. Стрельбу начинает истребитель: он дает по бомбардировщику один выстрел и сбивает его с вероятностью p_1. Если бомбардировщик этим выстрелом не сбит, он стреляет по истре-

бителю и сбивает его с вероятностью p_2. Если истребитель этим выстрелом не сбит, он еще раз стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_3. Найти вероятности следующих исходов боя:

A = {сбит бомбардировщик};

B = {сбит истребитель};

C = {сбит хотя бы один из самолетов}.

О т в е т. $\mathrm{P}(A) = p_1 + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3$; $\mathrm{P}(B) = (1 - p_1)p_2$; $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

2.44. Происходит воздушный бой между бомбардировщиком и двумя атакующими его истребителями. Стрельбу начинает бомбардировщик; он дает по каждому истребителю один выстрел и сбивает его с вероятностью p_1. Если данный истребитель не сбит, то он независимо от судьбы другого стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_2. Определить вероятности следующих исходов боя:

A = {сбит бомбардировщик};

B = {сбиты оба истребителя};

C = {сбит хотя бы один истребитель};

D = {сбит хотя бы один самолет};

E = {сбит ровно один истребитель};

F = {сбит ровно один самолет}.

Р е ш е н и е. Вероятность того, что один истребитель собьет бомбардировщик, равна $(1 - p_1)p_2$; вероятность того, что ни один из них не собьет бомбардировщика, равна $[(1 - p_1)p_2]^2$; откуда

$$\mathrm{P}(A) = 1 - [1 - (1 - p_1)p_2]^2;\quad \mathrm{P}(B) = p_1^2;\quad \mathrm{P}(C) = 1 - (1 - p_1)^2;$$

$$\mathrm{P}(D) = 1 - (1 - p_1)^2(1 - p_2)^2;\quad \mathrm{P}(E) = 2p_1(1 - p_1).$$

Событие F представляется в виде $F = F_1 + F_2 + F_3$, где

F_1 = {сбит бомбардировщик, а оба истребителя целы};

F_2 = {первый истребитель сбит, а второй истребитель и бомбардировщик целы};

F_3 = {второй истребитель сбит, а первый истребитель и бомбардировщик целы}.

$$\mathrm{P}(F_1) = (1 - p_1)^2[1 - (1 - p_2)^2];$$

$$\mathrm{P}(F_2) = \mathrm{P}(F_3) = p_1(1 - p_1)(1 - p_2);$$

$$\mathrm{P}(F) = (1 - p_1)^2[1 - (1 - p_2)^2] + 2p_1(1 - p_1)(1 - p_2).$$

2.45. Условия и вопросы те же, что в предыдущей задаче, но с тем изменением, что истребители идут в атаку только попарно: если сбит один из них, то другой выходит из боя.

О т в е т. $\mathrm{P}(A) = (1 - p_1^2)[1 - (1 - p_2)^2]$; $\mathrm{P}(B) = p_1^2$; $\mathrm{P}(C) = 1 - (1 - p_1)^2$; $\mathrm{P}(D) = 1 - (1 - p_1)^2(1 - p_2^2)$; $\mathrm{P}(E) = 2p_1(1 - p_1)$; $\mathrm{P}(F) = (1 - p_1)^2[1 - (1 - p_2)^2] + 2p_1(1 + p_1)$.

2.46. В урне a белых и b черных шаров. Два игрока поочередно вынимают из урны по одному шару, каждый раз вкладывая его обратно и перемешивая шары. Выигравшим считается тот, кто раньше вы-

нет белый шар. Найти вероятность $\mathscr{P}_1$ того, что выиграет первый игрок (тот, кто вынимал шар первым).

Р е ш е н и е. Выигрыш первого игрока может осуществиться или при первом же вынимании или при третьем (для чего первые два вынимания должны дать черные шары, а третье — белый), и т. д.

$$\mathscr{P}_1 = \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \frac{a}{a+b} + \ldots + \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2k} \frac{a}{a+b} + \ldots =$$

$$= \frac{a}{a+b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2k} = \frac{a}{a+b} \frac{1}{1-\left(\frac{b}{a+b}\right)^2} = \frac{a+b}{a+2b}$$

(очевидно, $\mathscr{P}_1 > 1/2$ при любых a и b).

2.47. В урне два белых и три черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность $\mathscr{P}_1$ того, что выиграет первый игрок.

Р е ш е н и е. $\mathscr{P}_1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$.

2.48. Производятся испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью p. После первого выхода из строя прибор ремонтируется; после второго — признается негодным. Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя в точности при k-м испытании.

Р е ш е н и е. Для того чтобы произошло данное событие, нужно, во-первых, чтобы прибор вышел из строя при k-м испытании — вероятность этого p. Кроме того, нужно, чтобы за предыдущие $k-1$ испытаний прибор вышел из строя ровно один раз; вероятность этого равна $(k-1)p(1-p)^{k-2}$. Искомая вероятность равна $(k-1) \times \times p^2 (1-p)^{k-2}$.

2.49. Производится стрельба ракетами по некоторой цели. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна p; попадания отдельных ракет независимы. Каждая попавшая ракета поражает цель с вероятностью p_1. Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования всего боезапаса; на базе имеется боезапас n ракет ($n > 2$). Найти вероятность того, что не весь этот запас будет израсходован.

Р е ш е н и е. Переходим к противоположному событию $\bar{A}$ = {весь боезапас израсходован}. Чтобы произошло событие $\bar{A}$, первые $n-1$ ракет не должны поразить цель:

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = (1-pp_1)^{n-1}; \ \mathrm{P}(A) = 1-(1-pp_1)^{n-1}.$$

2.50. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что после поражения цели в запасе останутся неизрасходованными не менее двух ракет.

Р е ш е н и е. Противоположное событие $\bar{A}$ = {останется менее двух ракет} равносильно тому, что первые $n-2$ ракет не поразили цели:

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = (1-pp_1)^{n-2}; \ \mathrm{P}(A) = 1-(1-pp_1)^{n-2}.$$

2.51. В условиях задачи 2.49 найти вероятность того, что будет израсходовано не более двух ракет.

Р е ш е н и е. Чтобы было израсходовано не более двух ракет, достаточно, чтобы при первых двух выстрелах цель была поражена: вероятность этого равна $1-(1-pp_1)^2$.

2.52. Радиолокационная станция ведет наблюдение за k объектами. За время наблюдения i-й объект может быть потерян с вероятностью p_i $(i=1, 2, \ldots, k)$. Найти вероятности следующих событий:

$A=\{$ни один объект не потерян$\}$;

$B=\{$потеряно не менее одного объекта$\}$;

$C=\{$потеряно не более одного объекта$\}$.

О т в е т. $\mathrm{P}(A)=\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)$; $\mathrm{P}(B)=1-\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)$; $\mathrm{P}(C)=$

$$=\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)+p_1(1-p_2)\ldots(1-p_k)+(1-p_1)\,p_2(1-p_3)\ldots(1-p_k)+$$

$$+\ldots+(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_{k-1})\,p_k.$$

Последнюю вероятность можно записать в виде

$$\mathrm{P}(C)=\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)+\sum_{j=1}^{k}\frac{p_j}{1-p_j}\prod_{i=1}^{k}(1-p_i).$$

2.53. Техническое устройство, состоящее из k узлов, работало в течение некоторого времени t. За это время первый узел оказывается неисправным с вероятностью q_1, второй — с вероятностью q_2 и т. д. Наладчик, вызванный для осмотра устройства, обнаруживает и устраняет неисправность каждого узла, если она имеется, с вероятностью p, а с вероятностью $q=1-p$ объявляет узел исправным. Найти вероятность события $A=\{$после осмотра наладчиком хотя бы один узел устройства неисправен$\}$.

Р е ш е н и е. Вероятность i-му узлу быть неисправным после осмотра равна вероятности того, что он стал неисправным за время t, умноженной на вероятность того, что наладчик не обнаружит этой неисправности: $q_i q$. Вероятность того, что это событие случится хотя бы с одним из узлов, равна

$$\mathrm{P}(A)=1-\prod_{i=1}^{k}(1-q_i\,q).$$

2.54. К условиям предыдущей задачи добавляется новое: по истечении времени t с вероятностью Q наладчика не оказывается на месте и устройство пускается в ход без профилактического осмотра. Найти вероятность события $A=\{$после пуска хотя бы один узел устройства неисправен$\}$.

О т в е т. $(1-Q)\left[1-\prod_{i=1}^{k}(1-q_i\,q)\right]+Q\left[1-\prod_{i=1}^{k}(1-q_i)\right]$.

2.55. Передается сообщение, состоящее из n двоичных символов «0» или «1». Каждый из символов с малой вероятностью p искажается (заменяется на противоположный). Для «перестраховки» сообщение передается два раза; если оба сообщения совпали, информация считается правильной. Найти вероятность того, что, несмотря на совпадение сообщений, оба они оказались ошибочными.

Решение. A = {оба сообщения совпадают, но искажены} = {ошибки допущены на одних и тех же местах}. Введем событие B = {оба сообщения одинаковы}. $B = A + C$, где C = {оба сообщения одинаковы и верны}.

$$P(A) = P(B) - P(C).$$

Событие $B = \prod_{i=1}^{n} B_i$, где B_i = {на i-м месте того и другого сообщения стоят знаки либо оба верные, либо оба неверные}.

$$P(B_i) = p^2 + (1-p)^2; \quad P(B) = [p^2 + (1-p)^2]^n; \quad P(C) = [(1-p)^2]^n = (1-p)^{2n}; \quad P(A) = [p^2 + (1-p)^2]^n - (1-p)^{2n}.$$

2.56. Железнодорожный состав состоит из n вагонов, каждый из которых с вероятностью p имеет дефект. Все вагоны осматривают, независимо друг от друга, два осмотрщика; первый из них обнаруживает дефект (если он имеется) с вероятностью p_1, второй — с вероятностью p_2. Если ни в одном из вагонов не обнаружено дефекта, состав отправляется в рейс. Найти вероятность события:

A = {в рейс отправляется состав, в котором имеется хотя бы один дефектный вагон}.

Решение. Рассмотрим один отдельно взятый вагон и событие B = {вагон имеет необнаруженный дефект}. $P(B) = p(1-p_1) \times (1-p_2)$. Отсюда

$$P(A) = 1 - [1 - P(B)]^n = 1 - [1 - p(1-p_1)(1-p_2)]^n.$$

2.57. ЭВМ, в которой подозревается дефект, подвергается тестированию с целью локализации дефекта. Для этого применяется последовательно n тестов: $T_1, T_2, \ldots, T_n$. При обнаружении дефекта тестирование прекращается. Вероятность локализации дефекта при первом тесте равна p_1; условная вероятность локализации дефекта при втором тесте (если при первом он не был локализован) равна p_2; условная вероятность локализации дефекта при i-м тесте (если при первых $i-1$ он не был локализован) равна p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Найти вероятности следующих событий:

A = {проведено не менее трех тестов};
B = {проведено не более трех тестов};
C = {дефект локализован в точности при четвертом тесте};
D = {дефект не локализован после n тестов};
E = {проведены все n тестов}.

Решение. Событие $\overline{A}$ = {проведено менее трех тестов} = $F_1 + F_2$, где

F_1 = {проведен только один тест, неисправность локализована};

F_2 = {первый тест не дал результата, при втором неисправность локализована}.

$$P(F_1) = p_1;\ P(F_2) = (1-p_1)p_2;\ P(\overline{A}) = p_1 + (1-p_1)p_2;$$
$$P(A) = 1 - [p_1 + (1-p_1)p_2].$$

Событие B = {проведено, один, два или три теста} $= F_1 + F_2 + F_3$, где F_3 = {неисправность локализована при третьем тесте}.

$$P(F_3) = (1-p_1)(1-p_2)p_3;\ P(B) = p_1 + (1-p_1)p_2 +$$
$$+ (1-p_1)(1-p_2)p_3; \quad P(C) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_4;$$
$$P(D) = (1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i);\ P(E) = \prod_{i=1}^{n-1}(1-p_i).$$

2.58. На железнодорожной станции пассажиру предоставляется сейф (индивидуальная камера хранения багажа), который открывается только при наборе определенного трехзначного шифра (например, 253, 009, 325 и т. д.). Пассажир набрал шифр, запер сейф и ушел в город. Посторонний человек, не знающий шифра, пытается открыть сейф, выбирая три цифры наугад. Найти вероятности событий:

A = {сейф откроется с первой же попытки};

B = {сейф откроется после k попыток}.

Решение. $P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$. Если делается k попыток, естественно предположить, что неудачные комбинации не повторяются. Перейдем от B к противоположному событию $\overline{B}$ = {все k попыток неудачны}. Тогда

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{999}{1000} \cdot \frac{998}{999} \dots \frac{1000-k+1}{1000-k+2} \cdot \frac{1000-k}{1000-k+1} =$$
$$= 1 - \frac{1000-k}{1000} = \frac{k}{1000}. \tag{2.58}$$

Формула (2.58), разумеется, имеет смысл только при $k < 1000$; при $k \geqslant 1000$ вероятность правильного набора $P(B) = 1$.

2.59. В городе Тбилиси три распространенных языка: грузинский, армянский и русский. Берется группа жителей в составе m человек. Из них m_1 знают только грузинский язык, m_2 — только армянский, m_3 — только русский; m_{12} — грузинский и армянский; m_{13} — грузинский и русский; m_{23} — армянский и русский; m_{123} — все три языка; $m_1 + m_2 + m_3 + m_{12} + m_{13} + m_{23} + m_{123} = m$. Из этой группы случайным образом выбираются двое. Какова вероятность p того, что они смогут разговаривать между собой без помощи переводчика на каком-либо из трех языков?

Решение. Перенумеруем все семь групп жителей и проставим против каждой те языки, которые знают члены группы, обозначая их буквами «г», «а», «р».

I : г (m_1 человек); II : а (m_2 человек); III : р (m_3 человек); IV : г, а (m_{12} человек); V : г, р (m_{13} человек); VI : а, р (m_{23} человек); VII : г, а, р (m_{123} человек).

Чтобы двое могли объясниться, они должны попасть в пару групп, имеющих между собой общий язык. В данном случае проще будет найти вероятность того, что двое не смогут объясниться. Для этого они должны относиться к одной из пар групп: (I, II); (I, III); (I, VI); (II, III); (II, V); (III, IV). Вероятности того, что один из двух выбранных людей относится к одной группе, а второй — к другой, равны:

$$P(I, II)=\frac{2m_1 m_2}{m(m-1)};\ P(I, III)=\frac{2m_1 m_3}{m(m-1)};\ P(I, VI)=\frac{2m_1 m_{23}}{m(m-1)};$$

$$P(II, III)=\frac{2m_2 m_3}{m(m-1)};\ P(II, V)=\frac{2m_2 m_{13}}{m(m-1)};\ P(III, IV)=$$

$$=\frac{2m_3 m_{12}}{m(m-1)}.$$

Складывая эти вероятности и вычитая полученную сумму из единицы, найдем искомую вероятность p:

$$p=1-\frac{2}{m(m-1)}(m_1 m_2+m_1 m_3+m_1 m_{23}+$$

$$+m_2 m_3+m_2 m_{13}+m_3 m_{12}).$$

2.60. Завод выпускает определенного вида изделия; каждое изделие может иметь дефект; вероятность дефекта p. После изготовления изделие осматривается последовательно k контролерами; i-й контролер обнаруживает дефект, если он имеется, с вероятностью p_i ($i = 1, 2, \ldots, k$). В случае обнаружения дефекта изделие бракуется. Определить вероятности событий:

A = {изделие забраковано};

B = {изделие забраковано вторым контролером, но не первым};

C = {изделие забраковано всеми контролерами}.

Ответ.

$$P(A)=p\left[1-\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)\right];\ P(B)=p(1-p_1)p_2;\ P(C)=p\prod_{i=1}^{k}p_i.$$

2.61. Завод изготовляет определенного типа изделия; каждое изделие имеет дефект с вероятностью p. Изделие осматривается одним контролером; он обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1, а если дефект не обнаружен, пропускает изделие в готовую продукцию. Кроме того, контролер может по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефекта; вероятность этого равна α. Найти вероятности следующих событий:

A = {изделие забраковано};

B = {изделие забраковано, но по ошибке};

C = {изделие пропущено в готовую продукцию с дефектом}.

Ответ. $P(A) = pp_1 + (1-p)\alpha$; $P(B) = (1-p)\alpha$; $P(C) = p(1-p_1)$.

2.62. В условиях предыдущей задачи изделие осматривается не одним контролером, а двумя. Вероятности забраковать дефектное изделие для первого и второго контролеров равны соответственно p_1, p_2; вероятности по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефекта,

равны соответственно α_1, α_2. Если хотя бы один контролер бракует изделие, оно идет в брак. Найти вероятности тех же событий.

Ответ. $\mathrm{P}(A) = p[1-(1-p_1)(1-p_2)] + (1-p)[1-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)]$; $\mathrm{P}(B) = (1-p)[1-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)]$; $\mathrm{P}(C) = p(1-p_1)(1-p_2)$.

2.63. Прибор состоит из n блоков (рис. 2.63); выход из строя каждого блока означает выход из строя прибора в целом. Блоки выходят из строя независимо друг от друга. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого блока равна p. Найти надежность P прибора в целом. Какова должна быть надежность p_1 каждого блока для обеспечения заданной надежности P_1 прибора?

Примечание. Здесь и далее на схемах элементы, без которых работа системы невозможна, изображаются как звенья, соединенные «последовательно»; дублирующие друг друга элементы изображаются соединенными «параллельно». Надежность каждого элемента записывается в соответствующем прямоугольнике.

Ответ. $P = p^n$; $p_1 = \sqrt[n]{P_1}$.

Рис. 2.63 *Рис. 2.64*

2.64. Для повышения надежности прибора он дублируется другим точно таким же прибором (рис. 2.64); надежность (вероятность безотказной работы) каждого прибора равна p. При выходе из строя первого прибора происходит мгновенное переключение на второй (надежность переключающего устройства равна единице). Определить надежность P системы двух дублирующих друг друга приборов.

Решение. Отказ системы требует совместного отказа обоих приборов; надежность системы $P = 1-(1-p)^2$.

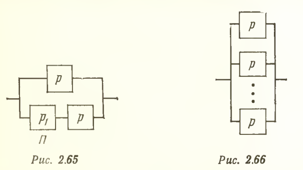


Рис. 2.65 *Рис. 2.66*

2.65. Та же задача, но надежность переключающего устройства $П$, обеспечивающего переключение с отказавшего первого прибора на второй, равна p_1 (рис. 2.65).

Ответ. Надежность системы $P = 1 - (1 - p)(1 - p_1 p)$.

2.66. Для повышения надежности прибора он дублируется $(n-1)$ другими такими же приборами (рис. 2.66); надежность каждого прибора p. Найти надежность P системы. Сколько надо взять приборов, чтобы повысить надежность до заданной P_1?

Ответ. $P = 1 - (1 - p)^n$; $n \geqslant \lg(1 - P_1)/\lg(1 - p)$.

2.67. Та же задача, но для включения каждого дублирующего прибора применяется устройство с надежностью p_1 (рис. 2.67).

Ответ. $P = 1 - (1-p)(1-p_1 p)^{n-1}$; $n \geqslant \dfrac{\lg(1-P_1) - \lg(1-p)}{\lg(1-p_1 p)} + 1$.

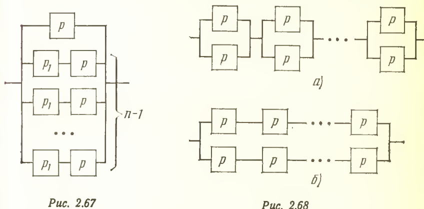


Рис. 2.67

Рис. 2.68

2.68*. Техническая система состоит из n блоков, надежность каждого p. Выход из строя хотя бы одного блока влечет за собой выход из строя всей системы. С целью повышения надежности системы производится дублирование, для чего выделено еще n таких же блоков. Надежность переключающих устройств полная. Определить, какой способ дублирования дает бо́льшую надежность системы: а) дублирование каждого блока (рис. 2.68, a); б) дублирование всей системы (рис. 2.68, $б$).

Решение. Надежность системы, дублированной по способу «а», будет $p_а = [1 - (1 - p)^2]^n$, по способу «б» $p_б = 1 - (1 - p^n)^2$. Покажем, что $p_а > p_б$ при любом $n > 1$ и $0 < p < 1$. Так как

$$p_а = [1 - (1-p)^2]^n = [1 - 1 + 2p - p^2]^n = p^n (2 - p)^n,$$

$$p_б = 1 - (1 - p^n)^2 = 1 - 1 + 2p^n - p^{2n} = p^n (2 - p^n),$$

то достаточно доказать неравенство: $(2 - p)^n > 2 - p^n$. Положим $q = 1 - p$ $(q > 0)$; неравенство примет вид $(2 - 1 + q)^n > 2 - (1 - q)^n$, или $(1 + q)^n + (1 - q)^n > 2$.

Применяя формулу бинома, замечаем, что все отрицательные члены уничтожаются:

$$(1+q)^n + (1-q)^n = 1 + nq + \frac{n(n-1)}{2} q^2 + \ldots +$$

$$+1-nq+\frac{n(n-1)}{2}q^2-\ldots=2+n(n-1)q^2+\ldots>2,$$

что и доказывает требуемое неравенство.

2.69. В технической системе дублированы не все, а только некоторые (наименее надежные) узлы. Надежности узлов проставлены на рис. 2.69. Определить надежность P системы.

Ответ. $P=[1-(1-p_1)^2][1-(1-p_2)^3]p_3p_4[1-(1-p_5)^2]$.

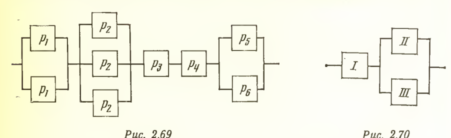


Рис. 2.69 Рис. 2.70

2.70. Прибор состоит из трех узлов. В первом узле n_1 элементов, во втором n_2 и в третьем n_3. Для работы прибора безусловно необходим узел I; два других узла II и III дублируют друг друга (рис. 2.70). Надежность каждого элемента одна и та же и равна p. Выход из строя одного элемента означает выход из строя всего узла. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти надежность прибора P.

Решение. Надежность узла I: $p_{\text{I}}=p^{n_1}$; надежность узла II: $p_{\text{II}}=p^{n_2}$; надежность узла III: $p_{\text{III}}=p^{n_3}$; надежность дублированного узла (II и III): $1-(1-p^{n_2})(1-p^{n_3})$; надежность прибора

$$P=p^{n_1}[1-(1-p^{n_2})(1-p^{n_3})].$$

2.71. Имеется электроприбор, который может выходить из строя (перегорать) только в момент включения. Если прибор включался до сих пор $k-1$ раз и еще не перегорел, то условная вероятность ему перегореть при k-м включении равна Q_k. Найти вероятности следующих событий:

$A=${прибор выдержит не менее n включений};
$B=${прибор выдержит не более n включений};
$C=${прибор перегорит точно при n-м включении}.

Решение. Вероятность события A равна вероятности того, что при первых n включениях прибор не перегорит:

$$\mathrm{P}(A)=\prod_{k=1}^{n}(1-Q_k).$$

Чтобы найти вероятность события B, переходим к противоположному: $\overline{B}=${прибор выдержит более n включений}. Для этого достаточно, чтобы при первых $(n+1)$ включениях прибор не перегорел:

$$\mathrm{P}(\overline{B})=\prod_{k=1}^{n+1}(1-Q_k);\quad \mathrm{P}(B)=1-\prod_{k=1}^{n+1}(1-Q_k).$$

Чтобы прибор перегорел точно при n-м включении, надо, чтобы он не перегорел при первых $n-1$ включениях, а при n-м перегорел:

$$\mathrm{P}(C) = Q_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - Q_k).$$

2.72. Прибор состоит из четырех узлов; два из них (I и II) безусловно необходимы для исправной работы прибора, а два (III и IV) дублируют друг друга (рис. 2.72). Узлы могут выходить из строя только при включении. При k-м включении исправный узел I (независимо от других) выходит из строя с вероятностью $q_{\mathrm{I}}(k)$, узел II — с вероятностью $q_2(k)$, узел III и узел IV с одинаковой вероятностью $q_{\mathrm{III}}(k) = q_{\mathrm{IV}}(k) = q(k)$. Найти вероятности тех же событий A, B, C, что в задаче 2.71.

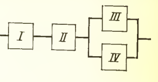


Рис. 2.72

Решение. Задача сводится к предыдущей, если найти условную вероятность Q_k выхода из строя исправного прибора при k-м включении: $Q_k = 1 - [1 - q_{\mathrm{I}}(k)]\,[1 - q_{\mathrm{II}}(k)][1 - (1 - q(k))^2]$ и подставить в уже найденное решение.

2.73. Прибор состоит из трех узлов. При включении прибора с вероятностью p_1 появляется неисправность в первом узле, с вероятностью p_2 — во втором узле, с вероятностью p_3 — в третьем узле. Неисправности в узлах возникают независимо друг от друга. Каждый из трех узлов безусловно необходим для работы прибора. Для того чтобы узел отказал, необходимо, чтобы в нем было не менее двух неисправностей. Найти вероятность события

A = {прибор благополучно выдержал n включений}.

Решение. Для осуществления A нужно, чтобы работали все три узла. Вероятность того, что первый узел выдержит n включений, равна вероятности того, что при n включениях в нем окажется не более одной неисправности (0 или 1): $(1 + p_1)^n + np_1(1 - p_1)^{n-1}$. Вероятность того, что все три узла выдержат n включений, равна

$$\mathrm{P}(A) = \prod_{i=1}^{3} [(1 - p_i)^n + np_i(1 - p_i)^{n-1}].$$

2.74. Прибор состоит из трех узлов; один из них безусловно необходим для работы прибора; два других дублируют друг друга. В результате работы устройства в нем появляются неисправности; каждая неисправность с одной и той же вероятностью появляется в любом из элементов, составляющих узлы. Первый узел состоит из n_1 элементов; второй — из n_2 элементов, третий — из n_3 элементов ($n_1 + n_2 + n_3 = n$). При неисправности хотя бы одного элемента узел выходит из строя.

Известно, что в приборе имеется четыре неисправности (в четырех разных элементах). Найти вероятность того, что наличие этих неисправностей делает невозможной работу прибора.

Решение. Событие A = {невозможность работы прибора} распадается на два $A = A_1 + A_2$, где

A_1 = {вышел из строя первый узел};

A_2 = {первый узел не вышел из строя, но второй и третий вышли}.

Чтобы произошло событие A_1, нужно, чтобы хотя бы одна из четырех неисправностей пришлась на первый узел:

$$P(A_1) = 1 - P(\overline{A}_1) = 1 - \frac{n-n_1}{n}\,\frac{n-n_1-1}{n-1}\,\frac{n-n_1-2}{n-2}\,\frac{n-n_1-3}{n-3}.$$

Для определения вероятности события A_2 мы должны вероятность события $\overline{A}_1$ = {первый узел не вышел из строя} умножить на вероятность того, что второй и третий узлы вышли из строя (с учетом, того, что все четыре неисправности приходятся на второй и третий узлы). Последнее событие может осуществиться в трех вариантах: или одна неисправность будет во втором, а три других — в третьем узле, или наоборот: три во втором и одна в третьем; или же во втором и третьем узлах будет по две неисправности.

Вероятность первого варианта

$$C_4^1 \frac{n_2}{n_2+n_3}\,\frac{n_3}{n_2+n_3-1}\,\frac{n_3-1}{n_2+n_3-2}\,\frac{n_3-2}{n_2+n_3-3} = \mathcal{P}_1.$$

Вероятность второго варианта

$$C_4^1 \frac{n_3}{n_2+n_3}\,\frac{n_2}{n_2+n_3-1}\,\frac{n_2-1}{n_2+n_3-2}\,\frac{n_2-2}{n_2+n_3-3} = \mathcal{P}_2.$$

Вероятность третьего варианта

$$C_4^2 \frac{n_2}{n_2+n_3}\,\frac{n_2-1}{n_2+n_3-1}\,\frac{n_3}{n_2+n_3-2}\,\frac{n_3-1}{n_2+n_3-3} = \mathcal{P}_3.$$

Отсюда

$$P(A_2) = [1 - P(A_1)]\,[\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3];\quad P(A) = P(A_1) + P(A_2).$$

2.75. Уникальный прибор, от которого требуется очень высокая надежность, собирается из k деталей $D_1, D_2, \ldots, D_k$. Перед сборкой каждая деталь всесторонне проверяется, и если она окажется высококачественной, включается в прибор, а если нет — заменяется запасным экземпляром, который тоже проверяется. В распоряжении сборщика имеется запас деталей каждого типа: m_i экземпляров детали D_i ($i = 1, \ldots, k$), всего $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ деталей. Если запасных деталей не хватает, сборка откладывается. Вероятность того, что отдельный экземпляр детали D_i окажется высококачественным, равна p_i и не зависит от качества других экземпляров. Найти вероятности следующих событий:

A = {имеющегося запаса деталей достаточно для сборки прибора};

B = {использованы (испытаны и включены в прибор или только испытаны) все имеющиеся детали};

C = {при данном запасе деталей сборщику удастся собрать прибор, и хотя бы одна деталь любого типа останется в запасе}.

Р е ш е н и е. Событие $A = \prod_{i=1}^{k} A_i$, где A_i = {хотя бы один экземпляр детали D_i оказался высококачественным}.

$$P(A_i) = 1-(1-p_i)^{m_i}; \ P(A) = \prod_{i=1}^{k} [1-(1-p_i)^{m_i}].$$

Событие $B = \prod_{i=1}^{k} B_i$, где B_i = {израсходованы все экземпляры детали D_i}. Чтобы имело место событие B_i, нужно, чтобы первые $m_i - 1$ экземпляров детали D_i были невысококачественными:

$$P(B_i) = (1-p_i)^{m_i-1}; \ P(B) = \prod_{i=1}^{k} (1-p_i)^{m_i-1}.$$

Чтобы найти P (C), представим событие A в виде суммы несовместных событий:

$$A = C + F, \tag{2.75}$$

где F = {сборщику удается собрать прибор, но ни одной детали в запасе не остается}; $F = \prod_{i=1}^{k} F_i$, где F_i = {первые $m_i - 1$ экземпляров детали D_i оказались невысококачественными, а m_i-я — высококачественной}.

$$P(F_i) = (1-p_i)^{m_i-1} p_i; \ P(F) = \prod_{i=1}^{k} [(1-p_i)^{m_i-1} p_i].$$

Из формулы (2.75) имеем

$$P(C) = P(A) - P(F) = \prod_{i=1}^{k} [1-(1-p_i)^{m_i}] - \prod_{i=1}^{k} [(1-p_i)^{m_i-1} p_i].$$

2.76. Техническое устройство S состоит из n узлов, каждый из которых в результате эксплуатации в течение времени τ может оказаться в одном из состояний:

s_1 = {полностью исправен};
s_2 = {требует наладки};
s_3 = {требует ремонта};
s_4 = {полностью непригоден}.

$$P(s_1) = p_1, \quad P(s_2) = p_2, \quad P(s_3) = p_3, \quad P(s_4) = p_4;$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Состояния отдельных узлов независимы. Найти вероятности следующих событий:

A = {все узлы полностью исправны};
B = {все узлы требуют наладки};
C = {один узел требует ремонта, остальные — наладки};
D = {хотя бы один узел полностью непригоден};
E = {два узла требуют наладки, один — ремонта, остальные исправны}.

Решение. $P(A) = p_1^n$, $(B) = p_2^n$. Один узел, требующий ремонта, можно выбрать $C_n^1 = n$ способами:

$$P(C) = np_3 p_1^{n-1};\quad P(D) = 1 - (1 - p_4)^n.$$

Два узла, требующих наладки, можно выбрать из n узлов $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ способами; один узел, требующий ремонта, $C_{n-2}^1 = n-2$ способами:

$$P(E) = \frac{n(n-1)}{2}(n-2) p_2^2 p_1^{n-3}.$$

2.77. По каналу связи передается $n = 6$ сообщений, каждое из которых, независимо от других, с вероятностью $p = 0{,}2$ оказывается искаженным. Найти вероятности следующих событий:

C = {ровно два сообщения из 6 искажены},

D = {не менее двух сообщений из 6 искажены}.

Решение. По теореме о повторении опытов [см. формулу (2.0.15)] $P(C) = P_{2,6} = C_6^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 \approx 0{,}197$. По формуле (2.0.18)

$$P(D) = 1 - (P_{0,6} + P_{1,6}) = 1 - (0{,}8^6 + 6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^5) = 1 - (0{,}262 + 0{,}393) = 0{,}345.$$

2.78. По каналу связи передается n сообщений. Каждое из сообщений независимо от других с вероятностью p искажается помехами. Найти вероятности следующих событий:

A = {из n сообщений ровно m будут искажены помехами};

B = {не менее m из n сообщений будут переданы неискаженными};

C = {не более половины всех передаваемых сообщений будут искажены};

D = {все сообщения будут приняты без искажений};

E = {не менее двух сообщений будет искажено}.

Решение. По теореме о повторении опытов [см. формулу (2.0.15)]

$$P(A) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

По формуле (2.0.17), заменяя p на $1 - p$, получаем

$$P(B) = \sum_{k=m}^{n} C_n^k (1-p)^k p^{n-k};\quad P(C) = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$.

$$P(D) = (1-p)^n;$$

то же значение можно получить и по формуле (2.0.15):

$$P(D) = P_{0,n} = C_n^0 p^0 (1-p)^n = 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^n.$$

По формуле (2.0.18) находим

$$P(E) = R_{2,n} = 1 - \sum_{k=0}^{1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1 - [(1-p)^n + np(1-p)^{n-1}] = 1 - (1-p)^{n-1}[1 + (n-1)p].$$

2.79. Техническое устройство S состоит из 5 узлов; каждый узел за время эксплуатации отказывает (выходит из строя) с вероятностью $p = 0{,}4$. Отдельные узлы отказывают независимо друг от друга. Если откажет более трех узлов, устройство не может работать; если откажет 1 узел или 2 узла, оно работает, но с пониженной эффективностью. Найти вероятности событий:

A = {в устройстве не отказал ни один узел};
B = {устройство может работать};
F = {устройство работает с пониженной эффективностью}.

Р е ш е н и е. $\mathrm{P}(A) = 0{,}6^5 \approx 0{,}0778$;

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D),$$

где C = {отказал ровно один узел}; D = {отказали ровно два узла}.

$$\mathrm{P}(C) = P_{1,5} = 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 \approx 0{,}259; \quad \mathrm{P}(D) = P_{2,5} = C_5^2 \cdot 0{,}4^2 \times \times 0{,}6^3 \approx 0{,}346; \quad \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D) \approx 0{,}683; \quad \mathrm{P}(F) = = \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D) \approx 0{,}605.$$

2.80*. Происходит соревнование между k стрелками; каждый из них делает n выстрелов по своей мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для i-го стрелка равна p_i $(i = 1, \ldots, k)$. Выигрывает соревнование тот из стрелков, который имеет больше попаданий, чем каждый из остальных. Найти вероятность того, что среди соревнующихся стрелков будет один (только один), выигравший соревнование.

Р е ш е н и е. Таким одним может быть любой из k стрелков. Найдем вероятность того, что i-й стрелок выиграет соревнование (событие A_i). Это событие может произойти следующими способами: $A_i^{(m)}$ = {i-й стрелок имеет ровно m попаданий, а каждый из остальных— не более чем $m - 1$} $(m = 1, \ldots, n)$.

Вероятность $P_m(i)$ того, что i-й стрелок имеет m попаданий, равна $C_n^m p_i^m q_i^{n-m}$, где $q_i = 1 - p_i$. Обозначим вероятность того, что j-й стрелок имеет не более $m - 1$ попаданий, через $R_m(j)$:

$$R_m(j) = \sum_{s=0}^{m-1} C_n^s p_j^s q_j^{n-s} \quad (m \geqslant 1).$$

Тогда вероятность того, что все остальные стрелки, кроме i-го имеют не более $m - 1$ попаданий, равна

$$R_{m-1}(1)\, R_{m-1}(2) \ldots R_{m-1}(i-1)\, R_{m-1}(i+1) \ldots R_{m-1}(k) = \prod_{j \neq i} R_{m-1}(j).$$

Суммируя полученные вероятности для всех значений m, получаем вероятность того, что i-й стрелок в единственном числе выиграет соревнование:

$$\mathrm{P}(A_i) = \sum_{m=1}^{n} P_m(i) \prod_{j \neq i} R_{m-1}(j) \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Суммируя эти вероятности для всех стрелков, получаем

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{P}(A_i)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{n}P_m(i)\prod_{j\neq i}R_{m-1}(j).$$

2.81. При въезде в новую квартиру в осветительную сеть было включено $2k$ новых электролампочек. Каждая электролампочка в течение года перегорает с вероятностью r. Найти вероятность события $A=${в течение года не менее половины первоначально включенных лампочек придется заменить новыми}.

Ответ. $\mathrm{P}(A)=1-\sum_{m=0}^{k-1}C_{2k}^m r^m(1-r)^{2k-m}$

2.82. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью r (независимо от других) оказывается дефектным. При осмотре дефект, если он имеется обнаруживается с вероятностью p. Для контроля из продукции завода выбирается n изделий. Найти вероятности следующих событий:

A = {ни в одном из изделий не обнаружено дефекта};

B = {среди n изделий ровно в двух обнаружен дефект};

C = {среди n изделий не менее чем в двух обнаружен дефект}.

Решение. Вероятность того, что в одном наугад взятом изделии имеется и обнаружен дефект, равна pr.

$$\mathrm{P}(A)=(1-pr)^n;\ \mathrm{P}(B)=C_n^2(pr)^2(1-pr)^{n-2};\ \mathrm{P}(C)=1-$$
$$-(1-pr)^{n-1}[(1-pr)+npr].$$

2.83. В условиях задачи 2.82 вся контролируемая партия бракуется, если среди n изделий будет обнаружено не менее четырех дефектных. Найти вероятность p того, что вся контролируемая партия будет забракована.

Ответ. $p=\sum_{l=4}^{n}C_n^l(pr)^l(1-pr)^{n-l}$.

2.84. Первый прибор состоит из n_1 узлов, второй из n_2 узлов. Каждый прибор работал в течение времени t. За это время каждый узел первого прибора выходит из строя, независимо от других, с вероятностью q_1, второго — с вероятностью q_2. Найти вероятность p того, что за время t в первом приборе выйдет из строя m_1 узлов, а во втором — m_2 узлов.

Ответ. $p=C_{n_1}^{m_1}q_1^{m_1}(1-q_1)^{n_1-m_1}C_{n_2}^{m_2}q_2^{m_2}(1-q_2)^{n_2-m_2}$.

2.85. Монета бросается m раз. Найти вероятность того, что герб появится не менее k раз и не более l раз ($k\leqslant l\leqslant m$).

Решение. $p=\sum_{i=k}^{l}P_{i,m}=\sum_{i=k}^{l}C_m^i(1/2)^m=(1/2)^m\sum_{i=1}^{l}C_m^i$.

2.86. Прибор, состоящий из k узлов, работал в течение времени t. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого узла за вре-

мя t равна p. По истечении времени t прибор останавливается, техник осматривает его и заменяет узлы, вышедшие из строя. На замену одного узла ему требуется время τ. Найти вероятность P того, что через время 2τ после остановки прибор будет готов для нормальной работы.

Решение. Для этого нужно, чтобы за время t вышло из строя не более двух узлов:

$$P = p^k + k(1-p)p^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}(1-p)^2 p^{k-2}.$$

2.87. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника: 1) три партии из четырех или пять из восьми? 2) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

Решение. 1) A = {выигрыш 3 партий из 4}; B = {выигрыш 5 партий из 8}. $\mathrm{P}(A) = C_4^3 (1/2)^4 = 1/4$; $\mathrm{P}(B) = C_8^5 (1/2)^8 = 7/32$; $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$.

2) C = {выигрыш не менее 3 партий из 4}; D = {выигрыш не менее 5 партий из 8}. $\mathrm{P}(C) = C_4^3 (1/2)^4 + (1/2)^4 = 5/16$; $\mathrm{P}(D) = C_8^5 (1/2)^8 + C_8^6 (1/2)^8 + C_8^7 (1/2)^8 + (1/2)^8 = 93/256$; $\mathrm{P}(D) > \mathrm{P}(C)$.

2.88. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0,2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,3 — шатеном, с вероятностью 0,4 — блондином и с вероятностью 0,1 — рыжим. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятности следующих событий:

A = {в составе группы не меньше четырех блондинов};
B = {в составе группы хотя бы один рыжий};
C = {в составе группы равное число блондинов и шатенов}.

Решение. $\mathrm{P}(A) = 1 - [0{,}6^6 + 6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^5 + 15 \cdot 0{,}4^2 \times 0{,}6^4] \approx 0{,}455$; $\mathrm{P}(B) = 1 - (1-0{,}1)^6 \approx 0{,}468$; $C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3$,

где C_0 = {в группе нет ни блондинов, ни шатенов};
C_1 = {в группе по одному блондину и шатену, а остальные — ни то, ни другое};
C_2 = {в группе по два блондина и шатена, а остальные — ни то, ни другое};
C_3 = {в группе по три блондина и шатена}.

$$\mathrm{P}(C_0) = (1-0{,}7)^6 \approx 0{,}0007;$$

$$\mathrm{P}(C_1) = \frac{6}{1!\,1!\,4!}\,0{,}3 \cdot 0{,}4\,(1-0{,}7)^4 \approx 0{,}0292;$$

$$\mathrm{P}(C_2) = \frac{6!}{2!\,2!\,2!}\,0{,}3^2 \cdot 0{,}4^2\,(1-0{,}7^2) \approx 0{,}1166;$$

$$\mathrm{P}(C_3) = \frac{6!}{3!\,3!}\,0{,}3^3 \cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}0346;\quad \mathrm{P}(C) \approx 0{,}181.$$

2.89. В течение времени t эксплуатируется N приборов. Каждый прибор имеет надежность p и выходит из строя независимо от других. Найти вероятность $\mathrm{P}(A)$ того, что мастер, вызванный по окончании времени t для ремонта неисправных приборов, не справится со сво-

ей задачей за время τ, если на ремонт каждого неисправного прибора ему требуется время τ_0.

Решение. Событие A равносильно тому, что число вышедших из строя приборов больше, чем $l = [\tau/\tau_0]$, где $[\tau/\tau_0]$ — наибольшее целое число, заключенное в τ/τ_0.

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{m=l+1}^{N} C_N^m (1-p)^m p^{N-m}.$$

2.90. Имеется N неисправных приборов, которые подвергаются испытаниям (тестам) с целью локализации неисправности. Каждый тест независимо от других с вероятностью p приводит к локализации неисправности. Если неисправность локализована, прибор передается на ремонтную станцию, а обследованию подвергаются другие приборы. Если во всех N приборах неисправность локализована, то тесты прекращаются. Всего имеется возможность произвести n тестов ($n > N$). Найти вероятность того, что неисправности во всех N приборах будут локализованы.

Решение. A = {все неисправности локализованы} = {неисправность локализована не менее N раз}.

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{m=N}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

2.91. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что в результате n тестов среди N неисправных приборов останется не менее k приборов с нелокализованными неисправностями ($k < N$).

Решение. Задача равносильна следующей: найти вероятность того, что при n тестах будут локализованы неисправности не больше, чем в $N-k$ приборах.

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{m=0}^{N-k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

2.92*. Прибор состоит из n узлов. Вероятность безотказной работы i-го узла равна p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Для работы прибора требуется безотказная работа всех его узлов. При вычислении вероятности R отказа прибора вероятности p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) приближенно заменяют их средней арифметической:

$$\tilde{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i. \qquad (2.92)$$

Будет ли при этом вычисленное приближенное значение $\tilde{R}$ вероятности R больше или меньше истинного R?

Решение. Точное значение $R = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i$, где $q_i = 1 - p_i$.

Приближенное (по средней вероятности $\tilde{p}$)

$$\tilde{R} = 1 - (1-\tilde{p})^n = 1 - \left[\frac{1}{n}\left(n - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)\right]^n = 1 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} q_i\right]^n.$$

Требуется сравнить величины: $\prod_{i=1}^{n} q_i$ и $\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i\right]^n$. Известно, что среднее геометрическое не равных между собой положительных величин меньше, чем их среднее арифметическое, откуда

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} q_i} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i; \quad \prod_{i=1}^{n} q_i < \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i\right]^n,$$

следовательно, $\widetilde{R} < R$.

2.93. Завод изготовляет изделия, каждое из которых должно подвергаться четырем видам испытаний. Первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью 0,9; второе — с вероятностью 0,95; третье — с вероятностью 0,8 и четвертое — с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что изделие пройдет благополучно:

A = {все четыре испытания};
B = {ровно два испытания (из четырех)};
C = {не менее двух испытаний (из четырех)};

Ответ. $\mathrm{P}(A) \approx 0{,}581$; $\mathrm{P}(B) \approx 0{,}070$; $\mathrm{P}(C) \approx 0{,}994$.

2.94. С целью повышения надежности передачи важного сообщения, состоящего из n символов, каждый из передаваемых символов дублируется (повторяется) m раз. В качестве воспринимаемого символа в пункте приема воспроизводится тот, который повторен не менее k раз из m. Если символ в пункте приема повторяется менее k раз, то такой символ не воспроизводится, считается искаженным. Вероятность p правильной передачи любого символа одна и та же и не зависит от того, правильно ли переданы другие символы. Найти вероятности следующих событий:

A = {переданный отдельный символ в сообщении будет правильно воспринят в пункте приема};
B = {все сообщение будет правильно воспринято в пункте приема};
C = {в сообщении будет искажено не более l символов}.

Решение. Чтобы переданный символ был правильно воспринят в пункте приема, нужно, чтобы он был передан без искажений не менее k раз из m. Вероятность того, что символ будет передан правильно ровно j раз из m [согласно формуле (2.0.15)], равна

$$C_m^j p^j (1-p)^{m-j}.$$

Вероятность того, что символ будет передан правильно не менее k раз из m можно вычислить по формуле (2.0.17):

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{j=k}^{m} C_m^j (1-p)^{m-j} p^j$$

или, при сравнительно небольшом $k < m/2$, по формуле (2.0.18):

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} C_m^j p^j (1-p)^{m-j}.$$

Чтобы все сообщение было правильно воспринято в пункте приема, нужно, чтобы все n символов были воспроизведены правильно:

$$P(B) = [P(A)]^n.$$

Вероятность события C может быть вычислена по формуле

$$P(C) = \sum_{i=0}^{l} [1 - P(A)]^i [P(A)]^{m-i}.$$

ГЛАВА 3

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БЕЙЕСА

3.0. Если об обстановке опыта можно сделать n исключающих друг друга предположений (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и если событие A может появиться только вместе с одной из этих гипотез, то

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i), \tag{3.0.1}$$

где $P(H_i)$ — вероятность гипотезы H_i; $P(A \mid H_i)$ — условная вероятность события A при этой гипотезе. Формула (3.0.1) называется *формулой полной вероятности.*

Если до опыта вероятности гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ были равны $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, а в результате опыта произошло событие A, то новые (условные) вероятности гипотез вычисляются по формуле

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.0.2}$$

Формула (3.0.2) называется *формулой Бейеса.* Доопытные (первоначальные) вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ называются априорными, а послеопытные $P(H_1 \mid A), P(H_2 \mid A), \ldots, P(H_n \mid A)$ — апостериорными. Формула Бейеса дает возможность «пересмотреть» возможности гипотез с учетом наблюденного результата опыта.

Если после опыта, давшего событие A, проводится еще один опыт, в результате которого может произойти или нет событие B, то вероятность (условная) этого последнего события вычисляется по формуле полной вероятности, в которую подставлены не прежние вероятности гипотез $P(H_i)$, а новые $P(H_i \mid A)$:

$$P(B \mid A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \mid A) P(B \mid H_i A). \tag{3.0.3}$$

Формулу (3.0.3) иногда называют «формулой для вероятностей будущих событий».

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных; в третьей только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Пусть событие A = {появление белого шара}. Формулируем гипотезы:

H_1 = {выбор первой урны};
H_2 = {выбор второй урны};
H_3 = {выбор третьей урны}.

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}; \quad P(A \mid H_1)=\frac{a}{a+b};$$

$$P(A \mid H_2)=\frac{c}{c+d}; \quad P(A \mid H_3)=1.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{3}\frac{a}{a+b}+\frac{1}{3}\frac{c}{c+d}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1\right).$$

3.2. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора; ненормальный — в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1, в ненормальном 0,7. Найти полную вероятность p выхода прибора из строя за время t.

Решение. $p = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}22$.

3.3. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе имеются три контролера; изделие осматривается только одним контролером (с одинаковой вероятностью первым, вторым или третьим). Вероятность обнаружения дефекта (если он имеется) для i-го контролера равна p_i ($i = 1, 2, 3$). Если изделие не было забраковано в цехе, то оно попадает на ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p_0. Определить вероятности следующих событий:

A = {изделие будет забраковано};
B = {изделие будет забраковано в цехе};
C = {изделие будет забраковано в ОТК завода}.

Решение. Так как события B и C несовместны и $A = B + C$, то $P(A) = P(B) + P(C)$. Находим $P(B)$. Для того чтобы изделие было забраковано в цехе, нужно, чтобы оно, во-первых, имело дефект и, во-вторых, этот дефект был обнаружен. Вероятность обнаружения имеющегося дефекта по формуле полной вероятности равна $^1/_3 (p_1 + p_2 + p_3)$; отсюда $P(B) = {^1/_3}\, p\, (p_1 + p_2 + p_3)$.

Аналогично $P(C) = p\,[1 - {^1/_3} (p_1 + p_2 + p_3)]p_0$, или, обозначая $^1/_3 (p_1 + p_2 + p_3) = \bar{p}$, $P(B) = p\bar{p}$, $P(C) = pp_0(1 - \bar{p})$, откуда $P(A) = p\,[\bar{p} + p_0(1 - \bar{p})]$.

3.4. Имеются две урны: в первой a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных. Из первой урны во вторую перекладывают не глядя один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение. Событие A = {появление белого шара}; гипотезы:

H_1 = {переложен белый шар};
H_2 = {переложен черный шар}.

$$P(H_1)=\frac{a}{a+b}; \quad P(H_2)=\frac{b}{a+b}; \quad P(A \mid H_1)=\frac{c+1}{c+d+1};$$

$$P(A \mid H_2)=\frac{c}{c+d+1}; \quad P(A)=\frac{a}{a+b}\,\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}\,\frac{c}{c+d+1}.$$

3.5. В условиях предыдущей задачи из первой урны во вторую перекладывают не один, а три шара (предполагается, что $a \geqslant 3$, $b \geqslant 3$). Найти вероятность того, что из второй урны возьмут белый шар.

Решение. Можно было бы выдвинуть четыре гипотезы:
H_1 = {переложены 3 белых шара};
H_2 = {переложены 2 белых шара и 1 черный};
H_3 = {переложены 1 белый шар и 2 черных};
H_4 = {переложены 3 черных шара},
но проще решить задачу, имея всего две гипотезы:
H_1 = {вынутый из второй урны шар принадлежит первой урне};
H_2 = {вынутый из второй урны шар принадлежит второй урне}.

Так как во второй урне три шара принадлежат первой урне, а $c+d$ — второй, то $P(H_1) = 3/(c+d+3)$, $P(H_2) = (c+d)/(c+d+3)$.

Найдем условные вероятности события A = {появление белого шара из второй урны} при гипотезах H_1 и H_2. Вероятность появления белого шара, принадлежащего первой урне, не зависит от того, вынимается ли этот шар непосредственно из первой урны или после перекладывания во вторую; поэтому

$$P(A \mid H_1)=\frac{a}{a+b}, \quad P(A \mid H_2)=\frac{c}{c+d},$$

откуда

$$P(A)=\frac{3}{c+d+3}\,\frac{a}{a+b}+\frac{c+d}{c+d+3}\,\frac{c}{c+d}.$$

3.6. Имеется n урн, в каждой из которых a белых шаров и b черных. Из первой урны во вторую перекладывают один шар; затем из второй в третью один шар и т. д. Затем из последней урны извлекают один шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Вероятность события A_2 = {извлечение белого шара из второй урны после перекладывания} найдем так же, как в задаче 3.5 (при $c=a$, $d=b$):

$$P(A_2)=\frac{a}{a+b}\,\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\,\frac{a}{a+b+1}=\frac{a}{a+b}.$$

Таким образом, вероятность извлечения белого шара из второй урны после перекладывания будет такова же, как и до перекладывания. Следовательно, такова же будет и вероятность вынуть белый шар из третьей, четвертой и т. д., n-й урны:

$$P(A_n) = a/(a+b).$$

3.7. Приборы одного наименования изготовляются двумя заводами; первый завод поставляет 2/3 всех изделий, поступающих на производство; второй 1/3. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом, равна p_1; второго p_2. Определить полную (среднюю) надежность p прибора, поступившего на производство.

Ответ. $2/3p_1 + 1/3p_2$.

3.8. Имеется две партии однородных изделий; первая партия состоит из N изделий, среди которых n дефектных; вторая партия — из M изделий, среди которых m дефектных. Из первой партии берется случайным образом K изделий, а из второй L изделий ($K < N$; $L < M$); эти $K + L$ изделий смешиваются и образуется новая партия. Из новой смешанной партии берется наугад одно изделие. Найти вероятность того, что изделие будет дефектным.

Решение. Событие A = {изделие будет дефектным}. Гипотезы:

H_1 = {изделие принадлежит первой партии};
H_2 = {изделие принадлежит второй партии}.

$$\mathrm{P}(H_1)=\frac{K}{K+L}; \quad \mathrm{P}(H_2)=\frac{L}{K+L}; \quad \mathrm{P}(A)=\frac{K}{K+L}\,\frac{n}{N}+\frac{L}{K+L}\,\frac{m}{M}.$$

3.9. В условиях предыдущей задачи из новой, смешанной, партии берется не одно изделие, а три. Найти вероятность того, что хотя бы одно изделие из трех окажется дефектным.

Решение. Гипотезы:

H_0 = {все три изделия принадлежат первой партии};
H_1 = {два изделия принадлежат первой партии, а одно — второй};
H_2 = {одно изделие принадлежит первой партии, а два — второй};
H_3 = {все три изделия принадлежат второй партии}.

$$\mathrm{P}(H_0)=\frac{K(K-1)(K-2)}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$\mathrm{P}(H_1)=\frac{3K(K-1)L}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$\mathrm{P}(H_2)=\frac{3KL(L-1)}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$\mathrm{P}(H_3)=\frac{L(L-1)(L-2)}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$\mathrm{P}(A\mid H_0)=1-\frac{(N-n)(N-n-1)(N-n-2)}{N(N-1)(N-2)};$$

$$\mathrm{P}(A\mid H_1)=1-\frac{(N-n)(N-n-1)(M-m)}{N(N-1)M};$$

$$\mathrm{P}(A\mid H_2)=1-\frac{(N-n)(M-m)(M-m-1)}{NM(M-1)};$$

$$\mathrm{P}(A\mid H_3)=1-\frac{(M-m)(M-m-1)(M-m-2)}{M(M-1)(M-2)},$$

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(H_0)\,\mathrm{P}(A\mid H_0)+\mathrm{P}(H_1)\,\mathrm{P}(A\mid H_1)+$$
$$+\mathrm{P}(H_2)\,\mathrm{P}(A\mid H_2)+\mathrm{P}(H_3)\,\mathrm{P}(A\mid H_3).$$

3.10. Имеется два ящика, в которых находятся однотипные изделия; некоторые из них исправны, другие — дефектны. В первом ящике a исправных изделий и b дефектных, во втором — c исправных и d дефектных. Из первого ящика во второй перекладывают наугад одно изделие, его смешивают с другими, после чего из второго ящика в первый перекладывают обратно одно наугад выбранное изделие. После всего этого из первого ящика берут наугад одно изделие. Найти вероятность того, что оно будет исправным.

Решение. Гипотезы:

H_1 = {состав изделий в первом ящике не изменился};

H_2 = {в первом ящике одно дефектное изделие заменено исправным};

H_3 = {в первом ящике одно исправное изделие заменено дефектным}.

Событие A = {из первого ящика после перекладываний вынуто исправное изделие}.

$$\mathrm{P}(H_1)=\frac{a}{a+b}\,\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}\,\frac{d+1}{c+d+1};\quad \mathrm{P}(H_2)=\frac{b}{a+b}\,\frac{c}{c+d+1};$$

$$\mathrm{P}(H_3)=\frac{a}{a+b}\,\frac{d}{c+d+1};\quad \mathrm{P}(A)=\left(\frac{a}{a+b}\,\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}\,\frac{d+1}{c+d+1}\right)\frac{a}{a+b}+$$
$$+\frac{b}{a+b}\,\frac{c}{c+d+1}\,\frac{a+1}{a+b}+\frac{a}{a+b}\,\frac{d}{c+d+1}\,\frac{a-1}{a+b}=$$
$$=\frac{a\,(a+b)\,(c+d+1)+bc-ad}{(a+b)^2\,(c+d+1)}=\frac{a}{a+b}+\frac{bc-ad}{(a+b)^2\,(c+d+1)}.$$

Полученное решение показывает, что вероятность вынуть исправное изделие не изменится, если доли исправных и дефектных изделий в обеих урнах одинаковы: $c/a=d/b$, т. е. $bc-ad=0$.

3.11. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше m $(m>0)$?

Решение. Событие A состоит в том, что разность между первым вынутым числом k и вторым вынутым числом l будет не меньше m (т. е. $k-l\geqslant m$). Гипотезы H_k = {первым вынуто число k} $(k=m+1, \ldots, n)$.

$$\mathrm{P}(H_k)=1/n;\quad \mathrm{P}(A\mid H_k)=(k-m)/(n-1);$$

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{k-m}{n\,(n-1)}=\frac{1}{n\,(n-1)}\,[1+2+\ldots+(n-m)]=$$
$$=\frac{(n-m)\,(n-m+1)}{2n\,(n-1)}.$$

3.12. Из N стрелков можно выделить четыре группы: a_1 отличных стрелков, a_2 хороших, a_3 посредственных и a_4 плохих. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для стрелка i-й группы равна p_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Вызываются наугад два стрелка и стреляют по одной и той же мишени. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Решение. Событие A = {хотя бы одно попадание в мишень}. Гипотезы H_i = {первым вызван стрелок i-й группы} ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$\mathrm{P}(H_i) = \frac{a_i}{N}, \quad \mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{4} \frac{a_i}{N} \mathrm{P}(A \mid H_i),$$

где $\mathrm{P}(A \mid H_i)$ снова находим по формуле полной вероятности при четырех гипотезах о том, какой стрелок был вызван вторым:

$$\mathrm{P}(A \mid H_i) = \frac{a_i - 1}{N-1}\,[1 - (1-p_i)^2] + \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{N-1}\,[1 - (1-p_i)(1-p_j)].$$

3.13. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помех, то за один цикл обзора станция обнаруживает его с вероятностью p_0; если применяет — с вероятностью $p_1 < p_0$. Вероятность того, что во время цикла будут применены помехи, равна p и не зависит от того, как и когда применялись помехи в остальных циклах. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы один раз за n циклов обзора.

Решение. Полная вероятность обнаружения за один цикл $(1 - p)p_0 + pp_1$; вероятность хотя бы одного обнаружения за n циклов равна $1 - [1 - (1 - p)p_0 - pp_1]^n$.

3.14. Работает диагностическая машина, в которую вводятся результаты n анализов, взятых у больного. Каждый анализ (независимо от других) с вероятностью p может оказаться ошибочным. Вероятность $\mathcal{P}$ правильного диагноза есть неубывающая функция числа m верных анализов: $\mathcal{P} = \varphi(m)$. За время τ работы машины был поставлен диагноз k больным. Найти вероятность события A = {хотя бы одному больному поставлен ошибочный диагноз}.

Решение. Рассмотрим событие B = {отдельному больному поставлен ошибочный диагноз}. Сделаем гипотезы о числе безошибочно проведенных анализов:

H_0 = {ни одного безошибочного анализа};

H_1 = {ровно один безошибочный анализ};

. . . .

H_m = {ровно m безошибочных анализов};

. . . .

H_n = {n безошибочных анализов}.

Вероятность события H_m при любом m вычисляется с помощью формулы (2.0.15) (теорема о повторении опытов) при замене p на $1 - p$:

$$\mathrm{P}(H_0)=p^n;\ \mathrm{P}(H_1)=n(1-p)p^{n-1};\ \ldots;$$
$$\mathrm{P}(H_m)=C_n^m(1-p)^m p^{n-m};\ \ldots;\ P(H_n)=(1-p)^n.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{m=0}^{n} C_n^m(1-p)^m p^{n-m}\varphi(m);\ \mathrm{P}(A)=1-[1-\mathrm{P}(B)]^k.$$

3.15. Цех завода производит определенного вида изделия; любое из них с вероятностью p имеет дефект. Каждое изделие осматривается браковщиком, который обнаруживает дефект, если он имеется, с вероятностью p_1 и не обнаруживает — с вероятностью $1-p_1$. Кроме того, иногда браковщик допускает ошибку, бракуя доброкачественное изделие; это происходит с вероятностью p_2. За смену браковщик осматривает N изделий. Найти вероятность R того, что хотя бы одно из них будет квалифицировано им неправильно: или, будучи дефектным, отнесено к доброкачественным, или же наоборот (считается, что результаты осмотра отдельных изделий независимы).

Р е ш е н и е. Гипотезы:

$H_1=$ {изделие имеет дефект}; $H_2=$ {изделие не имеет дефекта}.

Вероятность одному изделию быть квалифицированным неверно по формуле полной вероятности равна

$$\tilde{p}=p(1-p_1)+(1-p)p_2.$$

Вероятность того, что хотя бы одно изделие будет квалифицировано неправильно, равна

$$R=1-(1-\tilde{p})^N.$$

3.16. Группа студентов состоит из a отличников, b хорошо успевающих и c занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается наугад один студент. Найти вероятность события $A=$ {студент получит хорошую или отличную оценку}.

Р е ш е н и е. Гипотезы:

$H_1=$ {вызван отличный студент};
$H_2=$ {вызван хороший студент};
$H_3=$ {вызван слабый студент}.

$$\mathrm{P}(H_1)=\frac{a}{a+b+c};\ \mathrm{P}(H_2)=\frac{b}{a+b+c};\ \mathrm{P}(H_3)=\frac{c}{a+b+c}.$$
$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(H_1)\cdot 1+\mathrm{P}(H_2)\cdot 1+\mathrm{P}(H_3)\frac{1}{3}=\frac{a+b+c/3}{a+b+c}.$$

3.17. В условиях предыдущей задачи вызываются наугад три студента. Найти вероятность того, что они получат отметки отлично, хорошо и удовлетворительно (в любом порядке).

Решение. Событие A = {получение отличной, хорошей и удовлетворительной отметки} возможно только при одной из следующих гипотез:

H_1 = {вызваны один слабый студент, один хороший и один отличник};

H_2 = {вызваны один слабый студент и два хороших};

H_3 = {вызваны два слабых студента и один хороший};

H_4 = {вызваны два слабых студента и один отличник}.

$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{6abc}{N(N-1)(N-2)}; \quad \mathrm{P}(H_2) = \frac{3b(b-1)c}{N(N-1)(N-2)};$$

$$\mathrm{P}(H_3) = \frac{3bc(c-1)}{N(N-1)(N-2)}; \quad \mathrm{P}(H_4) = \frac{3ac(c-1)}{N(N-1)(N-2)}; \quad N = a+b+c.$$

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \mathrm{P}(H_2)\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} +$$

$$+ \mathrm{P}(H_3)\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9} + \mathrm{P}(H_4)\cdot 1\cdot\frac{2}{9}.$$

3.18. В автобусе едут n пассажиров. На следующей остановке каждый из них выходит с вероятностью p; кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир; с вероятностью $1 - p_0$ — один новый пассажир. Найти вероятность того, что когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем будет по-прежнему n пассажиров.

Решение. Событие A = {после остановки снова n пассажиров}. Гипотезы:

H_0 = {не вошел никто};

H_1 = {вошел один пассажир}.

$$\mathrm{P}(H_0) = p_0; \ \mathrm{P}(H_1) = 1 - p_0; \ \mathrm{P}(A|H_0) = (1-p)^n; \ \mathrm{P}(A|H_1) =$$
$$= np(1-p)^{n-1}; \ \mathrm{P}(A) = p_0(1-p)^n + (1-p_0)np(1-p)^{n-1}.$$

3.19. Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов I и II (рис. 3.19) и может случайным образом работать в одном из двух режимов: благоприятном и неблагоприятном. В благоприятном режиме надежность каждого узла равна p_1, в неблагоприятном p_2. Вероятность того, что прибор будет работать в благоприятном режиме, равна P_1, в неблагоприятном $1 - P_1$. Найти полную (среднюю) надежность прибора P.

Ответ. $P = \mathrm{P}_1[1-(1-p_1)^2] + (1+P_1)[1-(1-p_2)^2]$.

3.20. В шкафу стоят однотипные приборы, из которых a новых и b уже бывших в эксплуатации ($a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$). Выбираются наугад два прибора и эксплуатируются в течение какого-то времени, после чего возвращаются в шкаф. Затем вторично выбираются наугад два прибора. Найти вероятность события A = {оба вторично выбранных прибора — новые}.

Р е ш е н и е. Гипотезы:

H_1 = {оба выбранных первый раз прибора были новыми};

H_2 = {оба выбранных первый раз прибора уже были в эксплуатации};

H_3 = {один из выбранных первый раз приборов был новым, а другой уже эксплуатировался}.

$$\mathrm{P}(H_1)=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}; \ \mathrm{P}(H_2)=\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}; \ \mathrm{P}(H_3)=\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)};$$

$$\mathrm{P}(A)=\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)+b(b-1)a(a-1)+2ab(a-1)(a-2)}{(a+b)^2(a+b-1)^2}.$$

Рис. 3.19 Рис. 3.22 Рис. 3.23

3.21. Сообщение может передаваться по каждому из n каналов связи, обладающих разными свойствами (или находящимися в разных состояниях); из них n_1 каналов — в отличном состоянии, n_2 — в хорошем, n_3 — в посредственном и n_4 — в плохом ($n_1+n_2+n_3+n_4=n$). Вероятность правильной передачи сообщения для различных видов каналов соответственно равна p_1, p_2, p_3, p_4. Для повышения его достоверности сообщение передается два раза по двум различным каналам, которые выбираются наугад. Найти вероятность того, что хотя бы по одному из каналов оно будет передано правильно.

Р е ш е н и е. A = {хотя бы одно из сообщений передано правильно}. Сделаем четыре гипотезы о том, по каналу какой группы передано первое из двух сообщений: H_1, H_2, H_3, H_4, где H_i = {первое сообщение передано по каналу i-й группы}; $\mathrm{P}(H_i)=n_i/n$ ($i=1, 2, 3, 4$). По формуле полной вероятности

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{4}\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A \mid H_i).$$

Условная вероятность события A при гипотезе H_i равна

$$\mathrm{P}(A \mid H_i)=\frac{n_i-1}{n-1}\left[1-(1-p_i)^2\right]+\sum_{j\neq i}\frac{n_j}{n-1}\left[1-(1-p_i)(1-p_j)\right].$$

3.22. Прибор состоит из двух узлов I и II (рис. 3.22), безотказная работа которых необходима для работы прибора, и стабилизатора напряжения S, который может быть исправен или неисправен. При

исправном стабилизаторе S надежности узлов I и II равны p_1 и p_2; при неисправном — p_1' и p_2'. Стабилизатор исправен с вероятностью p_S. Найти полную надежность прибора P.

Ответ. $P = p_S p_1 p_2 + (1 - p_S) p_1' p_2'$.

3.23. Условия те же, что и в задаче 3.22, но узлы I и II дублируют друг друга (рис. 3.23).

Ответ. $P = p_S [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] + (1 - p_S) [1 - (1 - p_1')(1 - p_2')]$.

3.24. Имеется n экзаменационных билетов, каждый из которых содержит два вопроса. Экзаменующийся знает ответ не на все $2n$ вопросов, а только на $k < 2n$. Определить вероятность p того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса своего билета или на один вопрос из своего билета и на один (по выбору преподавателя) вопрос из дополнительного билета.

Решение. Гипотезы:

$H_1 = \{$экзаменующийся знает оба вопроса своего билета$\}$;

$H_2 = \{$экзаменующийся из двух вопросов своего билета знает один$\}$.

$$p = \frac{k\,(k-1)}{2n\,(2n-1)} \cdot 1 + \frac{2k\,(2n-k)}{2n\,(2n-1)} \, \frac{k-1}{2n-2}.$$

3.25*. Цель, по которой ведется стрельба, с вероятностью p_1 находится в пункте I, а с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$ в пункте II ($p_1 > 1/2$). В нашем распоряжении имеется n снарядов, каждый из которых может быть направлен в пункт I или в пункт II. Каждый снаряд поражает цель независимо от других с вероятностью p. Какое число снарядов n_1 следует направить в пункт I для того, чтобы поразить цель с максимальной вероятностью?

Решение. Событие $A = \{$поражение цели при направлении n_1 снарядов в пункт I$\}$. Гипотезы:

$H_1 = \{$цель в пункте I$\}$; $P(H_1) = p_1$;

$H_2 = \{$цель в пункте II$\}$; $P(H_2) = 1 - p_1$.

$$P(A) = p_1 [1 - (1-p)^{n_1}] + (1 - p_1) [1 - (1-p)^{n-n_1}].$$

Рассматривая $P(A)$ как функцию непрерывного аргумента n_1, находим

$$\frac{dP(A)}{dn_1} = [-p_1 (1-p)^{n_1} + (1-p_1)(1-p)^{n-n_1}] \ln (1-p);$$

$$\frac{d^2 P(A)}{dn_1^2} = -[p_1 (1-p)^{n_1} + (1-p_1)(1-p)^{n-n_1}] \ln^2 (1-p) < 0,$$

откуда видно, что эта функция имеет единственный максимум в точке

$$\tilde{n}_1 = \frac{n}{2} + \ln \frac{1-p_1}{p_1} \Big/ [2 \ln (1-p)], \text{ где } dP(A)/dn_1 = 0.$$

Заметим, что $\tilde{n}_1 > n/2$ при $p_1 > 1/2$.

Если полученное число $\tilde{n}_1 \leqslant n$ и оно целое, то это и есть искомое число; если оно не целое (но $\leqslant n$), то нужно вычислить $P(A)$ для двух

ближайших целых значений и выбрать то из них, для которого $\mathrm{P}(A)$ больше; если полученное число $\tilde{n}_1$ окажется больше n, то следует направить все n снарядов в пункт I (это случится при $\ln[(1-p_1)/p_1] \leqslant n \ln(1-p)$, т. е. $p_1 \geqslant [1+(1-p)^n]^{-1}$.

3.26. Производится посадка самолета на аэродром. Если позволяет погода, летчик сажает самолет, наблюдая за аэродромом визуально. В этом случае вероятность благополучной посадки равна p_1. Если аэродром затянут низкой облачностью, летчик сажает самолет вслепую по приборам. Надежность (вероятность безотказной работы) приборов слепой посадки равна P. Если приборы слепой посадки сработали нормально, то самолет садится благополучно с той же вероятностью p_1, что и при визуальной посадке. Если же приборы слепой посадки не сработали, то летчик может благополучно посадить самолет с вероятностью $p_1^* < p_1$.

Найти полную вероятность благополучной посадки самолета, если известно, что в $k\%$ всех случаев посадки аэродром затянут низкой облачностью.

Решение. A = {благополучная посадка}. Гипотезы:
H_1 = {низкой облачности нет};
H_2 = {низкая облачность есть}.

$$\mathrm{P}(H_1) = 1 - k/100;\ \mathrm{P}(H_2) = k/100;\ \mathrm{P}(A|H_1) = p_1.$$

$\mathrm{P}(A|H_2)$ находим снова по формуле полной вероятности:

$$\mathrm{P}(A|H_2) = Pp_1 + (1-P)\,p_1^*;\ \mathrm{P}(A) = \left(1 - \frac{k}{100}\right)p_1 + \\ + \frac{k}{100}\,[Pp_1 + (1-P)\,p_1^*].$$

3.27. Имеются три урны: в первой a белых шаров и b черных; во второй c белых шаров и d черных; в третьей k белых шаров (черных нет). Некто выбирает наугад одну урну и вынимает из нее шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой, второй или третьей урны.

Решение. Решаем задачу по формуле Бейеса (3.0.2). Гипотезы:
H_1 = {выбор первой урны};
H_2 = {выбор второй урны};
H_3 = {выбор третьей урны}.
Априори (до опыта) все гипотезы равновероятны: $\mathrm{P}(H_1) = \mathrm{P}(H_2) = \mathrm{P}(H_3) = 1/3$.

Наблюдалось событие A = {появление белого шара}. Находим условные вероятности:

$$\mathrm{P}(A|H_1) = a/(a+b);\ \mathrm{P}(A|H_2) = c/(c+d);\ \mathrm{P}(A|H_3) = 1.$$

По формуле Бейеса апостериорная вероятность того, что шар был вынут из первой урны, равна

$$\mathrm{P}(H_1|A) = \frac{1}{3}\,\mathrm{P}(A|H_1) \Big/ \left[\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} P(A|H_i)\right] =$$

$$=\left(\frac{a}{a+b}\right)\Big/\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1\right).$$

Аналогично

$$\mathrm{P}(H_2 \mid A)=\left(\frac{c}{c+d}\right)\Big/\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1\right);$$

$$\mathrm{P}(H_3 \mid A)=\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1\right)^{-1}.$$

3.28. Прибор состоит из двух узлов; работа каждого узла безусловно необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна p_1, второго p_2. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

Р е ш е н и е. До опыта возможны четыре гипотезы:
H_0 = {оба узла исправны};
H_1 = {первый узел отказал, а второй исправен};
H_2 = {первый узел исправен, а второй отказал};
H_3 = {оба узла отказали}.
Вероятности гипотез:

$$\mathrm{P}(H_0)=p_1p_2;\ \mathrm{P}(H_1)=(1-p_1)p_2;\ \mathrm{P}(H_2)=p_1(1-p_2);$$
$$\mathrm{P}(H_3)=(1-p_1)(1-p_2).$$

Наблюдалось событие A = {прибор отказал}:

$$\mathrm{P}(A|H_0)=0;\ \mathrm{P}(A|H_1)=\mathrm{P}(A|H_2)=\mathrm{P}(A|H_3)=1.$$

По формуле Бейеса

$$\mathrm{P}(H_1 \mid A)=\frac{(1-p_1)\,p_2}{(1-p_1)\,p_2+p_1\,(1-p_2)+(1-p_1)\,(1-p_2)}=\frac{(1-p_1)\,p_2}{1-p_1\,p_2}.$$

3.29. В условиях задачи 3.26 известно, что самолет приземлился благополучно. Найти вероятность того, что летчик пользовался приборами слепой посадки.

Р е ш е н и е. Если летчик пользовался приборами слепой посадки, то, значит, облачность была (гипотеза H_2). По данным задачи 3.26 находим

$$\mathrm{P}(H_2 \mid A)=\frac{\frac{k}{100}\,[Pp_1+(1-P)\,p_1^*]}{\left(1-\frac{k}{100}\right)p_1+\frac{k}{100}\,[Pp_1+(1-P)\,p_1^*]}.$$

3.30. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1; на втором месте — с вероятностью p_2; на третьем — с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удоч-

ку и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

Ответ. $P(H_1 | A) = [p_1(1-p_1)^2] \Big/ \sum_{i=1}^{3} p_i(1-p_i)^2$.

3.31. Завод изготовляет изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1, второй— с вероятностью p_2. Если в цехе изделие не забраковано, оно поступает на ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p. Известно, что изделие забраковано. Найти вероятность того, что оно забраковано: 1) первым контролером; 2) вторым контролером; 3) ОТК завода.

Решение. До опыта возможны четыре гипотезы:
H_0 = {изделие не забраковано};
H_1 = {изделие забраковано первым контролером};
H_2 = {изделие забраковано вторым контролером};
H_3 = {изделие забраковано ОТК завода}.
Наблюдалось событие A = {изделие забраковано}. Гипотеза H_0 нам не нужна, так как $P(A|H_0) = 0$;

$$P(H_1) = pp_1/2; \quad P(H_2) = pp_2/2; \quad P(H_3) = p\,[1-(p_1+p_2)/2]p_3.$$

Вероятности гипотез после опыта:

$$P(H_1 | A) = \frac{p_1}{2p_0+(p_1+p_2)(1-p_3)}; \; P(H_2 | A) = \frac{p_2}{2p_0+(p_1+p_2)(1-p_3)};$$
$$P(H_3 | A) = p_0\,[2-(p_1+p_2)]/[2p_0+(p_1+p_2)(1-p_3)].$$

3.32. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовленных отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: 1) отлично; 2) плохо.

Решение. Гипотезы:
H_1 = {студент подготовлен отлично};
H_2 = {студент подготовлен хорошо};
H_3 = {студент подготовлен посредственно};
H_4 = {студент подготовлен плохо}.
До опыта: $P(H_1) = 0{,}3$; $P(H_2) = 0{,}4$; $P(H_3) = 0{,}2$; $P(H_4) = 0{,}1$.
Событие A = {студент ответил на три вопроса}. $P(A|H_1) = 1$;

$$P(A | H_2) = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \approx 0{,}491; \; P(A | H_3) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} \approx 0{,}105;$$
$$P(A | H_4) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \approx 0{,}009.$$

После опыта:

$$1)\ \mathrm{P}(H_1|A)=\frac{0{,}3\cdot 0{,}1}{0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 0{,}009}\approx 0{,}58;$$

2) $\mathrm{P}(H_4|A) = 0{,}1\cdot 0{,}009/0{,}518 \approx 0{,}002$.

3.33. На вход радиолокационного устройства с вероятностью p поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью $1-p$ — только одна помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью p_1; если только помеха — с вероятностью p_2. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе имеется полезный сигнал.

Ответ. $pp_1/[pp_1+(1-p)p_2]$.

3.34. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно p_1, p_2, p_3. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы P_1, для второй P_2, для третьей P_3. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

Решение. $\mathrm{P}(H_1)=p_1$; $\mathrm{P}(H_2)=p_2$; $\mathrm{P}(H_3)=p_3$; $A=\{$приобрел билет$\}$.

$$\mathrm{P}(A|H_1)=1-P_1;\quad \mathrm{P}(A|H_2)=1-P_2;\quad \mathrm{P}(A|H_3)=1-P_3.$$

$$\mathrm{P}(H_1|A)=\frac{p_1(1-P_1)}{p_1(1-P_1)+p_2(1-P_2)+p_3(1-P_3)}.$$

3.35. Производится один выстрел по плоскости, на которой расположены две цели: I и II (рис. 3.35). Вероятность попадания в цель I равна p_1, в цель II равна p_2. После выстрела получено известие, что попадания в цель I не произошло. Какова теперь вероятность того, что произошло попадание в цель II?

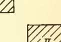


Рис. 3.35

Решение. Гипотезы:
$H_1=\{$попадание в цель I$\}$;
$H_2=\{$попадание в цель II$\}$;
$H_3=\{$непопадание ни в одну из целей$\}$.
Событие $A=\{$непопадание в цель I$\}$;

$\mathrm{P}(H_1)=p_1$; $\mathrm{P}(H_2)=p_2$;
$\mathrm{P}(H_3)=1-(p_1+p_2)$. $\mathrm{P}(A|H_1)=0$; $\mathrm{P}(A|H_2)=1$; $\mathrm{P}(A|H_3)=1$.
По формуле Бейеса

$$\mathrm{P}(H_2|A)=p_2/[p_2+1-(p_1+p_2)]=p_2/(1-p_1).$$

Эту задачу можно решить и без формулы Бейеса:

$$\mathrm{P}(H_2|A)=\mathrm{P}(H_2A)/\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(H_2)/\mathrm{P}(A)=p_2/(1-p_1).$$

3.36. Передача сигналов происходит с вероятностями Q_1, Q_2, Q_3 в одном из трех режимов R_1, R_2, R_3; в каждом из трех режимов сигнал

доходит до адресата неискаженным помехами с вероятностями p_1, p_2, p_3 соответственно. Передача трех сигналов происходила в одном из режимов (каком — неизвестно); из этих сигналов один был искажен помехами, а два другие — нет. Найти апостериорные вероятности того, что передача происходила в первом, втором и третьем режимах.

Решение. Гипотезы:

$H_1 = \{$режим $R_1\}$;
$H_2 = \{$режим $R_2\}$;
$H_3 = \{$режим $R_3\}$.

Априорные вероятности: $P(H_1) = Q_1$; $P(H_2) = Q_2$; $P(H_3) = Q_3$. Событие $A = \{$один сигнал искажен, два другие нет$\}$.

$$P(A|H_i) = 3p_i(1-p_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$P(H_i|A) = Q_i p_i (1-p_i)^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{3} Q_i p_i (1-p_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

3.37. Расследуются причины авиационной катастрофы, о которых можно сделать четыре гипотезы: H_1, H_2, H_3, H_4. Согласно статистике $P(H_1) = 0{,}2$; $P(H_2) = 0{,}4$; $P(H_3) = 0{,}3$; $P(H_4) = 0{,}1$. Обнаружено, что в ходе катастрофы произошло событие $A = \{$воспламенение горючего$\}$. Условные вероятности события A при гипотезах H_1, H_2, H_3 и H_4 согласно той же статистике равны: $P(A|H_1) = 0{,}9$; $P(A|H_2) = 0$; $P(A|H_3) = 0{,}2$; $P(A|H_4) = 0{,}3$. Найти апостериорные вероятности гипотез.

Ответ. $P(H_1|A) = 2/3$; $P(H_2|A) = 0$; $P(H_3|A) = 2/9$; $P(H_4|A) = 1/9$.

3.38. Объект, за которым ведется наблюдение, может находиться в одном из двух состояний: H_1 и H_2; априорные вероятности этих состояний $P(H_1) = 0{,}3$; $P(H_2) = 0{,}7$. Имеется два источника информации, которые приносят разноречивые сведения о состоянии объекта: первый источник сообщает, что объект находится в состоянии H_1, второй — что в состоянии H_2. Первый источник вообще дает правильные сведения о состоянии наблюдаемого объекта в 90% случаев и только в 10% ошибается. Второй источник менее надежен: он сообщает правильные сведения в 70% случаев, а в 30% ошибается. На основе анализа донесений найти новые (апостериорные) вероятности состояний H_1, H_2.

Решение. Событие $A = \{$первый источник сообщает H_1, второй $H_2\}$. Условные вероятности этого события при гипотезах H_1, H_2 равны:

$P(A|H_1) = P$ {первый источник дал верное сообщение, второй ошибся} $= 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}27$;

$P(A|H_2) = P$ {первый источник ошибся, второй дал верное сообщение} $= 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07$.

По формуле Бейеса

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}27}{0{,}3 \cdot 0{,}27 + 0{,}7 \cdot 0{,}07} \approx 0{,}623;$$

$$P(H_2|A) = 1 - P(H_1|A) \approx 0{,}377.$$

3.39. В условиях предыдущей задачи имеются три источника информации, одинаково достойных доверия, дающих верные сообщения в 70% случаев, а в 30% — ошибочные. Два источника сообщили, что объект находится в состоянии H_1, а один — что он находится в состоянии H_2. Найти апостериорные вероятности состояний H_1 и H_2.

Решение. A = {первый и второй источники сообщили H_1, третий H_2}.

$$P(A \mid H_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}147; \; P(A \mid H_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}063;$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}147}{0{,}3 \cdot 0{,}147 + 0{,}7 \cdot 0{,}063} = 0{,}5; \; P(H_2 \mid A) = 0{,}5,$$

т. е. после опыта гипотезы H_1, H_2 одинаково вероятны.

3.40. До опыта о его условиях можно было сделать n несовместных гипотез, образующих полную группу: $H_1, H_2, \ldots, H_n$ с априорными вероятностями: $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. В результате опыта стало известно, что имела место какая-то одна гипотеза из группы $H_1, \ldots, H_k$, а остальные гипотезы невозможны: $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$; $H_{k+1} + \ldots + H_n = \varnothing$. Найти апостериорные вероятности гипотез.

Решение. Наблюдаемое в опыте событие $A = \sum_{i=1}^{k} H_i$. По формуле Бейеса получим

$$P(H_i \mid A) = P(H_i) \Big/ \sum_{i=1}^{k} P(H_i) \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

т. е. *если в результате опыта выяснилось, что возможна только какая-то часть гипотез $H_1, \ldots, H_k$, а остальные невозможны, то для получения апостериорных вероятностей нужно каждую из априорных вероятностей $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ разделить на их сумму.*

3.41. Испытывается прибор, состоящий из двух узлов I и II. Надежности (вероятности безотказной работы за время τ) узлов I и II известны и равны $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}9$. Узлы отказывают независимо друг от друга. По истечении времени τ выяснилось, что прибор неисправен. Найти с учетом этого вероятности гипотез:

H_1 = {неисправен только первый узел};
H_2 = {неисправен только второй узел};
H_3 = {неисправны оба узла}.

Решение. До опыта возможны были не три, а четыре гипотезы, включая H_0 = {исправны оба узла}. Опыт показал, что имеет место одна из гипотез H_1, H_2, H_3; $A = H_1 + H_2 + H_3$. Априорные вероятности этих гипотез:

$$P(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18; \; P(H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08;$$

$$P(H_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02; \quad \sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 0{,}28.$$

Апостериорные вероятности гипотез:

$$P(H_1|A) = 0{,}18/0{,}28 \approx 0{,}643; \; P(H_2|A) \approx 0{,}286; \; P(H_3|A) \approx 0{,}071.$$

3.42. Прибор, характеристики которого даны в задаче 3.41, испытывается в течение времени τ, причем выясняется, что он неисправен. Для локализации неисправности прибор подвергается тестированию с помощью трех тестов: T_1, T_2, T_3; в результате тестирования оказалось, что первые два теста дали положительный результат, а третий — отрицательный, т. е. произошло событие $B = \{++-\}$, где «+» означает положительный результат теста, а «—» отрицательный. Известны условные вероятности положительного результата тестов T_1, T_2, T_3 при гипотезах H_1, H_2, H_3; обозначаем их p_{ij}, где i — номер теста, j — номер гипотезы; $p_{11} = 0{,}4$; $p_{12} = 0{,}6$; $p_{13} = 0{,}9$; $p_{21} = 0{,}5$; $p_{22} = 0{,}4$; $p_{23} = 0{,}6$; $p_{31} = 0{,}7$; $p_{32} = 0{,}6$; $p_{33} = 0{,}3$. Результаты тестирования независимы.

Указать наиболее вероятное из возможных состояний прибора, для чего найти апостериорные вероятности гипотез при условии, что опыт дал события A и B (A = {прибор неисправен} $= H_1 + H_2 + H_3$).

Решение. В качестве априорных вероятностей для учета результатов тестирования возьмем данные предыдущей задачи 3.41:

$$\mathrm{P}(H_1|A) = 0{,}643;\ \mathrm{P}(H_2|A) = 0{,}286;\ \mathrm{P}(H_3|A) = 0{,}071.$$

Вычисляем условные вероятности события B при этих гипотезах:

$$\mathrm{P}(B|H_1) = 0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}1 = 0{,}024;\ \mathrm{P}(B|H_2) = 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}120;\ \mathrm{P}(B|H_3) = 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7 = 0{,}294.$$

По формуле Бейеса

$$\mathrm{P}(H_1|A\cdot B) = \frac{0{,}643\cdot 0{,}024}{0{,}643\cdot 0{,}024 + 0{,}286\cdot 0{,}120 + 0{,}071\cdot 0{,}294} \approx 0{,}298;$$

$$\mathrm{P}(H_2|A\cdot B) \approx 0{,}662;\quad \mathrm{P}(H_3|A\cdot B) \approx 0{,}040.$$

Наиболее вероятное состояние прибора H_2 = {отказал только второй узел}.

3.43. Подбирается набор из n деталей для изготовления прибора; из них то или другое число может оказаться дефектным. Детали поставляются двумя заводами I и II; статистика показывает, что вероятность дефекта в продукции завода I равна p_1, завода II — p_2. Прибор собирается из деталей работы одного и того же завода; в лаборатории, где ведется сборка, имеются три ящика с деталями, два из них содержат изделия I, один — изделия II; ящик, из которого берутся детали для сборки, выбирается наугад. После сборки прибор проходит контроль; если среди n деталей обнаружено не менее m дефектных, прибор бракуется и предъявляется рекламация заводу-изготовителю. Оказалось, что на контроле прибор забракован. Найти вероятность того, что рекламация будет представлена заводу I.

Решение. Гипотезы:

H_1 = {прибор собран из деталей изготовления завода, I},

H_2 = {прибор собран из деталей изготовления завода II}.

Априорные вероятности: $\mathrm{P}(H_1) = 2/3$; $\mathrm{P}(H_2) = 1/3$.

Появилось событие A = {прибор забракован} = {не менее m дефектных изделий из n}.

$$P(A \mid H_1) = \sum_{i=m}^{n} p_1^i (1-p_1)^{n-i};\ P(A \mid H_2) = \sum_{i=m}^{n} p_2^i (1-p_2)^{n-i}.$$

По формуле Бейеса апостериорные вероятности

$$P(H_1 \mid A) = \frac{\frac{2}{3} \sum_{i=m}^{n} p_1^i (1-p_i)^{n-i}}{\frac{2}{3} \sum_{i=m}^{n} p_1^i (1-p_1)^{n-i} + \frac{1}{3} \sum_{i=m}^{n} p_2^i (1-p_2)^{n-i}};$$

$$P(H_2 \mid A) = 1 - P(H_1 \mid A).$$

3.44. Имеются два ящика с однотипными деталями; в первом a исправных деталей и b дефектных, во втором c исправных и d дефектных. Выбирается наугад один ящик и из него вынимается одна деталь. Эта деталь оказалась исправной. Найти вероятность того, что следующая деталь, которую вынем из того же ящика, тоже будет исправной.

Решение. Гипотезы:
$H_1 = \{$выбран первый ящик$\}$;
$H_2 = \{$выбран второй ящик$\}$.

Событие $A = \{$исправная деталь при первом вынимании$\}$.

$$P(H_1) = P(H_2) = 1/2;$$

$$P(H_1 \mid A) = \left(\frac{a}{a+b}\right) \Big/ \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right);\ P(H_2 \mid A) = \left(\frac{c}{c+d}\right) \Big/ \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right).$$

Событие $B = \{$исправная деталь при втором вынимании$\}$.

$$P(B|A) = P(H_1|A) P(B|H_1A) + P(H_2|A) P(B|H_2A).$$

Условная вероятность появления второй исправной детали при условии, что был выбран первый ящик и из него была вынута исправная деталь, равна

$$P(B|H_1A) = (a-1)/(a+b-1);$$

аналогично $P(B|H_2A) = (c-1)/(c+d-1)$.

Отсюда искомая вероятность

$$P(B \mid A) = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right)^{-1} \left[\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)}\right].$$

3.45. Имеется три канала связи, сообщения по которым распределяются случайным образом (с равной вероятностью). Вероятность искажения сообщения при его передаче по первому каналу равна p_1, по второму p_2, по третьему p_3. Выбран какой-то канал и по нему передано k сообщений; ни одно из них не было искажено. Найти вероятность того, что $(k+1)$-е сообщение, переданное по тому же каналу, не будет искажено.

Решение. Гипотезы:
$H_1 = \{$сообщения передавались по первому каналу$\}$;

H_2 = {сообщения передавались по второму каналу};
H_3 = {сообщения передавались по третьему каналу}.

$$\mathrm{P}(A \mid H_1) = (1-p_1)^k;\ \mathrm{P}(A \mid H_2) = (1-p_2)^k;\ \mathrm{P}(A \mid H_3) = (1-p_3)^k$$

$$\mathrm{P}(H_i \mid A) = \frac{{}^1/_3 (1-p_i)^k}{{}^1/_3 [(1-p_1)^k + (1-p_2)^k + (1-p_3)^k]} = \frac{(1-p_i)^k}{(1-p_1)^k + (1-p_2)^k + (1-p_3)^k} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Событие A = {k сообщений не искажено}; B = {$(k+1)$-е сообщение не искажено}.

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{(1-p_1)^{k+1} + (1-p_2)^{k+1} + (1-p_3)^{k+1}}{(1-p_1)^k + (1-p_2)^k + (1-p_3)^k}.$$

3.46. Имеется m партий изделий объемом соответственно по N_1, N_2, ..., N_m штук. В i-й партии n_i дефектных изделий и $N_i - n_i$ доброкачественных ($i = 1, 2, \ldots, m$). Выбирается наугад одна партия и из нее берется для контроля k изделий; все они оказались доброкачественными. Найти вероятность того, что следующие l изделий, взятых из той же партии, также будут доброкачественными.

Решение. Гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_m$, где H_i = {выбрана i-я партия} имеют равные априорные вероятности $\mathrm{P}(H_i) = 1/m$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Условная вероятность наблюденного события A = {все k контрольных изделий доброкачественны} при гипотезе H_i равна

$$\mathrm{P}(A \mid H_i) = C^k_{N_i - n_i} / C^k_{N_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3.46.1)$$

По формуле Бейеса апостериорные вероятности гипотез

$$\mathrm{P}(H_i \mid A) = P(A \mid H_i) \Big/ \sum_{i=1}^{m} P(A \mid H_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3.46.2)$$

Вероятность события B = {следующие l изделий, взятые из той же партии, окажутся доброкачественными} вычисляется по формуле полной вероятности с апостериорными вероятностями гипотез (3.46.2):

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(H_i \mid A)\, \mathrm{P}(B \mid H_i A),$$

где

$$\mathrm{P}(B \mid H_i A) = \frac{N_i - n_i - k}{N_i - k} \frac{N_i - n_i - k - 1}{N_i - k - 1} \cdots \frac{N_i - n_i - k - l + 1}{N_i - k - l + 1} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (3.46.3)$$

Примечание. Формулы (3.46.1) и (3.46.3) справедливы только при условиях $k < N_i - n_i$; $l < N_i - n_i - k$; если они не выполняются, соответствующие вероятности равны нулю.

ГЛАВА 4

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.0. Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие *случайной величины*. Под случайной величиной понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Примеры: а) опыт — четыре выстрела по мишени; случайная величина — число попаданий; б) опыт — эксплуатация ЭВМ; случайная величина — время наработки ЭВМ до первого отказа.

В принятой нами теоретико-множественной трактовке основных понятий теории вероятностей случайная величина X — это некоторая функция элементарного события $\omega : X = \varphi(\omega)$, где $\omega \in \Omega$. Значение этой функции зависит от того, какое элементарное событие ω появилось в результате опыта.

В дальнейшем бы будем случайные величины обозначать большими буквами, а неслучайные — маленькими.

Законом распределения случайной величины называется любое правило, позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной, например, вероятность того, что она примет какое-то значение или попадет в какой-то промежуток. Если случайная величина X имеет данный закон распределения, то про нее говорят, что она «распределена по этому закону» или же «подчиняется этому закону распределения».

Наиболее общей формой закона распределения является *функция распределения*, представляющая собой вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем заданное x:

$$F(x) = \mathrm{P}\{X < x\}. \tag{4.0.1}$$

Функция распределения $F(x)$ для любой случайной величины обладает свойствами: $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, при возрастании x функция $F(x)$ не убывает. Наиболее простой вид имеют законы распределения у так называемых дискретных случайных величин. Случайная величина называется *дискретной*, если множество ее возможных значений конечно или счетно. Эти значения могут быть перечислены, перенумерованы одно за другим.

В рассмотренных выше примерах случайная величина X — число попаданий при четырех выстрелах — дискретна. Ее возможные значения: 0, 1, 2, 3, 4. Вторая случайная величина T — время наработки ЭВМ до первого отказа — недискретна, ее возможные значения непрерывно заполняют какой-то участок оси абсцисс, их множество несчетно.

Простейшей формой закона распределения дискретной случайной величины X является *ряд распределения* — таблица, в верхней строке которой перечислены все значения случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ в порядке их возрастания, а в нижней — соответствующие им вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$:

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & \ldots & x_i & \ldots \\ \hline p_1 & p_2 & \ldots & p_i & \ldots \end{array} \right. , \tag{4.0.2}$$

где $p_i = \mathrm{P}\{X = x_i\}$; $\sum\limits_i p_i = 1$.

Графическое изображение ряда распределений (рис. 4.0.1) называется *многоугольником распределения*.

Функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X есть разрывная, ступенчатая функция (рис. 4.0.2), скачки которой соответствуют возможным значениям $x_1, x_2, \ldots$ случайной величины X и равны вероятностям $p_1, p_2, \ldots$ этих значений; между скачками функция $F(x)$ сохраняет постоянное значение. В точке разрыва функция $F(x)$ равна тому значению, с которым она подходит к точке разрыва слева (на рис. 4.0.2 эти значения помечены точками). Функция $F(x)$ «непрерывна слева», т. е. при подходе к любой точке слева не терпит разрыва, а при подходе справа может терпеть разрыв.

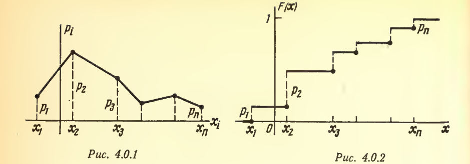


Рис. 4.0.1 *Рис. 4.0.2*

Вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β (включая α) выражается через функцию распределения формулой

$$P\{\alpha \leqslant X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha), \quad (4.0.3)$$

или, в других обозначениях,

$$P\{X \in [\alpha, \beta)\} = F(\beta) - F(\alpha), \quad (4.0.4)$$

где знаком [обозначено то, что точка α включается в состав отрезка от α до β, а знаком) — что точка β в него не включается.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на соответствующие вероятности p_i:

$$M[X] = \sum_i x_i p_i. \quad (4.0.5)$$

Математическое ожидание случайной величины может и не существовать, если соответствующая сумма расходится. В случае, когда надо математическое ожидание случайной величины X обозначить одной буквой, будем писать

$$M[X] = m_x.$$

Центрированной случайной величиной называется разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_x. \quad (4.0.6)$$

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины:

$$D[X] = M[\overset{\circ}{X}{}^2]. \quad (4.0.7)$$

Для дискретной случайной величины X дисперсия вычисляется по формуле

$$D[X] = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i. \quad (4.0.8)$$

В случае, когда надо дисперсию случайной величины X обозначить одной буквой, мы будем обозначать ее D_x.

Средним квадратическим отклонением (или стандартом) случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{D_x} \quad (4.0.9)$$

(подразумевается арифметическое или положительное значение корня).

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k[X] = M[X^k]. \quad (4.0.10)$$

Для дискретной случайной величины X начальный момент вычисляется по формуле

$$\alpha_k[X]=\sum_i x_i^k p_i. \qquad (4.0.11)$$

Центральным моментом k-го порядка случайной велнчины называется математнческое ожидание k-й степени соответствующей центрированной величнны:

$$\mu_k[X]=\mathrm{M}[\overset{\circ}{X}{}^k]. \qquad (4.0.12)$$

Для днскретной случайной величины X центральный момент вычисляется по формуле

$$\mu_k[X]=\sum_i (x_i-m_x)^k. \qquad (4.0.13)$$

Математнческое ожнданне случайной велнчнны X есть ее первый начальный момент, а днсперсня — второй центральный:

$$\mathrm{M}[X]=\alpha_1[X];\ D[X]=\mu_2[X]. \qquad (4.0.14)$$

Центральные моменты выражаются через начальные моменты:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_2[X]=\alpha_2[X]-m_x^2;\\ &\mu_3[X]=\alpha_3[X]-3m_x\alpha_2[X]+2m_x^3;\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (4.0.15)$$

Особенно важна первая из этнх формул, выражающая дисперсию через второй начальный момент:

$$\mathrm{D}[X]=\alpha_2[X]-m_x^2, \qquad (4.0.16)$$

нли в другом напнсаннн

$$\mathrm{D}[X]=\mathrm{M}[X^2]-(\mathrm{M}[X])^2, \qquad (4.0.17)$$

т. е. *дисперсия равна математическому ожиданию квадрата случайной величины минус квадрат ее математического ожидания.*

Индикатором события A называется днскретная случайная величнна U, нмеющая два возможных значения: 0 и 1, равная 0, если событие A не появилось, и еднннце, еслн появилось:

$$U=\begin{cases} 0 & \text{при } \omega\notin A;\\ 1 & \text{при } \omega\in A. \end{cases} \qquad (4.0.18)$$

Ряд распределення индикатора U события A имеет вид

$$U:\left|\begin{array}{c|c} 0 & 1\\ \hline q & p \end{array}\right|,$$

где p — вероятность событня в данном опыте; $q=1-p$.

Математическое ожиданне и днсперсия величины U равны соответственно

$$\mathrm{M}[U]=p;\ \mathrm{D}[U]=pq. \qquad (4.0.19)$$

В ряде задач теории вероятностей пользование ннднкаторамн событий существенно упрощает решенне (см. гл. 7).

Прн вычнсленин чнсловых характернстнк случайных велнчин часто бывает удобно пользоваться формулой полного математнческого ожидания: *если об условиях опыта можно сделать n несовместных гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, полное математическое ожидание случайной величины X может быть вычислено по формуле*

$$\mathrm{M}[X]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(H_i)\,M[X\mid H_i], \qquad (4.0.20)$$

где $\mathrm{M}[X\mid H_i]$ — условное математическое ожидаине величины X при гипотезе H_i.

Формулу полного математического ожидания можно применять при вычислении начальных моментов любого порядка:

$$\alpha_k[X] = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) M[X^k | H_i]. \qquad (4.0.21)$$

Пользоваться этой формулой в принципе можно и при вычислении центральных моментов любого порядка

$$\mu_k[X] = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) M[\mathring{X}^k | H_i], \qquad (4.0.22)$$

но не забывать при этом, что величина $\mathring{X}$ в (4.0.22) должна вычисляться как $\mathring{X} = X - m_x$, где m_x — *безусловное* математическое ожидание случайной величины X, выражаемое формулой (4.0.20), а не условное при гипотезе H_i.

Существует несколько часто встречающихся типов распределений дискретных случайных величин.

1. **Биномиальное распределение.** Случайная величина X называется *распределенной по биномиальному закону*, если ее возможные значения 0, 1, ..., m,..., n, а соответствующие вероятности

$$P_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (4.0.23)$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$; $m = 0, 1, ..., n$. Распределение (4.0.23) зависит от двух параметров: p и n.

Из теоремы о повторении опытов [формула (2.0.15)] следует, что *число X появлений события при n независимых опытах имеет биномиальное распределение*. Для случайной величины X, имеющей биномиальное распределение с параметрами p и n,

$$M[X] = np; \; D[x] = npq, \qquad (4.0.24)$$

где $q = 1 - p$.

2. **Распределение Пуассона.** Дискретная случайная величина X называется *распределенной по закону Пуассона*, если ее возможные значения 0, 1, 2, ..., m, ..., а вероятность события $\{X = m\}$ выражается формулой

$$P_m = P\{X = m\} = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (4.0.25)$$

где $a > 0$. Распределение Пуассона зависит от одного параметра a. Для случайной величины X, распределенной по закону Пуассона,

$$M[X] = D[X] = a. \qquad (4.0.26)$$

Пуассоновское распределение является предельным для биномиального при $p \to 0$, $n \to \infty$, если $np = a = \text{const}$. Этим распределением можно пользоваться приближенно, если производится большое число независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с малой вероятностью.

Пуассоновскому закону распределения подчиняется также количество точек, попадающих в заданную область пространства (одномерного, двумерного или трехмерного), если случайное расположение точек в этом пространстве удовлетворяет некоторым ограничениям.

Одномерный вариант встречается при рассмотрении «потоков событий». *Потоком событий* называется последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени (подробнее см. гл. 10).

Среднее число событий λ, приходящихся на единицу времени, называется *интенсивностью* потока. Величина λ может быть как постоянной, так и переменной: $\lambda = \lambda(t)$.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если вероятность попадания того или иного числа событий на какой-то участок времени не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним участок.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность появления на элементарном участке Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события.

Ординарный поток событий без последействия называется *пуассоновским*. Если события образуют пуассоновский поток, то число X событий, попадающих на любой участок времени $(t_0, t_0 + \tau)$, распределено по закону Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.0.27}$$

где a — математическое ожидание числа точек, попадающих на участок: $a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)\, dt$; $\lambda(t)$ — интенсивность потока.

Если $\lambda = \text{const}$, пуассоновский поток называется стационарным пуассоновским или *простейшим*. Для простейшего потока число событий, попадающих на любой участок времени длины τ, распределено по закону Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$.

Случайным полем точек называется совокупность точек, случайным образом разбросанных на плоскости (или в пространстве).

Интенсивностью (или *плотностью*) *поля* λ называется среднее число точек, попадающих в единицу площади (объема).

Поле точек называется *пуассоновским*, если оно обладает свойствами: 1) вероятность попадания того или иного числа точек в любую область плоскости (пространства) не зависит от того, сколько их попало в любую область, не пересекающуюся с данной; 2) вероятность попадания в элементарную область $\Delta x \Delta y$ двух или более точек пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одной точки (свойство ординарности).

Число X точек пуассоновского поля, попадающих в любую область S плоскости (пространства) распределено по закону Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0, 1, \ldots), \tag{4.0.28}$$

где a — математическое ожидание числа точек, попадающих в область S. Если интенсивность поля $\lambda(x, y) = \lambda = \text{const}$, поле называется *однородным* (свойство, аналогичное стационарности потока событий). При однородном поле с интенсивностью λ имеем $a = s\lambda$, где s площадь (объем) области S. Если поле неоднородно, то $a = \iint\limits_{(S)} \lambda(x, y)\, dxdy$ (для плоскости); $a = \iiint\limits_{(S)} = \lambda(x, y, z)\, dxdydz$ (для пространства).

Для вычислений, связанных с распределением Пуассона, удобно пользоваться таблицами функции $P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ (см. приложение 1), и $R(m, a) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ (см. приложение 2). Последняя функция выражает вероятность того, что случайная величина X, имеющая распределение Пуассона с параметром a, примет значение, не превосходящее m: $R(m, a) = P\{X \leqslant m\}$.

3. **Геометрическое распределение.** Говорят, что случайная величина X имеет *геометрическое распределение*, если ее возможные значения $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$, а вероятности этих значений

$$P_m = q^{m-1} p \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.0.29}$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Вероятности P_m для ряда последовательных значений m образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем q. На практике геометрическое распределение встречается, когда производится ряд независимых «попыток» достигнуть какого-то результата A; при каждой «попытке» резуль-

тат достигается с вероятностью p. Случайная величина X — число «бесполезных» попыток (до первого опыта, в котором появится событие A).

Ряд распределения случайной величины X имеет вид

$$X: \begin{array}{|c|c|c|c|c|c}0 & 1 & 2 & \dots & m & \dots \\ \hline p & qp & q^2p & \dots & q^m p & \dots\end{array}.$$

Математическое ожидание случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, равно

$$M[X] = q/p, \tag{4.0.30}$$

а ее дисперсия

$$D[X] = q/p^2. \tag{4.0.31}$$

Нередко рассматривают случайную величину $Y = X + 1$, равную числу попыток до получения результатов A, включая удавшуюся. Ряд распределения случайной величины Y имеет вид

$$Y: \begin{array}{|c|c|c|c|c|c}1 & 2 & 3 & \dots & m & \dots \\ \hline p & qp & q^2p & \dots & q^{m-1} p & \dots\end{array}, \tag{4.0.32}$$

$$M[Y] = 1/p; \ D[Y] = q/p^2. \tag{4.0.33}$$

Распределение случайной величины $Y = X + 1$ будем называть в дальнейшем «геометрическим распределением, начинающимся с единицы».

4. **Гипергеометрическое распределение.** Случайная величина X с возможными значениями 0, 1, ..., m, ..., a имеет *гипергеометрическое распределение* с параметрами n, a, b, если

$$P_m = P\{X = m\} = C_a^m C_b^{n-m}/C_{a+b}^n \quad (m = 0, 1, \dots, a)^{*)}. \tag{4.0.34}$$

Гипергеометрическое распределение возникает при следующих условиях: имеется урна, в которой a белых и b черных шаров; из нее вынимается n шаров. Случайная величина X — число белых шаров среди вынутых; ее распределение выражается формулой (4.0.34).

Математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение (4.0.34), равно

$$M[X] = na/(a + b), \tag{4.0.35}$$

а ее дисперсия

$$D[X] = \frac{nab}{(a+b)^2} - n(n-1)\left[\frac{a}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right]. \tag{4.0.36}$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Построить функцию распределения индикатора U события A, вероятность которого равна p.

Решение.

$$F(x) = P\{U < x\} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0; \\ q & \text{при } 0 < x \leqslant 1; \\ 1 & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

где $q = 1 - p$ (см. рис. 4.1).

---

*) При пользовании формулой (4.0.34) надо полагать $C_k^r = 0$, если $r > k$.

4.2. Монета бросается 3 раза. Случайная величина X — число выпавших гербов. Построить для нее 1) ряд распределения; 2) многоугольник распределения; 3) функцию распределения. Найти $M[X]$, $D[X]$, σ_x.

Решение. Величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 3$ и $p = 1/2$. Ряд распределения

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array} \right|.$$

Многоугольник распределения приведен на рис. 4.2, *а*, функция распределения — на рис. 4.2, *б*.

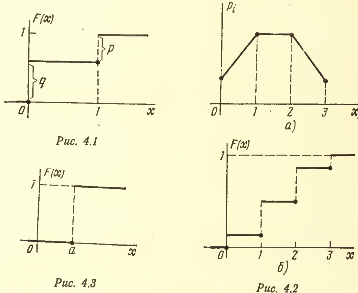


Рис. 4.1

Рис. 4.3

Рис. 4.2

4.3. Рассматривая неслучайную величину a как частный случай случайной, построить для нее 1) ряд распределения; 2) функцию распределения; 3) найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Ответ. 1) $a: \left| \frac{a}{1} \right|$; 2) функция распределения приведена на рис. 4.3; 3) $M[a] = a$; $D[a] = 0$.

4.4. К случайной величине X прибавили постоянную, неслучайную величину a. Как от этого изменяются ее характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение; 4) второй начальный момент?

Ответ. 1) прибавится слагаемое a; 2) не изменится; 3) не изменится; 4) прибавится слагаемое $a^2 + 2am_x$ (так как $\alpha_2[X] = D[X] + m_x^2$).

4.5. Случайную величину X умножили на a. Как от этого изменятся ее характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение; 4) второй начальный момент?

Ответ. 1) умножится на a; 2) умножится на a^2; 3) умножится на $|a|$; 4) умножится на a^2.

4.6. Монета подбрасывается n раз; рассматривается случайная величина X — число выпавших гербов. Построить ряд распределения этой случайной величины и найти ее характеристики: m_x, D_x, σ_x, $\mu_3[X]$.

Ответ.

X:

0	1	...	m	...	n
$(1/2)^n$	$C_n^1(1/2)^n$	...	$C_n^m(1/2)^n$	...	$(1/2)^n$

$$m_x = n/2; \quad D_x = n/4; \quad \sigma_x = \sqrt{n}/2; \quad \mu_3[X] = 0$$

(так как распределение симметрично относительно $m_x = n/2$).

4.7. Производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p появляется событие A. Написать ряд распределения случайной величины X — числа появлений противоположного A события $\bar{A}$ в n опытах — и найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Ответ.

X:

0	1	...	m	...	n
p^n	$C_n^1 qp^{n-1}$	...	$C_n^m q^m p^{n-m}$	...	q^n

где $q = 1 - p$; $m_x = nq$; $D_x = npq$.

4.8. Производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p появляется событие A. Рассматривается случайная величина R — частота появления события A в n опытах, т. е. отношение числа появлений события A в n опытах к общему числу произведенных опытов n. Написать ряд распределения этой случайной величины; найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Ответ:

R:

0	$1/n$	...	m/n	...	1
q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

где $q = 1 - p$; $m_x = p$; $D_x = pq/n$.

4.9*. Производится n независимых опытов. Вероятность появления события A во всех опытах одна и та же и равна p. Найти наивероятнейшее число m^* появлений события A.

Решение. Определим, при каком условии $m^* = 0$. Если $m^* = 0$, то $q^n > C_n^1 pq^{n-1}$ или $q > np$, откуда $p < 1/(n+1)$. Если $m^* = n$, то $p^n > C_n^1 qp^{n-1}$, $p > nq$, откуда $p > n/(n+1)$.

Рассмотрим случай, когда $0 < m^* < n$; при этом должны выполняться совместно два неравенства:

$$C_n^{m^*} p^{m^*} q^{n-m^*} \geqslant C_n^{m^*+1} p^{m^*+1} q^{n-m^*-1};$$

$$C_n^{m^*} p^{m^*} q^{n-m^*} \geqslant C_n^{m^*-1} p^{m^*-1} q^{n-m^*+1}.$$

Эти два неравенства эквивалентны следующим:

$$(m^* + 1)q \geqslant (n - m^*)p; \quad (n - m^* + 1)p \geqslant m^*q,$$

откуда m^* должно быть целым числом, удовлетворяющим неравенствам

$$(n + 1)p - 1 \leqslant m^* \leqslant (n + 1)p.$$

Можно убедиться в том, что это условие выполняется и в случае $p < 1/(n+1)$ $(m^* = 0)$, и в другом крайнем случае: $p > n/(n+1)$ $(m^* = n)$. Поскольку правая часть на единицу больше левой, то между ними лежит только одно целое число m^*; исключение составляет случай, когда $(n+1)p$ и $(n+1)p-1$ — целые числа. Тогда имеется два невероятнейших значения: $(n+1)p$ и $(n+1)p-1$. Если np — целое число, то $m^* = np$.

4.10. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго p_2. Рассматриваются две случайные величины: X_1 — число попаданий первого стрелка; X_2 — число попаданий второго стрелка и их разность $Z = X_1 - X_2$. Построить ряд распределения случайной величины Z и найти ее характеристики m_Z и D_Z.

Решение. Случайная величина Z имеет три возможных значения: -1, 0 и $+1$.

$$P\{Z = -1\} = P\{X_1 = 0\}\ P\{X_2 = +1\} = q_1 p_2;$$

$$P\{Z = 0\} = P\{X_1 = 0\} P\{X_2 = 0\} + P\{X_1 = 1\} P\{X_2 = 1\} = q_1 q_2 + p_1 p_2;$$

$$P\{Z = 1\} = P\{X_1 = 1\} P\{X_2 = 0\} = p_1 q_2,$$

где $q_1 = 1 - p_1$; $q_2 = 1 - p_2$.

Ряд распределения величины Z имеет вид

Z:	-1	0	1
	$q_1 p_2$	$q_1 q_2 + p_1 p_2$	$p_1 q_2$

$$m_Z = (-1)q_1 p_2 + 0\,(q_1 q_2 + p_1 p_2) + 1 p_1 p_2 = -q_1 p_2 + p_1 q_2 = p_1 - p_2.$$

Дисперсию находим через второй начальный момент [см. (4.0.16)]:

$$\alpha_2[Z] = (-1)^2 \cdot q_1 p_2 + 0^2 \cdot (q_1 q_2 + p_1 p_2) + 1^2 \cdot p_1 q_2 = q_1 p_2 + p_1 q_2 = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2;$$

$$D_Z = \alpha_2[Z] - m_Z^2 = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2 - (p_1 - p_2)^2 = p_1 q_1 + p_2 q_2.$$

4.11. Производится 2 независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Рассматриваются случайные величины: X — разность между числом попаданий и числом

промахов; Y — сумма числа попаданий и числа промахов. Построить для каждой из случайных величин X, Y ряд распределения. Найти их характеристики: m_x, D_x, m_y, D_y.

Решение. Ряд распределения величины X имеет вид

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c} -2 & 0 & 2 \\ \hline q^2 & 2pq & p^2 \end{array} \right|, \text{ где } q=1-p.$$

$$m_x = -2q^2 + 2p^2 = 2(p-q); \quad \alpha_2[X] = 4(q^2+p^2);$$
$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = 8pq.$$

Случайная величина Y фактически не случайна и имеет одно значение 2; ее ряд распределения

$$Y: \left| \begin{array}{c} 2 \\ \hline 1 \end{array} \right|; \ m_y = 2; \ D_y = 0.$$

4.12. В нашем распоряжении имеется n лампочек; каждая из них с вероятностью p имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон и включается ток; при включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. Рассматривается случайная величина X — число лампочек, которое будет испробовано. Построить ее ряд распределения и найти математическое ожидание m_x.

Решение. Ряд распределения величины X имеет вид

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n \\ \hline q & pq & p^2q & \dots & p^{i-1}q & \dots & p^{n-1} \end{array} \right|, \text{ где } q=1-p. \quad (4.12.1)$$

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} ip^{i-1}q + np^{n-1} = q\frac{d}{dp}\left(\frac{1-p^n}{1-p}\right) + np^{n-1} = \frac{1-p^n}{1-p}.$$

4.13. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием $a=3$. Построить многоугольник распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти: 1) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание; 2) вероятность того, что величина X примет положительное значение.

Ответ. 1) 0,423; 2) 0,960.

4.41. При работе ЭВМ время от времени возникают неисправности (сбои). Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{$за двое суток не будет ни одного сбоя$\}$;

$B = \{$в течение суток произойдет хотя бы один сбой$\}$;

$C = \{$за неделю работы машины произойдет не менее трех сбоев$\}$.

Ответ. $P(A) = 0{,}050$; $P(B) = 0{,}777$; $P(C) = 0{,}998$.

4.15. При заданном положении точки разрыва снаряда цель оказывается накрыта однородным пуассоновским полем осколков с интен-

сивностью $\lambda = 2{,}5$ оск/м^2. Площадь проекции цели на плоскость, на которой наблюдается осколочное поле, равна $S = 0{,}8$ м^2. Каждый осколок, попавший в цель, поражает ее с полной достоверностью. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

Ответ. 0,865.

4.16. Та же задача, но каждый осколок, попавший в цель, поражает ее не с полной достоверностью, а с вероятностью 0,6.

Решение. Рассмотрим вместо заданного поля осколков «поле поражающих осколков» с плотностью $\lambda^* = 0{,}6\lambda = 1{,}5$ пор. оск./м^2. Математическое ожидание числа поражающих осколков, попавших в цель, будет $a^* = \lambda^* S = 1{,}2$ пор. оск; отсюда вероятность поражения $R_1 = 1 - e^{-a^*} = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$.

4.17. Электронная лампа работает исправно в течение случайного времени T; после отказа ее немедленно заменяют новой. Поток отказов — простейший, с интенсивностью μ. Найти вероятности следующих событий: A = {за время τ лампу не придется заменять}; B = {лампу придется заменять ровно три раза}; C = {лампу придется заменять не менее трех раз}.

Решение. Математическое ожидание числа отказов X за время τ равно $a = \mu\tau$.

$$P(A) = P_0 = e^{-\mu\tau};\quad P(B) = P_3 = \frac{(\mu\tau)^3}{3!} e^{-\mu\tau};\quad P(C) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 1 - e^{-\mu\tau}[1 - \mu\tau - 0{,}5(\mu\tau)^2].$$

4.18. Техническое устройство состоит из трех узлов; в первом узле n_1 элементов, во втором n_2 элементов, в третьем n_3 элементов. Первый узел безусловно необходим для работы устройства; второй и третий дублируют друг друга. Потоки отказов элементов — простейшие; для элемента, входящего в первый узел, интенсивность потока отказов равна λ_1, во второй или третий узел λ_2. Первый узел выходит из строя, если в нем отказало не менее двух элементов. Второй узел (так же, как и дублирующий его третий) выходит из строя при отказе хотя бы одного элемента. Для выхода из строя устройства в целом достаточно, чтобы отказал первый узел или второй и третий вместе. Найти вероятность того, что за время τ устройство выйдет из строя.

Решение. Вероятность выхода из строя одного элемента первого, второго или третьего узла за время τ равна соответственно

$$p_1 = 1 - e^{-\lambda_1\tau};\quad p_2 = p_3 = 1 - e^{-\lambda_2\tau}.$$

Вероятность выхода из строя первого узла за время τ равна

$$\mathcal{P}_1 = 1 - (1 - p_1)^{n_1} - n_1 p_1 (1 - p_1)^{n_1 - 1}.$$

Вероятности выхода из строя второго и третьего узлов равны

$$\mathcal{P}_2 = 1 - (1 - p_2)^{n_2};\quad \mathcal{P}_3 = 1 - (1 - p_3)^{n_3}.$$

Вероятность выхода из строя всего устройства

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + (1 - \mathcal{P}_1)\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3.$$

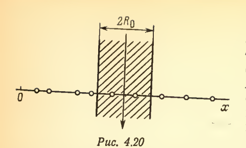


Рис. 4.20

4.19. Искусственный спутник Земли, движущийся по своей орбите в течение n суток, может случайным образом сталкиваться с метеоритами. Метеориты, пересекающие орбиту и сталкивающиеся со спутником, образуют стационарный пуассоновский поток с интенсивностью $\varkappa$ (метеоритов в сутки). Метеорит, попавший в спутник, пробивает его оболочку с вероятностью p_0. Метеорит, пробивший оболочку, с вероятностью p_1 выводит из строя аппаратуру спутника. Найти вероятности следующих событий:

A = {за время полета спутника его оболочка будет пробита};
B = {за время полета спутника его аппаратура будет выведена из строя};
C = {за время полета спутника будет пробита только оболочка спутника, а аппаратура будет действовать}.

Решение. Математическое ожидание числа метеоритов, пробивающих оболочку, $a_0 = \varkappa n p_0$. Математическое ожидание числа метеоритов, пробивающих оболочку и поражающих аппаратуру, $a_1 = \varkappa n p_1 p_0$.

$$P(A) = 1 - e^{-a_0} = 1 - e^{-\varkappa n p_0}; \quad P(B) = 1 - e^{-a_1} = 1 - e^{-\varkappa n p_0 p_1};$$

$$P(C) = P(A) - P(B) = e^{-\varkappa n p_0 p_1} - e^{-\varkappa n p_0}.$$

4.20. Охотники, собравшиеся для охоты на волка, выстраиваются в цепь случайным образом так, что образуют на оси $0x$ простейший поток точек с интенсивностью λ (λ охотников на единицу длины, см. рис. 4.20). Волк бежит перпендикулярно цепи. Любой охотник стреляет по волку только в случае, если волк пробегает от него не дальше чем на расстоянии R_0, и, выстрелив, убивает его с вероятностью p. Определить вероятность того, что волк будет убит, если он не знает, где расположены охотники, и цепь достаточно длинна для того, чтобы волк с достоверностью не пробежал за пределами цепи.

Решение. Волк, бегущий по направлению, указанному стрелкой, обстреливается в случае, если в полосу шириной $2R_0$, связанную с траекторией его перемещения, попадает хотя бы один охотник. Каждый охотник, если ему придется стрелять по волку, с вероятностью p оказывается «удачливым», т. е. убивает волка. Перейдем от «цепочки охотников», имеющей интенсивность λ, к «цепочке удачливых охотников» с интенсивностью $\lambda^* = \lambda p$. Волк будет убит в случае, если в отрезок длиной $2R_0$, случайно брошенный на ось абсцисс, попадет хотя бы один «удачливый» охотник; вероятность этого

$$P(A) = 1 - e^{-2R_0 \lambda p}.$$

4.21. Автомашина проходит технический осмотр и обслуживание. Число неисправностей, обнаруженных во время техосмотра, подчинено закону Пуассона с параметром a. Если неисправностей не обнару-

жено, техническое обслуживание машины продолжается в среднем 2 ч. Если обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится в среднем еще полчаса. Если обнаружено больше двух неисправностей, то машина ставится на профилактический ремонт, где она находится в среднем 4 ч. Определить закон распределения среднего времени T обслуживания и ремонта машины и его математическое ожидание $\mathrm{M}[T]$.

Решение.

$$T: \left|\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 2{,}5 & 3 & 6 \\ \hline e^{-a} & ae^{-a} & \frac{a^2}{2}e^{-a} & 1-e^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right) \end{array}\right|.$$

$$\mathrm{M}[T]=e^{-a}\left(2+2{,}5a+\frac{3}{2}a^2\right)+6\left[1-e^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right)\right]=$$
$$=6-e^{-a}(4+3{,}5a+1{,}5a^2).$$

4.22*. Обследуется группа животных; каждое из них с вероятностью p является больным. Обследование производится путем анализа крови. Если смешать кровь n животных, то анализ этой смеси будет положительным, если среди n животных будет хотя бы одно больное. Требуется обследовать большое число N животных. Предлагается два способа обследования:

1) обследовать всех N животных; в этом случае нужно провести N анализов;

2) вести обследование по группам, смешав сначала кровь группы из n животных; если анализ отрицательный, считать, что все животные группы здоровы, и переходить к следующей группе из n животных; если анализ положительный, обследовать каждое из n животных и после этого переходить к следующей группе ($n > 1$).

Определить, какой способ обследования выгоднее — первый или второй — в смысле минимального среднего числа анализов. Определить, при каком $n = n^*$ для обследования группы животных потребуется в среднем наименьшее число анализов.

Решение. Случайная величина X_n — число анализов на группу из n животных при втором способе — имеет ряд распределения

$$X_n: \left|\begin{array}{c|c} 1 & n+1 \\ \hline q^n & 1-q^n \end{array}\right|; \quad q=1-p.$$

Среднее число анализов на группу из n животных при втором способе будет

$$\mathrm{M}[X_n] = q^n + (n+1)(1-q^n) = n(nq^n-1).$$

При первом способе на группу из n животных приходится n анализов. Очевидно, при $nq^n < 1$ первый способ выгоднее второго, а при $nq^n > 1$ второй способ выгоднее первого.

Установим, при каком q второй способ становится выгоднее и каково при этом будет оптимальное значение $n = n^*$. Из неравенства $nq^n > 1$ вытекает $q > 1/\sqrt[n]{n}$, а из последнего $q > 0{,}694$, так как минимум $1/\sqrt[n]{n}$ для целых n достигается при $n = 3$. Предположим, что $q > 0{,}694$, и найдем то значение $n = n^*$, которое обращает в минимум среднее количество анализов, приходящееся на одно животное:

$$R_n = \mathrm{M}\,[X_n]/n = 1 - q^n + 1/n.$$

Для этого надо найти наименьший положительный корень уравнения

$$dR_n/dn = -q^n \ln q - 1/n^2 = 0,$$

взять ближайшие к нему два целых числа и прямой подстановкой их в R_n выбрать из них оптимальное n^*. Уравнение $-q^n \ln q = 1/n^2$ подстановкой $-\ln q = a$, $an = x$ приводится к уравнению $x^2 e^{-x} = a$ ($a = -\ln q < \ln 3/3 = 0{,}366$). Последнее уравнение при малых a (и, значит, малых $p = 1 - q$) имеет решение $x \approx \sqrt{a}$, откуда $n^* \approx 1/\sqrt{a}$. При не малых a непосредственное сравнение величин R_2, R_3 и R_4 позволяет сделать вывод, что всегда $R_3 < R_2$ и что $R_3 < R_4$ при $0{,}694 < q < 0{,}876$; следовательно, при $0{,}694 < q < 0{,}876$ оптимальное $n^* = 3$. Можно показать, что при $q > 0{,}889$ ($p < 0{,}111$) хорошее приближение дает формула $n^* \approx 1/\sqrt{p} + 0{,}5$.

4.23. Производится ряд попыток включить двигатель. Каждая попытка заканчивается успехом (включением двигателя) независимо от других с вероятностью $p = 0{,}6$. Каждая попытка занимает время τ. Найти распределение общего времени T, которое потребуется для запуска двигателя, его математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Число произведенных попыток X есть величина, распределенная по геометрическому закону, начинающемуся с единицы (4.0.32); $T = X\tau$ имеет распределение

$$T: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \tau & 2\tau & 3\tau & \ldots & m\tau & \ldots \\ \hline p & qp & q^2 p & \ldots & q^{m-1} p & \ldots \end{array} \right. ;$$

$\mathrm{M}\,[T] = \tau \mathrm{M}\,[X] = \tau/p$; $\mathrm{D}\,[T] = \tau^2 \mathrm{D}\,[X] = \tau^2 q/p^2 \quad (q = 1 - p)$.

4.24. В условиях предыдущей задачи попытки зависимы и p_i — вероятность включения двигателя после $i - 1$ неудачных попыток — есть некоторая функция i : $p_i = \varphi(i)$. Найти распределение случайной величины $T = \tau X$.

Ответ.

$$T: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \tau & 2\tau & 3\tau & \ldots & m\tau & \ldots \\ \hline p_1 & q_1 p_2 & q_1 q_2 p_3 & \ldots & \prod\limits_{i=1}^{m-1} q_i p_m & \ldots \end{array} \right. ,$$

где $q_i = 1 - p_i$.

4.25. При сборке прибора повышенной надежности, состоящего из однородных деталей, каждая деталь подвергается всесторонним испытаниям, в результате которых она либо признается доброкачественной (с вероятностью p) либо выбраковывается (с вероятностью $q = 1 - p$). Детали оказываются принадлежащими к той или другой категории независимо друг от друга. Запас деталей практически неограничен. Отбор деталей и их испытания ведутся до тех пор, пока не будет набрано k высококачественных деталей. Случайная величина X — число выбракованных деталей. Найти распределение случайной величины X: $P_m = \mathrm{P}\{X = m\}$.

Решение. Возможные значения случайной величины X : 0, 1, ..., m, ... Находим их вероятности:

$P_0 = \mathrm{P}$ {первые k деталей доброкачественны} $= p^k$;

$P_1 = \mathrm{P}$ {среди первых k деталей одна выбракована, $(k+1)$-я деталь доброкачественна} $= C_k^1 q^1 p^{k-1} p = C_k^1 q^1 p^k$;

. . . .

$P_m = \mathrm{P}$ {среди первых $k + m - 1$ деталей m выбракованы, $(m + k)$-я деталь доброкачественна} $= C_{k+m-1}^m q^m p^k$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

4.26. Две случайные величины X, Y независимо друг от друга принимают значения 0 или 1. Их ряды распределения заданы:

$$X: \left|\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q_x & p_x \end{array}\right|; \quad Y: \left|\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q_y & p_y \end{array}\right|.$$

Построить ряды распределения: 1) их суммы $Z = X + Y$; 2) их разности $U = X - Y$; 3) их произведения $V = XY$.

Решение. 1) Случайная величина Z имеет три возможных значения: 0; 1 и 2.

$$\mathrm{P}\{Z = 0\} = \mathrm{P}\{X = 0, Y = 0\} = q_x q_y;$$

$$\mathrm{P}\{Z = 1\} = \mathrm{P}\{X = 1, Y = 0\} + \mathrm{P}\{X = 0, Y = 1\} = \\ = p_x q_y + q_x p_y;$$

$$\mathrm{P}\{Z = 2\} = \mathrm{P}\{X = 1, Y = 1\} = p_x p_y;$$

$$Z: \left|\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline q_x q_y & p_x q_y + q_x p_y & p_x p_y \end{array}\right|.$$

Аналогично находим

$$U: \left|\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline q_x p_y & p_x p_y + q_x q_y & p_x q_y \end{array}\right|; \quad V: \left|\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q_x q_y + p_x q_y + q_x p_y & p_x p_y \end{array}\right|.$$

4.27. Случайная величина X имеет ряд распределения

X:	1	2	4
	0,5	0,2	0,3

Построить ряд распределения случайной величины $Y = 1/(3 - X)$.
Ответ.

Y:	-1	0,5	1
	0,3	0,5	0,2

4.28. Случайная величина X имеет ряд распределения

X:	-2	-1	0	1	2
	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

Построить ряд распределения ее квадрата: $Y = X^2$.
Ответ:

Y:	0	1	4
	0,2	0,5	0,3

4.29. При передаче сообщения по радиоканалу наблюдаются помехи, препятствующие декодированию сообщения; с вероятностью p сообщение не удается декодировать. Сообщение передается до тех пор, пока оно не будет декодировано. Продолжительность передачи сообщения равна 2 мин. Найти: 1) математическое ожидание времени T, которое уйдет на передачу сообщения; 2) вероятность того, что на передачу сообщения понадобится время, большее чем t_0, имеющееся в нашем распоряжении.

Решение. 1) Случайная величина X — число «попыток» передать сообщение — имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы; $T = 2X$ мин. Распределение случайной величины T будет

T:	2	4	6	...	$2m$	...
	q	pq	p^2q	...	$p^{m-1}q$	...

$$2)\ \mathrm{P}\{T > t_0\} = \sum_{m=[t_0/2]+1}^{\infty} p^{m-1}q = q \sum_{m=[t_0/2]+1}^{\infty} p^{m-1}, \qquad (4.29)$$

где $[t_0/2]$ — наибольшее целое число, содержащееся в $t_0/2$. Суммируя геометрическую прогрессию (4.29), имеем

$$\mathrm{P}\{T > t_0\} = \frac{q}{1-q} p^{[t_0/2]+1} = qp^{[t_0/2]}.$$

4.30. Дискретная случайная величина X имеет распределение

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \right|.$$

Случайная величина Z есть минимальное из двух чисел — значения случайной величины X и числа $a: Z = \min\{X, a\}$, где $x_1 \leqslant a \leqslant x_n$. Найти распределение случайной величины Z.

Решение. По определению

$$Z = \begin{cases} X & \text{при } X \leqslant a; \\ a & \text{при } X > a. \end{cases}$$

Распределение случайной величины Z совпадает с распределением случайной величины X для тех значений $x_1, x_2, \dots$, которые меньше или равны a; $P\{Z = a\}$ вычисляется как единица минус сумма всех остальных вероятностей:

$$P\{Z = a\} = 1 - \sum_{x_i \leqslant a} p_i.$$

4.31. Распределение дискретной случайной величины X есть

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{array} \right|.$$

Найти распределение случайной величины $Z = \min\{X, 4\}$.

Ответ. На основе решения предыдущей задачи

$$Z: \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 4 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{array} \right|.$$

4.32. Две случайные величины X и Y независимо друг от друга принимают значение согласно рядам распределения:

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{array} \right|;$$

$$Y: \left| \begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 4 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{array} \right|.$$

Построить ряд распределения случайной величины $Z = \min\{X, Y\}$.

Решение. $P\{Z = 0\} = P\{X = 0\} = 0{,}2$;

$$P\{Z = 1\} = P\{X = 1\} + P\{Y = 1, X > 1\} = 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}65;$$

$$P\{Z = 2\} = P\{X = 2, Y > 2\} = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0\ 12;$$

$$\mathrm{P}\{Z=3\}=\mathrm{P}\{X=3,\ Y\geqslant 3\}=0{,}1\cdot 0{,}3=0{,}03.$$

$$Z:\left|\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}20 & 0{,}65 & 0{,}12 & 0{,}03 \end{array}\right|.$$

4.33. В условиях предыдущей задачи найти распределение случайной величины $U=\max\{X, Y\}$.

Ответ.

$$U:\left|\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0{,}49 & 0{,}14 & 0{,}27 & 0{,}10 \end{array}\right|.$$

4.34. В ячейке ЭВМ записано n-разрядное двоичное число; каждый знак этого числа, независимо от остальных, принимает с равной вероятностью значение 0 или 1. Случайная величина X — число знаков «1» в записи двоичного числа. Найти вероятности событий $\{X=m\}$, $\{X\geqslant m\}$, $\{X<m\}$.

Решение. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n, $p=1/2$. $\mathrm{P}\{X=m\}=C_n^m(1/2)^n$;

$$\mathrm{P}\{X\geqslant m\}=(1/2)^n\sum_{k=m}^{n}C_n^m;\quad \mathrm{P}\{X<m\}=1-\mathrm{P}\{X\geqslant m\}.$$

4.35. Рассматривается правильная десятичная дробь X с тремя знаками после запятой, причем каждый знак, независимо от других, с одинаковой вероятностью может принимать любое значение 0, 1, ..., 9. Построить ряд распределения случайной величины X и найти ее математическое ожидание.

Решение. Возможные значения случайной величины X : 0,000; 0,001; 0,002; ...; 0,999. Вероятность каждого из них равна $p=(0{,}1)^3=0{,}001$. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

$$X:\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} 0{,}000 & 0{,}001 & 0{,}002 & \ldots & 0{,}999 \\ \hline 0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}001 & \ldots & 0{,}001 \end{array}\right|.$$

$$\mathrm{M}[X]=\sum_{i=0}^{999}x_i p_i=0{,}001\sum_{i=0}^{999}x_i,\ \text{где}\ x_i=i\cdot 0{,}001.$$

Числа x_i образуют арифметическую прогрессию из 1000 членов с разностью 0,001. Суммируя прогрессию, получаем

$$\mathrm{M}[X]=\frac{0+0{,}999}{2}\cdot 1000\cdot 0{,}001=0{,}4995\approx 0{,}5.$$

4.36. Случайная величина Y — случайная двоичная правильная дробь с n знаками после запятой; каждый знак, независимо от других, с вероятностью 1/2 принимает значение «0» или «1». Найти распределение случайной величины Y и ее математическое ожидание $\mathrm{M}[Y]$.

Решение. Аналогично предыдущей задаче, все значения двоичного числа от $0{,}00\ldots0$ до $0{,}11\ldots1$ одинаково вероятны и каждое из

них имеет вероятность $1/2^n$. Математическое ожидание случайной величины Y (в десятичной записи) $M[Y] = 0,5 - 1/2^{n+1}$.

4.37. Передаваемое по каналу связи в двоичном коде сообщение состоит из последовательности знаков «0» и «1», чередующихся с равной вероятностью и независимо друг от друга, например 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, ...

Рассматривается какая-то группа повторяющихся знаков, например: 0, 0, 0 или 1, 1, 1, 1 (или просто 0 или 1, если знаки не повторяются). Берется какая-то из этих групп наугад. Случайная величина X — число знаков в группе. Найти ее распределение, математическое ожидание и дисперсию. Найти $P\{X \geqslant k\}$.

Решение. Случайная величина X имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы:

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & \dots & m & \dots \\ \hline 0,5 & 0,5^2 & \dots & 0,5^m & \dots \end{array} \right|; \quad M[X] = 1/0,5 = 2;$$

$$D[X] = 0,5/0,5^2 = 2; \quad P\{X \geqslant k\} = \sum_{m=k}^{\infty} 0,5^m = 0,5^{k-1}.$$

4.38. В условиях предыдущей задачи $P\{«0»\} = 0,7$; $P\{«1»\} = 0,3$. Найти среднее число знаков $M[X]$ в группе нулей, среднее число знаков $M[Y]$ в группе единиц и полное среднее число знаков $M[Z]$ в наугад выбранной группе знаков. Найти дисперсии $D[X]$, $D[Y]$, $D[Z]$.

Решение. $M[X] = 1/0,7 = 10/7$; $M[Y] = 1/0,3 = 10/3$. По формуле полного математического ожидания находим $M[Z] = 0,7 \cdot \frac{10}{7} + 0,3 \cdot \frac{10}{3} = 2$, т. е. то же, что и в предыдущей задаче. $D[X] = 0,3^2/0,7 \approx 0,128$; $D[Y] = 0,7^2/0,3 \approx 1,633$.

Чтобы найти $D[Z]$, сначала найдем $\alpha_2[Z] = M[Z^2]$ по формуле полного математического ожидания [см. (4.0.20)]*):

$$\alpha_2[Z] = 0,7\alpha_2[X] + 0,3\,\alpha_2[Y], \text{ где } \alpha_2[X] = D[X] + (M[X])^2 \approx$$
$$\approx 2,66; \ \alpha_2[Y] = D[Y] + (M[Y])^2 \approx 18,9; \text{ тогда } \alpha_2[Z] \approx 7,53;$$
$$D[Z] = \alpha_2[Z] - (M[Z])^2 \approx 3,53,$$

т. е. дисперсия по сравнению с предыдущей задачей увеличилась.

Вероятность $P\{X \geqslant k\}$ находим по формуле полной вероятности с гипотезами: $H_1 = \{$первый знак «0»$\}$, $H_2 = \{$первый знак «1»$\}$:

$$P(H_0) = 0,7; \ P(H_1) = 0,3; \ P\{X \geqslant k | H_0\} = 0,7^{k-1};$$
$$P\{X \geqslant k | H_1\} = 0,3^{k-1}; \text{ тогда } P\{X \geqslant k\} = 0,7 \cdot 0,7^{k-1} +$$
$$+ 0,3 \cdot 0,3^{k-1} = 0,7^k + 0,3^k.$$

*) По формуле полного математического ожидания находим второй начальный момент, но не саму дисперсию (ибо условные математические ожидания при разных гипотезах различны).

4.39. Техническое устройство (ТУ) состоит из m блоков типа I и n блоков типа II. Надежность (вероятность безотказной работы в течение заданного времени τ) каждого блока типа I равна p_1, каждого блока типа II равна p_2. Блоки отказывают (выходят из строя) независимо друг от друга. Для работы ТУ достаточно, чтобы в течение времени τ работали безотказно любые два блока типа I и одновременно с этим любые два блока типа II. Найти вероятность $\mathcal{P}$ безотказной работы ТУ.

Решение. Событие A = {безотказная работа ТУ} есть произведение двух событий:

A_1 = {не менее двух из m блоков типа I работают безотказно};

A_2 = {не менее двух из n блоков типа II работают безотказно}.

Число X_1 работающих безотказно блоков типа I есть случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами m, p_1; событие A_1 состоит в том, что случайная величина X_1 примет значение не менее 2; поэтому

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}\{X_1 \geqslant 2\} = 1 - \mathrm{P}\{X_1 < 2\} = 1 - \mathrm{P}\{X_1 = 0\} -$$
$$- \mathrm{P}\{X_1 = 1\} = 1 - (q_1^m + mq_1^{m-1}p_1) \ (q_1 = 1 - p_1).$$

Аналогично $\mathrm{P}(A_2) = 1 - (q_2^n + nq_2^{n-1}p_2) \quad (q_2 = 1 - p_2)$.

Вероятность безотказной работы устройства

$$\mathcal{P} = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2) = [1 - (q_1^m + mq_1^{m-1}p_1)][1 - (q_2^n + nq_2^{n-1}p_2)].$$

4.40. Прибор применяется (приводится в действие) несколько раз до его выхода из строя (вышедший из строя прибор не восстанавливается). Вероятность того, что, будучи применен k раз, прибор еще не вышел из строя, равна $P(k)$. Функция $P(k)$ задана (см. рис. 4.40). Известно, что прибор выдержал уже n применений. Найти вероятность Q_m того, что он выдержит еще m применений, и математическое ожидание числа X будущих применений.

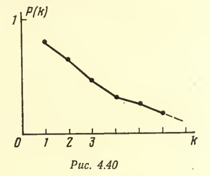


Рис. 4.40

Решение. Q_m есть условная вероятность того, что прибор не выйдет из строя за последующие m применений, при условии, что он не вышел из строя за первые n. По правилу умножения вероятностей $P(n + m) = P(n)Q_m$; откуда

$$Q_m = \frac{P(n+m)}{P(n)}; \quad M[X] = \sum_{m=1}^{\infty} mQ_m.$$

4.41. Рабочий обслуживает n однотипных станков, расположенных на одной линии с интервалами l (рис. 4.41). Время от времени станки (с равной вероятностью и независимо друг от друга) останавливаются и требуют наладки. Закончив наладку одного станка, рабочий остается на месте, пока не остановится какой-либо из станков; тогда он переходит к нему (если вышел из строя тот же станок, он остается на месте). Случайная величина X — расстояние, которое проходит рабочий между двумя наладками. Найти математическое ожидание случайной величины X.

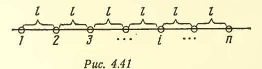


Рис. 4.41

Решение. Применим формулу полного математического ожидания с гипотезами H_i = {рабочий стоит у i-го станка} ($i = 1, \ldots, n$). По условиям задачи все гипотезы равновероятны: $\mathrm{P}(H_1) = \mathrm{P}(H_2) = \ldots = \mathrm{P}(H_n) = 1/n$. Найдем условное математическое ожидание $M[X|H_i]$ для i-й гипотезы. Каждый станок (включая i-й) останавливается с вероятностью $1/n$; отсюда

$$M[X \mid H_i] = \frac{l}{n}\left[\sum_{k=1}^{i-1}(i-k) + \sum_{k=i}^{n}(k-i)\right] = \frac{l}{2n}[i(i-1) + (n-i)(n-i+1)].$$

По формуле полного математического ожидания

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(H_i)\, M[X \mid H_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{l}{2n}[i(i-1) + (n-i)(n-i+1)] = \frac{l}{2n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} i(i-1) + \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)(n-i)\right]. \tag{4.41}$$

Пользуясь известной формулой $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, вычисляем

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

Применяя эту формулу для вычисления обеих сумм в (4.41), убеждаемся, что они равны друг другу и

$$M[X] = \frac{l}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{l}{n^2}\,\frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{l(n^2-1)}{3n}.$$

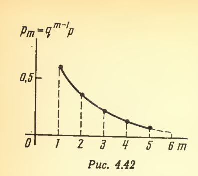


Рис. 4.42

4.42. Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p; опыты ведутся до первого появления события A, после чего прекращаются. Случайная величина X — число произведенных опытов. Построить ее ряд распределения и многоугольник распределения; вывести формулы для ее математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

Решение. Случайная величина X имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы [см. (4.0.32)]. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & \ldots & m & \ldots \\ \hline p & qp & q^2 p & \ldots & q^{m-1} p & \ldots \end{array} \right.,$$

где $q = 1 - p$. Многоугольник распределения для $p = 0{,}6$ показан на рис. 4.42.

$$\mathrm{M}[X] = \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} p = p \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}.$$

Замечаем, что mq^{m-1} есть не что иное, как производная выражения q^m по q; отсюда

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^m = \frac{d}{dq} \sum_{m=1}^{\infty} q^m.$$

Последняя сумма представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q; суммируя ее, находим

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{1}{(1-q)^2}; \tag{4.42}$$

откуда $\mathrm{M}[X] = p/(1-q)^2 = 1/p$.

Дисперсию случайной величины X найдем через ее второй начальный момент

$$\alpha_2[X] = \mathrm{M}[X^2] = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} p.$$

Для ее вычисления умножим на q ряд (4.42); получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^m = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Дифференцируя этот ряд, имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Умножая это выражение на $p = 1 - q$, получаем $M[X^2] = (1+q)/(1-q)^2$. Дисперсия случайной величины X равна [см. формулу (4.0.17)]

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = (1+q)/(1-q)^2 - 1/(1-q)^2 = q/p^2; \ \sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{q}/p.$$

Итак, для геометрического распределения, начинающегося с единицы,

$$M[X] = 1/p; \quad D[X] = q/p^2; \quad \sigma = \sqrt{q}/p.$$

Случайная величина $Y = X - 1$, имеющая геометрическое распределение, начинающееся с нуля, обладает характеристиками:

$$M[Y] = M[X] - 1 = q/p; \ D[Y] = D[X] = q/p^2; \ \sigma_y = \sqrt{q}/p.$$

4.43. Производится ряд попыток наладить сложную электронную схему. Вероятность того, что схема будет налажена с первой попытки, равна P_1; со второй попытки P_2, ..., с k-й попытки P_k, ... Вероятности $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots, P_n$ заданы. После n-й безуспешной попытки наладить схему попытки прекращаются. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X — общего числа произведенных попыток.

Решение. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \\ \hline P_1 & P_2 & \ldots & P_k & \ldots & 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P_k \end{array} \right|;$$

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n-1} iP_i + n\left[1 - \sum_{k=1}^{n-1} P_k\right];$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 P_i + n^2\left[1 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i\right] - (M[X])^2.$$

4.44. Прибор собирается из деталей k типов; в его состав входят m_i деталей типа i ($i = 1, \ldots, k$) $\left(\sum_{i=1}^{k} m_i = m;\ m \text{ — общее число деталей}\right)$. Вероятность того, что наугад взятая деталь i-го типа имеет дефект, равна q_i. Прибор работает только если в составе его деталей нет ни одной дефектной. 1) Найти вероятность P того, что прибор будет работать; 2) найти вероятность R_2 того, что среди деталей будет не менее двух дефектных.

Решение. 1) P есть вероятность того, что в m независимых опытах событие A = {деталь дефекта} не произойдет ни разу: $P = \prod_{i=1}^{k} (1 - q_i)^{m_i} = P_0$; 2) $R_2 = 1 - (P_0 + P_1)$, где P_0 — вероятность того, что среди m деталей нет ни одной дефектной; P_1 — вероятность того, что среди них ровно одна дефектная. P_1 найдем как сумму веро-

ятностей того, что среди m_i деталей i-го типа ровно одна дефектная, а детали всех остальных типов не дефектны:

$$P_1 = m_1 q_1 (1-q_1)^{m_1-1} \prod_{j\neq 1} q_j^{m_j-1} + m_2 q_2 (1-q_2)^{m_2-1} \prod_{j\neq 2} q_j^{m_j-1} + \ldots =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} m_i q_i (1-q_i)^{m_i-1} \prod_{j\neq i} q_j^{m_j-1}.$$

4.45. По каналу связи передается k сообщений, содержащих соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ двоичных знаков («0» или «1»). Знаки принимают значение 0 или 1 независимо друг от друга и с вероятностью 0,5. Каждый знак искажается (заменяется противоположным) с вероятностью p. При кодировании сообщений применяется код, исправляющий ошибки в одном или двух знаках (практически с полной достоверностью). Наличие ошибки хотя бы в одном знаке (после исправления) делает ошибочным все сообщение. Найти вероятность R того, что хотя бы одно из k сообщений будет ошибочным.

Решение. Случайная величина X_i — число ошибочных знаков в i-м сообщении — имеет биномиальное распределение (4.0.23) с параметрами n_i, p. Вероятность того, что i-е сообщение будет ошибочным, равна вероятности того, что в числе n_i знаков этого сообщения не менее трех будут ошибочными:

$$\mathrm{P}\{X_i \geqslant 3\} = 1 - \mathrm{P}\{X_i < 3\} = 1 - \sum_{j=0}^{2} C_{n_i}^j p^j (1-p)^{n_i-j}.$$

Вероятность того, что хотя бы одно из k сообщений будет ошибочным, равна

$$R = \prod_{i=1}^{k} \left\{1 - \sum_{j=0}^{2} C_{n_i}^j p^j (1-p)^{n-j}\right\}.$$

4.46. Для сборки прибора требуется иметь 4 одинаковые детали; всего в нашем распоряжении 10 деталей, из которых 6 доброкачественных и 4 негодных; на вид детали неразличимы. Из имеющихся деталей выбирают 5 деталей (одну лишнюю — «в запас»). Найти вероятность того, что не менее четырех из них окажутся доброкачественными.

Решение. Случайная величина X — число доброкачественных деталей среди 5 выбранных — имеет гипергеометрическое распределение с параметрами 5, 6, 4 [см. (4.0.34)]. Вероятность того, что среди 5 деталей m будут доброкачественными, равна $P_m = C_6^m C_4^{5-m}/C_{10}^5$; отсюда

$$P_4 = 5/21;\ P_5 = 1/42;\quad \mathrm{P}\{X \geqslant 4\} = P_4 + P_5 = 14/42.$$

4.47. Имеется 7 радиоламп, среди которых 3 неисправные, на вид неотличимые от новых. Наугад берутся 4 радиолампы и вставляются в 4 патрона. Найти и построить (в виде многоугольника распределения) ряд распределения числа радиоламп X, которые будут работать. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Р е ш е н и е. Величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами $n = 4$, $a = 4$, $b = 3$.

$$P_1 = C_4^1 C_3^3 / C_7^4 = 4/35; \quad P_2 = C_4^2 C_3^2 / C_7^4 = 18/35;$$

$$P_3 = C_4^3 C_3^1 / C_7^4 = 12/35; \quad P_4 = C_4^4 / C_7^4 = 1/35.$$

Ряд распределения случайной величины X имеет вид

X:	1	2	3	4
	4/35	18/35	12/35	1/35

Многоугольник распределения случайной величины X дан на рис. 4.47. Пользуясь формулами (4.0.35) и (4.0.36), вычисляем: $M[X] \approx 2{,}28$; $D[X] \approx 0{,}38$.

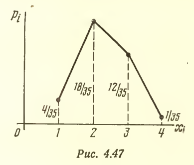


Рис. 4.47

4.48*. Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p. Наша цель — получить событие A k раз. Максимально возможное число опытов равно n (причем $n \geqslant 2k$). Опыты прекращаются либо тогда, когда событие A уже появилось k раз, либо тогда, когда ясно, что уже нет возможности получить его k раз, т. е. когда противоположное событие $\bar{A}$ появилось $n - k + 1$ раз. Случайная величина X — число опытов, которое будет произведено. Найти распределение случайной величины X.

Р е ш е н и е. Возможные значения случайной величины X: k, $k + 1, \ldots, n - 1, n$. Найдем соответствующие вероятности $P_m = P\{X = m\}$.

При $k \leqslant m \leqslant n - k$ опыты могут прекратиться после m-го только из-за того, что k раз произойдет событие A. Поэтому

$P_m = P$ {первые $m - 1$ опытов дали $k - 1$ появлений события A, а m-й опыт дал событие A} =

$$= C_{m-1}^{k-1} p^{k-1} q^{m-k} p = C_{m-1}^{k-1} p^k q^{m-k}. \qquad (4.48.1)$$

В частности, при $m = k$ имеем $P_k = p^k$.

При $n - k < m \leqslant n$ опыты могут прекратиться после m-го либо из-за того, что событие A появилось k-й раз, либо из-за того, что про-

тивоположное событие $\overline{A}$ появилось $n-k+1$ раз. Вероятность первого варианта мы уже вычислили; вероятность второго равна

P {первые $m-1$ опытов дали $n-k$ появлений события $\overline{A}$, а m-й опыт дал событие $\overline{A}$} =

$$=C_{m-1}^{n-k}\,p^{m-1-n+k}\,q^{n-k}\,q=C_{m-1}^{n-k}\,p^{m-1-n+k}\,q^{n-k+1}.$$

Складывая вероятности обоих вариантов, получаем

$$P_m=C_{m-1}^{k-1}\,p^k\,q^{m-k}+C_{m-1}^{n-k}\,p^{m-1-n+k}\,q^{n-k+1}. \qquad (4.48.2)$$

Итак, распределение случайной величины X при $k \leqslant m \leqslant n+k$ задается формулой (4.48.1), а при $n-k<m\leqslant n$ — формулой (4.48.2).

4.49. В условиях предыдущей задачи $n=7$, $k=3$; $p=0{,}4$. Построить ряд распределения случайной величины X.

Решение. Возможные значения случайной величины X : 3; 4; 5; 6; 7.

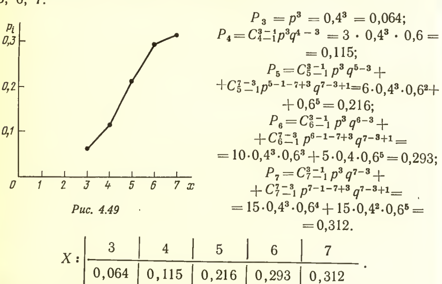


Рис. 4.49

$$P_3=p^3=0{,}4^3=0{,}064;$$

$$P_4=C_{4-1}^{3-1}p^3q^{4-3}=3\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6=0{,}115;$$

$$P_5=C_{5-1}^{3-1}\,p^3\,q^{5-3}+C_{5-1}^{7-3}p^{5-1-7+3}\,q^{7-3+1}=6\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^2+0{,}6^5=0{,}216;$$

$$P_6=C_{6-1}^{3-1}\,p^3\,q^{6-3}+C_{6-1}^{7-3}\,p^{6-1-7+3}\,q^{7-3+1}=10\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^3+5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^5=0{,}293;$$

$$P_7=C_{7-1}^{3-1}\,p^3\,q^{7-3}+C_{7-1}^{7-3}\,p^{7-1-7+3}\,q^{7-3+1}=15\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^4+15\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^5=0{,}312.$$

X:	3	4	5	6	7
	0,064	0,115	0,216	0,293	0,312

Многоугольник распределения приведен на рис. 4.49.

ГЛАВА 5

НЕПРЕРЫВНЫЕ И СМЕШАННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

5.0. Множество возможных значений дискретной случайной величины конечно или счетно; не дискретные случайные величины характеризуются тем, что множество их возможных значений несчетно. Примеры не дискретных случайных величин: дальность обнаружения объекта радиолокатором; время опоздания поезда; погрешность измерения угла с помощью угломера. У всех этих случайных величин множество возможных значений несчетно, так как непрерывно заполняет какой-то участок оси абсцисс.

Напомним, как определяется функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (5.0.1)$$

Функция распределения существует для любых случайных величин, как дискретных, так и не дискретных.

Если функция распределения $F(x)$ случайной величины X при любом x непрерывна и, кроме того, имеет производную $F'(x)$ везде, кроме, может быть, отдельных точек (рис. 5.0.1), то случайная величина X называется *непрерывной*.

Если функция распределения $F(x)$ на некоторых участках непрерывно возрастает, а в отдельных точках имеет разрывы (рис. 5.0.2), то случайная величина называется *смешанной*. Функция $F(x)$ для смешанной случайной величины, как и для дискретной, непрерывна слева.

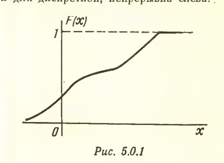


Рис. 5.0.1

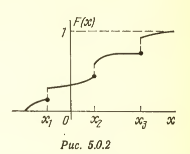


Рис. 5.0.2

Вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю. Вероятность каждого отдельного значения смешанной случайной величины, лежащего на участке непрерывности $F(x)$, также равна нулю, а вероятность каждого из тех значений $x_1, x_2, \ldots$, в которых функция $F(x)$ совершает скачки, численно равна значению соответствующего скачка.

Для любой случайной величины (дискретной, непрерывной или смешанной) вероятность попадания случайной величины на участок оси абсцисс от α до β (включая α и не включая β) выражается формулой

$$P\{\alpha \leqslant X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha). \quad (5.0.2)$$

Так как для непрерывной случайной величины $P\{X = \alpha\} = 0$, то знак равенства в этом случае в (5.0.2) можно отбросить:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha), \quad (5.0.3)$$

или в других обозначениях

$$P\{X \in (\alpha, \beta)\} = F(\beta) - F(\alpha). \quad (5.0.4)$$

Плотностью вероятности (или плотностью распределения или просто плотностью) непрерывной случайной величины X называется производная функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \quad (5.0.5)$$

Элементом вероятности для непрерывной случайной величины X называется величина $f(x)\,dx$, приближенно равная вероятности попадания случайной величины X на элементарный отрезок dx, примыкающий к точке x:

$$f(x)\,dx \approx P\{x < X < x + dx\}. \quad (5.0.6)$$

Плотность $f(x)$ любой случайной величины неотрицательна ($f(x) \geqslant 0$) и обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \quad (5.0.7)$$

График плотности $f(x)$ называется *кривой распределения.*

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X на участок от α до β определяется выражением

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \quad (5.0.8)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины X выражается через ее плотность:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \quad (5.0.9)$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью $f(x)$ называется ее среднее значение, вычисляемое по формуле

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\alpha} xf(x)\,dx. \quad (5.0.10)$$

Математическое ожидание смешанной случайной величины с функцией распределения $F(x)$ вычисляется по формуле

$$M[X] = \sum_i x_i p_i + \int_{(н)} xF'(x)\,dx, \quad (5.0.11)$$

где сумма распространяется на все точки разрыва функции распределения, а интеграл — на все участки ее непрерывности. Когда $M[X]$ надо обозначить одной буквой, будем писать $M[X] = m_x$.

Дисперсия непрерывной случайной величины X

$$D[X] = M[\overset{\circ}{X}{}^2] = M[(X - m_x)^2]$$

вычисляется по формуле

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx. \quad (5.0.12)$$

Дисперсия смешанной случайной величины выражается формулой

$$D[X] = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i + \int_{(н)} (x - m_x)^2 F'(x)\,dx, \quad (5.0.13)$$

где сумма распространяется на все точки разрыва функции $F(x)$, а интеграл — на все участки ее непрерывности.

Корень квадратный из дисперсии называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины:

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}. \quad (5.0.14)$$

Для неотрицательной случайной величины в качестве характеристики меры ее случайности иногда применяется *коэффициент вариации*

$$v_x = \sigma_x / m_x. \quad (5.0.15)$$

Заметим, что коэффициент вариации зависит от «начала отсчета» случайной величины.

Среднее квадратическое отклонение может быть применено для ориентировочной оценки диапазона возможных значений случайной величины. При этом пользуются так называемым *правилом трех сигма*, состоящим в том, что *диапазон практически возможных значений случайной величины* X *не выходит за пределы*

$$m_x \pm 3\sigma_x. \quad (5.0.16)$$

Это правило справедливо и для дискретной случайной величины.

Начальный момент k-го порядка

$$\alpha_k[X] = M[X^k]$$

для непрерывной и смешанной случайных величин выражается соответственно формулами:

$$\alpha_k[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx; \qquad (5.0.17)$$

$$\alpha_k[X]=\sum_i x_i^k p_i+\int_{(н)} x^k F'(x)\,dx. \qquad (5.0.18)$$

Центральные моменты вычисляются по аналогичным формулам:

$$\mu_k[X]=\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k f(x)\,dx; \qquad (5.0.19)$$

$$\mu_k[X]=\sum_i (x_i-m_x)^k p_i+\int_{(н)} (x-m_x)^k F'(x)\,dx. \qquad (5.0.20)$$

Центральные моменты могут быть выражены через начальные совершенно так же, как для дискретной случайной величины (см. гл. 4). Наибольший практический интерес имеет выражение дисперсии через второй начальный момент:

$$D[X]=\alpha_2[X]-m_x^2, \qquad (5.0.21)$$

или в другой форме

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2. \qquad (5.0.22)$$

Если вероятность какого либо события A зависит от того, какое значение приняла непрерывная случайная величина X с плотностью $f(x)$, то полная вероятность события A вычисляется по *интегральной формуле полной вероятности*

$$P(A)=\int_{-\infty}^{\infty} P(A\,|\,x)\,f(x)\,dx, \qquad (5.0.23)$$

где $P(A|x) = P\{A|X=x\}$ — условная вероятность события A при гипотезе $\{X=x\}$.

Соответствующий аналог в схеме непрерывных случайных величин имеет и формула Бейеса. Если в результате опыта имело место событие A, вероятность которого зависит от того, какое значение приняла непрерывная случайная величина X, то условная плотность этой случайной величины с учетом появления события A равна

$$f_A(x)=f(x)\,P(A|x)/P(A), \qquad (5.0.24)$$

или же с учетом (5.0.23)

$$f_A(x)=f(x)\,P(A|x)\Bigg/\int_{-\infty}^{\infty} P(A|x)\,f(x)\,dx. \qquad (5.0.25)$$

Формула (5.0.25) называется *интегральной формулой Бейеса*.

В схеме непрерывных случайных величин применяется также *интегральная формула полного математического ожидания*

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} M[X\,|\,y]\,f(y)\,dy, \qquad (5.0.26)$$

где X — любая случайная величина; Y — непрерывная случайная величина с плотностью $f(y)$; $M[X|y]$ — условное математическое ожидание случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y.

Перечислим некоторые часто встречающиеся на практике распределения непрерывных случайных величин и опишем их свойства.

1. **Равномерное распределение.** Случайная величина X имеет *равномерное распределение* на участке от a до b, если ее плотность на этом участке постоянна:

$$f(x)=\begin{cases} 1/(b-a) & \text{при } x\in(a,b); \\ 0 & \text{при } x\notin(a,b). \end{cases} \qquad (5.0.27)$$

Значеиия $f(x)$ в точках a и b иикак не определеиы; это и иесуществеиио, так как вероятиость попадаиия в любую из них равиа иулю, и, зиачит, вероятиость любого события, связаииого со случайиой величииой X, ие зависит от того, какое зиачеиие имеет плотиость $f(x)$ в точках a и b*). График плотиости вероятиости равиомериого распределеиия показаи иа рис. 5.0.3.

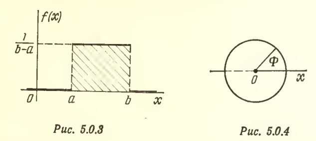


Рис. 5.0.3

Рис. 5.0.4

Математическое ожидаиие, дисперсия и средиее квадратическое отклоиеиие для случайиой величиины X, имеющей плотиость (5.0.27), равиы соответствеиио:

$$M[X]=\frac{a+b}{2};\quad D[X]=\frac{(b-a)^2}{12};\quad \sigma_x=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (5.0.28)$$

Равиомериое распределеиие имеют ошибки грубых измереиий при помощи иисрумеита с крупиыми делеииями, когда измереииое зиачеиие округляется до ближайшего целого (или до ближайшего меиьшего, или же до ближайшего большего). Например, ошибка (в саитиметрах) измереиия длииы караидаша с помощью лииейки с саитиметровыми делеииями имеет равиомериое распределеиие иа участке $(-1/2;\ 1/2)$, если округлеиие производится до ближайшего целого, и на участке $(0;\ 1)$, если до ближайшего меиьшего. Также равиомериое распределеиие имеет ошибка (в мииутах) указаиия времени часами со скачущей мииутной стрелкой [участок $(0;\ 1)$]. Равиомериое распределеиие иа участке $(0,\ 2\pi)$ имеет угол поворота Φ хорошо уравиовешеииого колеса (рис. 5.0.4), если оио приводится во вращеиие и остаиавливается в результате треиия. В задаче Бюффоиа (см. задачу 1.45) угол, определяющий иаправлеиие иглы, также имеет равиомериое распределеиие в силу того, что игла бросается иаугад так, что ии одио из зиачеиий φ ие предпочитается иикакому другому.

Типичиые условия возиикиовеиия равиомериого распределеиия состоят в следующем: точка M случайным образом бросается иа ось Ox, разделеииую иа равиые иитервалы длииы l (рис. 5.0.5). Каждый из случайиых отрезков X и Y, иа которые делит точка M тот иитервал, иа который оиа попала, имеет равиомериое распределение иа участке $(0, l)$.

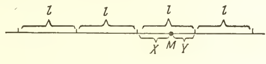


Рис. 5.0.5

В дальиейшем вместо подробиой записи (5.0.27) для плотиости равиомериого распределеиия мы часто будем пользоваться более краткой формой

$$f(x) = 1/(b-a) \quad \text{при } x \in (a,b). \qquad (5.0.29)$$

*) В дальиейшем, задавая плотиость $f(x)$ разиыми формулами иа разиых участках оси Ox, мы также ие будем указывать зиачеиия $f(x)$ иа граиицах участков.

2. Показательное распределение. Случайная величина X имеет *показательное распределение*, если ее плотность выражается формулой

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x>0; \\ 0 & \text{при } x<0, \end{cases} \tag{5.0.30}$$

где λ — параметр показательного распределения (рис. 5.0.6). Показательное распределение имеет большое значение в теории марковских случайных процессов и теории массового обслуживания (см. гл. 10 и 11).

Если на оси времени $0t$ имеется простейший поток событий с интенсивностью (см. гл. 4), то интервал времени T между двумя соседними событиями имеет показательное распределение с параметром λ.

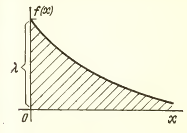


Рис. 5.0.6

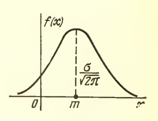


Рис. 5.0.7

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение величины X, имеющей показательное распределение, равны соответственно:

$$M[X]=1/\lambda;\ D[X]=1/\lambda^2;\ \sigma_x=1/\lambda. \tag{5.0.31}$$

Коэффициент вариации показательного распределения равен единице:

$$v_x=\sigma_x/m_x=1.$$

Подробную запись показательного распределения (5.0.30) мы часто будем заменять более краткой:

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad \text{при } x>0$$

или совсем краткой

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad (x>0).$$

Таблицы функции e^{-x} даны в приложении 3.

3. **Нормальное распределение**. Случайная величина X имеет ***нормальное распределение*** (или распределена по нормальному закону*)), если ее плотность

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{5.0.33}$$

(рис. 5.0.7). Математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение (5.0.33), равно m, дисперсия σ^2, среднее квадратическое отклонение σ. Вероятность попадания случайной величины X, имеющей нормальное распределение с параметрами m и σ, на участок от α до β выражается формулой

$$P\{X\in(\alpha,\beta)\}=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right), \tag{5.0.34}$$

*) Этот закон также называется законом Гаусса.

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (5.0.35)$$

Функция Лапласа обладает свойствами: 1) $\Phi(0) = 0$; 2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (нечетная функция); 3) $\Phi(\infty) = 0,5$. Таблицы функции Лапласа даны в приложении 5.

Если участок (α, β) симметричен относительно точки m, то вероятность попадания в него

$$P\{|X - m| < l\} = 2\Phi(l/\sigma), \qquad (5.0.36)$$

где $l = (\beta - \alpha)/2$ — половина длины участка.

Нормальное распределение возникает тогда, когда величина X образуется в результате суммирования большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных слагаемых, сравнимых по своему влиянию на рассеивание суммы (подробнее см. гл. 8). Таблицы нормальной плотности для $m = 0$, $\sigma = 1$ даны в приложении 4.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Может ли при каком-либо значении аргумента быть: 1) функция распределения больше единицы? 2) плотность распределения больше единицы? 3) функция распределения отрицательной? 4) плотность распределения отрицательной?

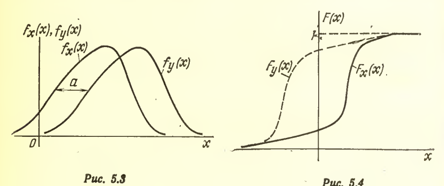


Рис. 5.3 *Рис. 5.4*

Ответ. 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) нет.

5.2. Какова размерность: 1) функции распределения; 2) плотности распределения; 3) математического ожидания; 4) дисперсии; 5) среднего квадратического отклонения; 6) третьего начального момента?

Ответ. 1) безразмерна; 2) обратная размерности случайной величины: 3) размерность случайной величины; 4) размерность квадрата случайной величины; 5) размерность случайной величины; 6) размерность куба случайной величины.

5.3. Дан график плотности $f_x(x)$ случайной величины X (рис. 5.3). Построить на том же графике плотность $f_y(x)$ случайной величины $Y =$

$= X + a$, где a — неслучайная величина. Написать выражение для $f_y(x)$.

Решение. Кривая распределения случайной величины Y представляет собой кривую распределения $f_x(x)$, сдвинутую вправо на a; $f_y(x) = f_x(x - a)$.

5.4. Дан график функции распределения $F_x(x)$ случайной величины X (рис. 5.4). Построить на том же графике функцию распределения $F_y(x)$ случайной величины $Y = -X$.

Рис. 5.5

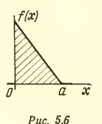


Рис. 5.6

Решение. $F_y(x) = P(Y < x) = P\{-X < x\} = P\{X > -x\} = 1 - P\{X < -x\} = 1 - F_x(-x)$.

Для построения графика функции $F_y(-x)$ нужно кривую $F_x(x)$ зеркально отразить в оси ординат и каждую ординату вычесть из единицы (см. пунктирную линию на рис. 5.4).

5.5. Построить функцию распределения $F(x)$ для случайной величины, распределенной равномерно на участке (a, b).

Решение. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx;$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ 1/(b-a) & \text{при } a < x < b; \\ 0 & \text{при } x > b; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant a; \\ (x-a)/(b-a) & \text{при } a < x \leqslant b; \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases}$$

(рис. 5.5).

5.6. Случайная величина X распределена по «закону прямоугольного треугольника» в интервале $(0, a)$ (рис. 5.6). 1) Написать выражение плотности $f(x)$; 2) найти функцию распределения $F(x)$; 3) найти вероятность попадания случайной величины X на участок от $a/2$ до a; 4) найти характеристики величины X: m_x, D_x, σ_x, $\mu_3[X]$.

Ответ.

$$1)\ f(x) = \begin{cases} 2(1 - x/a)/a & \text{при } x \in (0, a); \\ 0 & \text{при } x \notin (0, a), \end{cases}$$

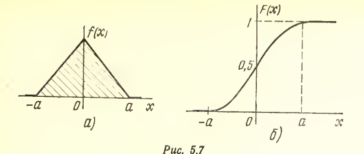


Рис. 5.7

или, короче, $f(x) = 2(1 - x/a)/a$ при $x \in (0, a)$;

2) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0; \\ x(2 - x/a)/a & \text{при } 0 < x \leqslant a; \\ 1 & \text{при } x > a; \end{cases}$

3) $P\{X \in (a/2, a)\} = F(a) - F(a/2) = 1/4$;

4) $m_x = a/3$; $D_x = a^2/18$; $\sigma_x = a/(3\sqrt{2})$; по формуле (4.0.15)

$$\mu_3[X] = \alpha_3[X] - 3m_x\alpha_2[X] + 2m_x^3 = a^3/135.$$

5.7. Случайная величина X подчинена закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») на участке от $-a$ до a (рис. 5.7, *а*). 1) Написать выражение плотности распределения; 2) построить график функции распределения; 3) найти числовые характеристики случайной величины X : m_x, D_x, σ_x, $\mu_3[X]$; 4) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-a/2, a)$.

О т в е т. 1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{при } 0 < x < a; \\ \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right) & \text{при } -a < x < 0; \\ 0 & \text{при } x < -a \text{ или } x > a, \end{cases}$$

или, короче,

$$f(x) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \text{ при } x \in (-a, a);$$

2) график функции распределения при $x \in (-a, a)$ составлен из двух участков парабол (рис. 5.7, *б*);

3) $m_x = 0$; $D_x = a^2/6$; $\sigma_x = a/\sqrt{6}$; $\mu_3[X] = 0$;

4) $P\{X \in (-a/2, a) = 7/8$.

5.8. Случайная величина X распределена по закону Коши: $f(x) = a/(1 + x^2)$. 1) Найти коэффициент a; 2) найти функцию распределения $F(x)$; 3) найти вероятность попадания величины X на участок $(-1, +1)$; 4) существуют ли для случайной величины X числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсия?

Ответ. 1) $a=\frac{1}{\pi}$; 2) $F(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}$;

3) $P\{-1 < X < 1\} = 1/2$; 4) характеристики m_x и D_x не существуют, так как выражающие их интегралы расходятся.

5.9. Случайная величина X подчинена показательному закону распределения с параметром μ : $f(x) = \mu e^{-\mu x}$ при $x > 0$. 1) Построить кривую распределения; 2) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; 3) найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

Ответ. 1) См. рис. 5.9, *а*; 2) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ 1-e^{-\mu x} & \text{при } x>0 \end{cases}$

(см. рис. 5.9, *б*);

3) $m_x = 1/\mu$; $P\{X < 1/\mu\} = F(1/\mu) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$.

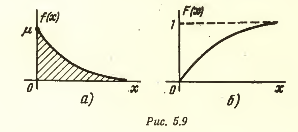


Рис. 5.9

5.10. Случайная величина X подчинена закону Лапласа. $f(x) = ae^{-\lambda|x|}$, где λ — положительный параметр. 1) Найти коэффициент a; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти m_x и D_x

Ответ. 1) $a=\lambda/2$; 2) $F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\lambda x} & \text{при } x\leqslant 0; \\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x} & \text{при } x>0, \end{cases}$

графики плотности и функции распределения даны на рис. 5.10, *а*, *б*;

3) $m_x = 0$; $D_x = 2/\lambda^2$.

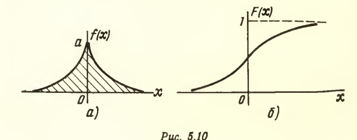


Рис. 5.10

5.11. Случайная величина R — расстояние от точки попадания до центра мишени — распределена по закону Рэлея: $f(r) = Are^{-h^2r^2}$ при $r > 0$ (рис. 5.11).

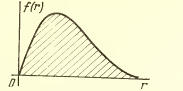


Рис. 5.11

Найти: коэффициент A; 2) моду $\mathcal{M}$ случайной величины R, т. е. абсциссу максимума ее плотности распределения; 3) m_r и D_r; 4) вероятность того, что в результате выстрела расстояние от точки попадания до центра мишени окажется меньше, чем мода.

Ответ. 1) $A = 2h^2$; 2) $\mathcal{M} = 1/(h\sqrt{2})$; 3) $m_r = \mathcal{M}\sqrt{\pi/2} = \sqrt{\pi}/(2h)$; $D_r = (4-\pi)/(4h^2) = \mathcal{M}^2(4-\pi)/2$; 4) $P\{R < \mathcal{M}\} \approx 0{,}393$.

5.12. Случайная величина X с вероятностью p_1 имеет плотность $f_1(x)$, а с вероятностью p_2 — плотность $f_2(x)$ $(p_1 + p_2 = 1)$. Написать выражение для плотности и функции распределения величины X. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение. По формуле полной вероятности с гипотезами $H_1 =$ {величина X имеет плотность $f_1(x)$} и $H_2 =$ {величина X имеет плотность $f_2(x)$} получаем

$$F(x) = P\{X < x\} = p_1F_1(x) + p_2F_2(x),$$

где $F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx$; $F_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_2(x)\,dx$; $f(x) = F'(x) = p_1f_1(x) = p_2f_2(x)$.

По формуле полного математического ожидания

$$m_x = p_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)\,dx + p_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_2(x)\,dx = p_1 m_{x1} + p_2 m_{x2},$$

где m_{x1}, m_{x2} — математические ожидания для распределений $f_1(x)$, $f_2(x)$.

Дисперсию находим через второй начальный момент:

$$D_x = p_1\alpha_{21} + p_2\alpha_{22} - m_x^2 = p_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx + p_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_2(x)\,dx - m_x^2,$$

где α_{21}, α_{22} — вторые начальные моменты для распределений $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

5.13. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1,

но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика D есть нормально распределенная случайная величина с характеристиками $m_d = (d_1 + d_2)/2$ и $\sigma_d = (d_2 - d_1)/4$. Определить вероятность p того, что шарик будет забракован.

Решение. Участок (d_1, d_2) симметричен относительно m_d. По формуле (5.0.36), полагая $l = (d_2 - d_1)/2$, находим вероятность того, что шарик не будет забракован:

$$\mathrm{P}\{|D - m_d| < (d_2 - d_1)/2\} = 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right),$$

откуда

$$p = 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{2(d_2 - d_1)}{d_2 - d_1}\right) = 1 - 2\Phi(2) = 0{,}0455.$$

5.14. В условиях предыдущей задачи найти среднее квадратическое отклонение σ_d диаметра шарика, если известно, что брак составляет 10% всей продукции.

Решение. Вероятность брака

$$p = 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) = 0{,}1; \quad \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) = 0{,}45.$$

По таблицам функции Лапласа (приложение 5) находим аргумент, при котором функция Лапласа равна 0,45:

$$(d_2 - d_1)/(2\sigma_d) \approx 1{,}65; \quad \sigma_d \approx (d_2 - d_1)/3{,}3.$$

5.15. При работе ЭВМ в случайные моменты возникают неисправности. Время T работы ЭВМ до первой неисправности распределено по показательному закону с параметром $\nu : \varphi(t) = \nu e^{-\nu t}$ $(t > 0)$. При возникновении неисправности она мгновенно обнаруживается и ЭВМ поступает в ремонт. Ремонт продолжается время t_0, после чего ЭВМ снова включается в работу. Найти плотность $f(t)$ и функцию распределения $F(t)$ промежутка времени Z между двумя соседними неисправностями. Найти его математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что Z будет больше $2t_0$.

Решение. $Z = T + t_0$;

$$f(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu(t - t_0)} & \text{при } t > t_0; \\ 0 & \text{при } t < t_0; \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu(t - t_0)} & \text{при } t > t_0; \\ 0 & \text{при } t < t_0; \end{cases}$$

$$\mathrm{M}[Z] = 1/\nu + t_0; \quad \mathrm{D}[Z] = 1/\nu^2; \quad \mathrm{P}\{Z > 2t_0\} = 1 - F(2t_0) = e^{-\nu t_0}.$$

5.16. Время T между двумя сбоями ЭВМ распределено по показательному закону с параметром $\lambda : f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ при $t > 0$. Решение определенной задачи требует безотказной работы машины в течение времени τ. Если за время τ произошел сбой, то задачу приходится решать заново. Сбой обнаруживается только через время τ после начала решения задачи. Рассматривается случайная величина Θ — время,

за которое задача будет решена. Найти ее закон распределения и математическое ожидание (среднее время решения задачи).

О т в е т. Случайная величина Θ дискретна и имеет ряд распределения

$$\Theta: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} \tau & 2\tau & \dots & i\tau & \dots \\ \hline p & pq & \dots & pq^{i-1} & \dots \end{array} \right.,$$

где $p = e^{-\lambda\tau}$, $q = 1 - p = 1 - e^{-\lambda\tau}$; $M[\Theta] = \tau/p = \tau/e^{-\lambda\tau}$.

5.17. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что за данное время $t = k\tau$ будет решено не менее m задач ($m < k$).

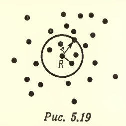


Рис. 5.19

Р е ш е н и е. Обозначим $P_{m,k}$ вероятность того, что за время $t = k\tau$ будет решено ровно m задач. $P_{m,k}$ есть вероятность того, что из k промежутков времени τ ровно m будет таких, в которых не будет сбоев. Вероятность того, что за время τ не будет сбоя, $p = P(T > \tau) = e^{-\lambda\tau}$. По теореме о повторении опытов

$$P_{m,k} = C_k^m p^m q^{k-m} = C_k^m e^{-m\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda\tau})^{k-m}.$$

Вероятность того, что будет решено не менее m задач, равна

$$R_{m,k} = \sum_{i=m}^{k} P_{i,k} = \sum_{i=m}^{k} C_k^i e^{-i\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda\tau})^{k-i}$$

или, если это удобнее,

$$R_{m,k} = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} C_k^i e^{-i\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda\tau})^{k-i}.$$

5.18. Доказать, что закон распределения расстояния между соседними событиями в простейшем потоке с интенсивностью λ — показательный, с параметром λ.

Р е ш е н и е. Находим сперва функцию распределения $F(t)$ случайной величины T — расстояние между соседними событиями:

$F(t) = P\{T < t\} = P$ {за время t появится хотя бы одно событие простейшего потока} $= 1 - e^{-\lambda t}$ при $t > 0$; отсюда $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ при $t > 0$.

5.19. Рассматривается пуассоновское поле точек на плоскости с постоянной плотностью λ. Найти закон распределения и числовые характеристики m_r, D_r расстояния R от любой точки поля до ближайшей к ней соседней точки.

Решение. Найдем функцию распределения $F(r)$ величины R. Для этого проведем вокруг точки поля окружность радиуса r (рис. 5.19). Для того чтобы расстояние R от этой точки до ближайшей к ней соседней было меньше r, надо, чтобы в круг попала хотя бы одна точка (кроме данной). По свойствам пуассоновского поля вероятность этого события не зависит от того, есть ли уже в центре круга точка или ее нет. Поэтому

$$F(r) = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda} \quad (r > 0),$$

откуда

$$f(r) = 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} \quad (r > 0).$$

Такой закон распределения называется законом Рэлея (см. задачу 5.11).

$$m_r = \int_0^\infty r 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} dr = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}};$$

$$\alpha_2[R] = \int_0^\infty r^2 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} dr = \frac{1}{\pi\lambda};$$

$$D_r = \alpha_2[R] - m_r^2 = 1/(\pi\lambda) - 1/(4\lambda) = (4-\pi)/(4\pi\lambda).$$

5.20. В пространстве трех измерений случайным образом расположены точки. Число точек в некотором объеме v пространства есть случайная величина, подчиненная закону Пуассона с математическим ожиданием $a = \lambda v$, где λ — среднее число точек, находящихся в единичном объеме. Требуется найти закон распределения расстояния R от любой точки пространства до ближайшей к ней случайной точки.

Решение. Функция распределения $F(r)$ есть вероятность того, что в сферу радиуса r попадет хотя бы одна точка:

$$F(r) = P(R < r) = 1 - e^{-\lambda v(r)},$$

где $v(r) = {}^4/_3\pi r^3$ — объем сферы радиуса r; отсюда

$$f(r) = 4\pi r^2 \lambda e^{-\lambda \frac{4}{3}\pi r^3} \quad (r > 0).$$

5.21. В некотором звездном скоплении звезды образуют трехмерное пуассоновское поле точек с плотностью λ (среднее количество звезд в единице объема). Фиксируется одна (произвольная) звезда и рассматриваются: ближайшая от нее звезда, следующая (вторая) по удаленности, третья и т. д. Найти закон распределения расстояния R_n от данной звезды до n-й в этом ряду.

Ответ. Функция распределения $F_n(r)$ имеет вид

$$F_n(r) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \text{ где } a = \frac{4}{3}\pi r^3 \lambda \quad (r > 0);$$

плотность распределений

$$f_n(r) = \frac{dF_n(r)}{dr} = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} 4\pi\lambda r^2 \quad (r > 0).$$

5.22. Деревья в лесу растут в случайных точках, которые образуют пуассоновское поле с плотностью λ (среднее число деревьев на единицу площади). Выбирается произвольная точка O в этом лесу. Рассматриваются случайные величины:

R_1 — расстояние от точки O до ближайшего к ней дерева;

R_2 — расстояние от точки O до следующего по порядку (второго по удаленности) дерева;

. . . .

R_n — расстояние от точки O до n-го по удаленности дерева.

Найти закон распределения каждой из этих случайных величин.

Решение. Функция распределения случайной величины найдена нами в задаче 5.19:

$$F_1(r) = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda} \quad (r > 0).$$

Функция распределения $F_2(r) = P(R_2 < r)$ равна вероятности того что в круг радиуса r попадет не менее двух деревьев:

$$F_2(r) = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda} - \pi r^2 \lambda \, e^{-\pi r^2 \lambda} \quad (r > 0).$$

Аналогично рассуждая, получаем

$$F_n(r) = \mathrm{P}\{R_n < r\} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (r > 0),$$

где $a = \pi r^2 \lambda$.

Плотность $f_n(r)$ получим дифференцированием $F_n(r)$ по r:

$$f_n(r) = \frac{dF_n(r)}{da} \frac{da}{dr} = \left(-\sum_{k=0}^{n-1} k \frac{a^{k-1}}{k!} e^{-a} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \right) 2\pi\lambda r = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} 2\pi\lambda r \quad (r > 0).$$

5.23. На перекрестке стоит автоматический светофор, в котором 1 мин горит зеленый свет и 0,5 мин — красный, затем опять 1 мин горит зеленый свет, 0,5 мин — красный и т. д. Некто подъезжает к перекрестку на машине в случайный момент, не связанный с работой светофора. 1) Найти вероятность того, что он проедет перекресток, не останавливаясь; 2) найти закон распределения и числовые характеристики времени ожидания у перекрестка $T_{ож}$; 3) построить функцию распределения $F(t)$ времени ожидания $T_{ож}$.

Решение. Момент проезда автомашины через перекресток распределен равномерно в интервале, равном периоду смены цветов в светофоре. Этот период равен $1 + 0,5 = 1,5$ мин (рис. 5.23, *а*).

Для того чтобы машина проехала через перекресток, не останавливаясь, достаточно, чтобы момент проезда перекрестка пришелся на ин-

тервал времени (0; 1). Для случайной величины, распределенной равномерно в интервале (0; 1,5), вероятность того, что она попадет на участок (0; 1), равна 2/3. Время ожидания $T_{ож}$ есть смешанная случайная величина; с вероятностью 2/3 она равна нулю, а с вероятностью 1/3 принимает с одинаковой плотностью вероятности любое значение между 0 и 0,5 мин. График функции распределения $F(t)$ показан на рис. 5.23, *б*.

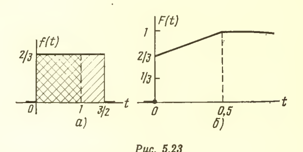


Рис. 5.23

Среднее время ожидания у перекрестка

$$M[T_{ож}] = 0 \cdot 2/3 + 0{,}25 \cdot 1/3 \approx 0{,}083 \text{ мин.}$$

Дисперсия времени ожидания

$$D[T_{ож}] = \alpha_2[T_{ож}] - (M[T_{ож}])^2 = 0^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\int_0^{0,5} t^2 \frac{1}{0{,}5}\, dt -$$

$$-(0{,}083)^2 \approx 0{,}0208 \text{ мин}^2; \quad \sigma_{t_{ож}} \approx 0{,}144 \text{ мин.}$$

5.24. *Нормальная функция распределения.* Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m, σ. Найти ее функцию распределения $F(x)$.

Решение. $F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} =$

$$= \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + 0{,}5.$$

5.25*. Показать, что функция вида

$$f_s(x) = ax^s e^{-\alpha^2 x^2} \text{ при } x > 0$$

[$\alpha > 0$ и $a > 0$ — некоторые постоянные и s — натуральное число ($s = 1, 2, 3, \ldots$)] обладает свойствами плотности распределения. Определить параметры a и α исходя из заданного математического ожидания m_x и найти D_x.

Решение. Параметры a и α находятся из условий:

$$\int_0^\infty ax^s e^{-(\alpha x)^2}\, dx = 1; \quad \int_0^\infty ax^{s+1} e^{-(\alpha x)^2}\, dx = m_x.$$

Написанные выше интегралы заменой $(\alpha x)^2 = t$ приводятся к гамма-функции Эйлера:

$$\int_0^\infty x^s \, e^{-(\alpha x)^2} dx = \frac{1}{2\alpha^{s+1}} \int_0^\infty e^{-t} \, t^{\frac{s-1}{2}} \, dt = \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Big/ (2\alpha^{s+1}),$$

где $\Gamma(m) = \int_0^\infty e^{-t} t^{m-1} dt$, $(m > 0)$, причем $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$; для целых $n = 1, 2, \ldots$, получаем $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$, $(2n-1)!! = 1, 3, 5, \ldots, (2n-1)$.

Из заданных условий находим

$$a\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Big/ (2\alpha^{s+1}) = 1; \; a\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right) \Big/ (2\alpha^{s+2}) = m_x;$$

откуда $a = \dfrac{2\alpha^{s+1}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}$; $\alpha = \dfrac{1}{m_x} \dfrac{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}$,

Второй начальный момент

$$\alpha_2[X] = \int_0^\infty a x^{s+2} \, e^{-(\alpha x)^2} dx = a \frac{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}\right)}{2\alpha^{s+3}} =$$

$$= a \frac{\frac{s+1}{2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\alpha^{s+1} \alpha^2} = \frac{s+1}{2\alpha^2},$$

откуда

$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = \frac{s+1}{2\alpha^2} - m_x^2 = m_x^2 \left\{ \frac{(s+1)\,\Gamma^2\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{s+2}{2}\right)} - 1 \right\}.$$

Некоторые из законов вида $f_s(x)$ имеют определенные названия: $f_1(x)$ называется **з а к о н о м Р э л е я**, а $f_2(x)$ — **з а к о н о м М а к с в е л л а**. Для закона Рэлея $(s = 1)$ $f_1(x) = ax\,e^{-\alpha^2 x^2}$ $(x > 0)$

$$\alpha = \frac{1}{m_x} \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad a = 2\alpha^2 = \frac{\pi}{2m_x^2}; \; D_x = m_x^2 \left[\frac{4}{\pi} - 1\right].$$

Для закона Максвелла $(s = 2)$ $f_2(x) = ax^2 e^{-\alpha^2 x^2}$

$$\alpha = \frac{2}{m_x \sqrt{\pi}}; \; a = \frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}} = \frac{32}{\pi^2 m_x^3}; \; D_x = m_x^2 \left(\frac{3\pi}{8} - 1\right).$$

Примечание. Все законы вида

$$f_s(x) = ax^s e^{-\alpha^2 x^2} \quad (x > 0)$$

прн заданном s являются однопараметрнчными, т. е. завнсят только от одного параметра, в качестве которого можно задать, напрнмер, математнческое ожиданне (нлн днсперсню).

5.26*. *Моменты нормального закона.* Имеется случайная величина X, распределенная по нормальному закону с параметрами m и σ. Найти выражение для величины $\alpha_s[X]$ — начального момента s-го порядка.

Решение. Выразим начальные моменты $\alpha_s[X] = M[X^s]$ через центральные моменты $\mu_s[X] = M[(X-m)]$:

$$\alpha_s = M[(X-m+m)^s] = \sum_{k=0}^{s} C_s^k \mu_k[X]\, m^{s-k}; \; \mu_0[X] = 1.$$

Для центральных моментов при нечетном $s = 2n+1$

$$\mu_s[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^s e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^s e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy = 0,$$

а при четном $s = 2n$ по формулам предыдущей задачи

$$\mu_s[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^s e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y^s e^{-\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} dy =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{2} \left(\sigma\sqrt{2}\right)^{2n+1} = (2n+1)!!\,\sigma^{2n}.$$

Например:

$\mu_2[X] = \sigma^2$; $\quad \alpha_2[X] = m^2 + \sigma^2$;

$\alpha_3[X] = m^3 + 3\sigma^2 m$;

$\mu_4[X] = 3\sigma^4$; $\quad \alpha_4[X] = m^4 + 6\sigma^2 m^2 + 3\sigma^4$;

$\alpha_5[X] = m^5 + 10\sigma^2 m^3 + 5 \cdot 15\sigma^4 m$;

$\mu_6[X] = 15\sigma^6$; $\quad \alpha_6[X] = m^6 + 15\sigma^2 m^4 + 15 \cdot 3\sigma^4 m^2 + 15\sigma^6$.

5.27. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ. Написать выражение для ее функции распределения $F(x) = P\{X < x\}$. Написать выражение для функции распределения $\Psi(y) = P(Y < y)$ случайной величины $Y = -X$.

Решение. Согласно решению задачи 5.24

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)+0,5;\ \Psi(y)=\mathrm{P}\{Y<y\}=\mathrm{P}\{-X<y\}=$$

$$=\mathrm{P}(X>-y)-1-F(y)=\Phi\left(\frac{y+m}{\sigma}\right)=0,5.$$

5.28*. Функция распределения $F(x)$ неотрицательной случайной величины X задана графиком (рис. 5.28). Математическое ожидание случайной величины X равно m_x. Показать, что m_x геометрически может быть представлено площадью фигуры, заштрихованной на рис. 5.28 (ограниченной кривой $y=F(x)$, прямой $y=1$ и осью ординат).

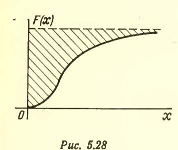


Рис. 5.28

Рис. 5.29

Решение. Имеем

$$m_x=\int_0^\infty xf(x)\,dx=\int_0^\infty xF'(x)\,dx=-\int_0^\infty x\,[1-F(x)]'\,dx.$$

Применяя интегрирование по частям, получаем

$$m_x=-x\,[1-F(x)]\Big|_0^\infty+\int_0^\infty [1-F(x)]\,dx.$$

Докажем, что первое слагаемое равно нулю:

$$x\,[1+F(x)]\Big|_0^\infty=\lim_{x\to\infty} x\,[1-F(x)]=0.$$

Действительно, для неотрицательной случайной величины X, имеющей конечное математическое ожидание, из сходимости интеграла $\int_0^\infty xf(x)dx$ следует, что $\int_K^\infty xf(x)dx\to 0$ при $K\to\infty$, и так как

$$K\int_K^\infty f(x)\,dx\leqslant\int_K^\infty xf(x)\,dx,$$

то $\mathrm{M}\,[1-F(K)]\to 0$ при $K\to\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[1-F(x)]=0$. Отсюда

$$m_x = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]\, dx,$$

а это есть площадь, заштрихованная на рис. 5.28.

5.29. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m = 0$ (рис. 5.29). Задан интервал (α, β), не включающий начала координат. При каком значении среднего квадратичного отклонения σ вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β) достигает максимума?

Р е ш е н и е. Значение σ найдем, дифференцируя по σ вероятность попадания в интервал (α, β) и приравнивая производную нулю. Имеем:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\frac{\beta}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^{\frac{\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\};$$

$$\frac{d}{d\sigma}[P\{\alpha < X < \beta\}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{\beta}{\sigma^2}\right) - e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{\alpha}{\sigma^2}\right) \right\} = 0;$$

отсюда

$$\beta\, e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}} = \alpha\, e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}$$

и, следовательно,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\ln\beta - \ln\alpha)}} = \sqrt{\frac{\beta+\alpha}{2} \frac{\beta-\alpha}{\ln\beta - \ln\alpha}}.$$

Для малого интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

$$\sigma \approx a\,[1 - (\varepsilon/a)^2/6] \approx a.$$

Например, при $\varepsilon/a < 0{,}24$ формула $\sigma \approx a$ дает погрешность менее 1%.

5.30. Имеется случайная величина X, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием m и средним квадратичным отклонением σ. Требуется приближенно заменить нормальный закон равномерным в интервале (α, β); границы α, β подобрать так, чтобы сохранить неизменными основные характеристики случайной величины X: математическое ожидание и дисперсию.

Р е ш е н и е. Для равномерного распределения на участке (α, β)

$$M[X] = (\alpha + \beta)/2;\ \sigma[X] = (\beta - \alpha)/(2\sqrt{3});\ (\alpha + \beta)/2 = m;$$
$$(\beta - \alpha)/(2\sqrt{3}) = \sigma.$$

Решая эти уравнения относительно α и β, имеем

$$\alpha = m - \sigma\sqrt{3};\ \beta = m + \sigma\sqrt{3}.$$

5.31. Непрерывная случайная величина X имеет плотность $f(x)$. В результате опыта обнаружено, что появилось событие $A =$

$= \{X \in (\alpha, \beta)\}$ [случайная величина X попала на участок (α, β)]. Найти условиую плотиость $f_A(x)$ случайной величииы X при наличии события A.

Решение. $P(A) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$. По интегральной формуле Бейеса (5.0.24) имеем

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x)/\{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\} & \text{при } x \in (\alpha, \beta); \\ 0 & \text{при } x \notin (\alpha, \beta). \end{cases} \quad (5.31)$$

Кривые распределеиия $f(x)$ и $f_A(x)$ показаиы иа рис. 5.31. Ордината кривой $f_A(x)$ в каждой точке равна ордииате кривой $f(x)$, делеииой иа площадь S, заштрихованную на рис. 5.31. Так как $S < 1$, то $f_A(x) > f(x)$ для любого $x \in (\alpha, \beta)$.

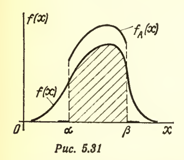


Рис. 5.31

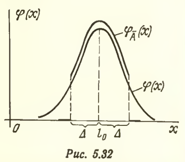


Рис. 5.32

5.32. На производстве изготавливаются одиородиые детали, номинальный размер которых l_0, ио фактически наблюдаются от этого размера случайиые отклоиения, распределенные по нормальиому закоиу с математическим ожидаиием $m = 0$ и средним квадратическим отклонеиием σ. При контроле бракуются все изделия, размеры которых отличаются от номииальиого больше, чем иа допуск Δ. Найти вероятность события $A = \{$изделие будет забраковано$\}$. Найти и построить плотность вероятности для размера изделия, прошедшего контроль.

Решение. $P(A) = P\{|X| > \Delta\} = 1 - 2\Phi(\Delta/\sigma)$; $P(\bar{A}) = 2\Phi(\Delta/\sigma)$.

По формуле (5.31)

$$f_{\bar{A}}(x) = \frac{f(x)}{P(\bar{A})} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}\,\Phi(\Delta/\sigma)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{при } |x| < \Delta.$$

Размер L изделия, прошедшего контроль, равен ошибке X, плюс номинал l_0 и имеет условную плотность

$$\varphi_{\bar{A}}(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}\,\Phi(\Delta/\sigma)} e^{-\frac{(x-l_0)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{при } x \in (l_0 + \Delta, l_0 + \Delta),$$

показанную на рис. 5.32.

5.33. Надежность p радиотехнического устройства зависит как от общего времени τ, прошедшего с момента включения устройства, так и от того, вышел ли из строя в какой-то момент $t < \tau$ стабилизатор напряжения. Если стабилизатор напряжения не вышел из строя до момента τ, надежность задается функцией $p = p_0(\tau)$; если же он вышел из строя в момент $t < \tau$, то надежность есть функция двух аргументов; $p = p_1(\tau, t)$. Время безотказной работы стабилизатора есть случайная величина T с плотностью $f(t)$. Найти функцию распределения $F_\Theta(x)$ времени Θ безотказной работы устройства и его математическое ожидание m_Θ.

Р е ш е н и е. Полную надежность устройства (вероятность его безотказной работы в течение времени τ) найдем по интегральной формуле полной вероятности:

$$p(\tau) = \int_0^\tau p(t, \tau) f(t)\, dt + p_0(\tau) \int_\tau^\infty f(t)\, dt.$$

Функция распределения времени Θ

$$F_\Theta(x) = \mathrm{P}\{\Theta < x\} = 1 - p(x).$$

Так как величина Θ неотрицательна, то (см. задачу 5.28)

$$m_\Theta = \mathrm{M}[\Theta] = \int_0^\infty [1 - F_\Theta(x)]\, dx = \int_0^\infty p(\tau)\, d\tau.$$

5.34. Ожидается поступление по радиоканалу какого-то сообщения S; момент T поступления этого сообщения случаен и имеет плотность $f(t)$. В какой-то момент τ обнаружено, что сообщение еше не поступило. Найти при этом условии плотность распределения $\varphi(t)$ времени Θ, которое остается до поступления сообщения S.

Р е ш е н и е. По интегральной формуле Бейеса $f_A(t)$ — условная плотность величины T при условии, что произошло событие $A = \{$до момента τ сообщение не поступило$\}$, равна

$$f_A(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{f(t)}{1 - \int_0^\tau f(t)\, dt} & \text{при } t > \tau; \\ 0 & \text{при } t < \tau. \end{cases}$$

Так как $\Theta = T - \tau$, то

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{1 - \int_0^\tau f(t)\, dt} & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

На рис. 5.34 изображены $f(t)$ и $\varphi(t)$; для закона $\varphi(t)$ начало координат совмещено с точкой τ.

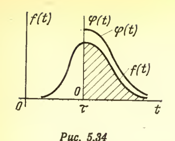


Рис. 5.34

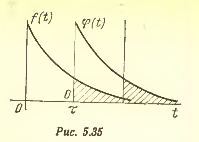


Рис. 5.35

5.35. Момент T наступления какого-то события A есть случайная величина, распределенная по показательному закону: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$. В момент τ стало известно, что событие A еще не произошло. Найти условную плотность $\varphi(t)$ времени Θ, которое осталось до наступления события.

Решение. Наблюдалось событие B = {событие A еще не наступило до момента τ}.

$$P(B) = 1 - \int_0^\tau f(t)\,dt = e^{-\lambda\tau}.$$

$$f_B(t) = f(t)/P(B) = \lambda\, e^{-\lambda t}/e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda(t-\tau)} \quad (t > \tau).$$

Случайная величина $\Theta = T - \tau$ имеет условную плотность

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{при} \quad t > 0,$$

т. е. показательное распределение, совпадающее с $f(t)$ (см. рис. 5.35). Таким образом, условное распределение времени Θ, оставшегося до наступления события, при показательном распределении T не зависит от того, сколько времени мы уже ожидали появления события. Показательное распределение — единственное, обладающее таким свойством. Напомним, что интервал времени между двумя соседними событиями в простейшем потоке распределен именно по показательному закону: время, оставшееся до наступления очередного события не зависит от того, сколько времени мы его уже ожидаем (это следует из отсутствия последействия в простейшем потоке).

5.36. Вероятность отказа радиолампы в момент включения зависит от напряжения U в схеме и равна $q(U)$. Напряжение U случайно и имеет нормальное распределение с параметрами u_0 и σ_u. Найти полную вероятность q отказа радиолампы в момент включения.

Решение. По интегральной формуле полной вероятности (5.0.23)

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} q(u) f(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(u)\, e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2\sigma_u^2}}\,du.$$

5.37. Случайное напряжение U, имеющее плотность $f(u)$, пропускается через ограничитель, который «срезает» все значения напряже-

ния, меньшие чем u_1, и бо́льшие чем u_2, в первом случае повышая его до u_1, а во втором — понижая до u_2. Найти распределение случайной величины $\widetilde{U}$ — напряжения, прошедшего через ограничитель, и найти его математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

$$\widetilde{U} = \begin{cases} u_1 \text{ при } U < u_1; \\ U \text{ при } u_1 < U < u_2; \\ u_2 \text{ при } U > u_2, \end{cases}$$

Случайная величина $\widetilde{U}$ есть величина смешанного типа; два ее значения u_1 и u_2 имеют отличные от нуля вероятности p_1, p_2; для всех значений u между u_1 и u_2 функция распределения $\widetilde{F}(u)$ величины $\widetilde{U}$ непрерывна и совпадает с

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u)\,du; \quad p_1 = \int_{-\infty}^{u_1} f(u)\,du; \quad p_2 = \int_{u_2}^{\infty} f(u)\,du.$$

График функции $\widetilde{F}(u)$ показан на рис. 5.37.

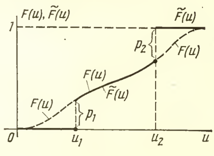


Рис. 5.37

$$\mathrm{M}[U] = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \int_{u_1}^{u_2} u f(u)\,du;$$

$$\mathrm{D}[U] = \alpha_2[U] - (\mathrm{M}[U])^2;$$

$$\alpha_2[U] = u_1^2 p_1 + u_2^2 p_2 - \int_{u_1}^{u_2} u^2 f(u)\,du.$$

5.38. По радиоканалу передается сообщение длительностью l (рис. 5.38, a). Для того чтобы «забить» это сообщение, осуществляется помеха длительностью $b > l$, рассчитанная так, чтобы центр помехи O_1 совпал с центром сообщения O.

Фактически из-за случайных ошибок центр помехи смещен относительно центра сообщения на X. Случайная величина X распределена нормально с параметрами $m = 0$, $\sigma = l/2$. Найти распределение случайной величины U — длины части сообщения, «забитого» помехой,

найти математическое ожидание m_u, дисперсию D_u и среднее квадратическое отклонение σ_u.

Р е ш е н и е. Случайная величина U — смешанная; она принимает два значения: 0 и l с вероятностями, отличными от нуля; на участке от 0 до l функция распределения $F(u)$ непрерывна. Помеха b не затрагивает сообщение l $(U = 0)$, если ее центр отстоит от 0 дальше чем на $(b + l)/2$.

$$p_0 = \mathrm{P}\{U = 0\} = \mathrm{P}\left\{|X| > \frac{b+l}{2}\right\} = 1 - \mathrm{P}\left\{|X| < \frac{b+l}{2}\right\} = \\ = 1 - 2\Phi\left(\frac{b+l}{2\sigma}\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{b+l}{l}\right).$$

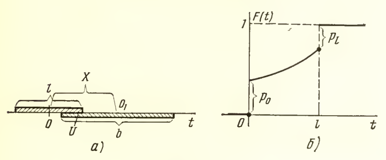


Рис. 5.38

Для того чтобы помеха b полностью забила все сообщение l $(U = l)$, нужно, чтобы ее центр O_1 отстоял от O меньше чем на $(b - l)/2$:

$$p_l = \mathrm{P}\{U = l\} = \mathrm{P}\left\{|X| < \frac{b-l}{2}\right\} = 2\Phi\left(\frac{b-l}{l}\right).$$

При $(b - l)/2 < X < (b + l)/2$ забитой помехами оказывается какая-то часть U сообщения l $(0 < U < l)$. Найдем функцию распределения случайной величины U: $\mathrm{P}\{U < u\}$ при $0 < u < l$. Чтобы забитая помехой часть была меньше u, нужно, чтобы центр помехи O_1 отстоял от центра сообщения дальше чем на $(b + l)/2 - u = (b + l - 2u)/2$:

$$F(u) = \mathrm{P}\left\{|X| > \frac{b+l-2u}{2}\right\} = 1 - \mathrm{P}\left\{|X| < \frac{b+l-2u}{2}\right\} = \\ = 1 - 2\Phi\left(\frac{b+l-2u}{l}\right).$$

Итак, на участке от 0 до l $F(u) = 1 - 2\Phi\left(\frac{b+l-2u}{l}\right)$ (рис. 5.38, *б*).

Чтобы найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины U, надо будет найти $F'(u)$ на участке $(0, l)$. Учитывая, что

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,\ \Phi\left(\frac{b+l-2u}{l}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{b+l-2u}{l}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

и дифференцируя $F(u)$ по переменной u, входящей в верхний предел, получим:

$$F'(u)\,du=\frac{4}{l\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-(b+l-2u)^2}{2l^2}}\,du\quad (0<u<l);$$

$$\mathrm{M}[U]=0\cdot p_0+lp_l+\int_0^l uF'(u)\,du;$$

$$\alpha_2[U]=0\cdot p_0+l^2 p_l+\int_0^l u^2F'(u)\,du;$$

$$\mathrm{D}[U]=\alpha_2[U]-(\mathrm{M}[U])^2;\ \sigma_u=\sqrt{\mathrm{D}[U]}.$$

5.39. Случайная величина X с вероятностью p_1 имеет плотность $f_1(x)$, с вероятностью p_2 — плотность $f_2(x)$, ..., с вероятностью p_i — плотность $f_i(x)$ $(i=1, \ldots, n)$. Найти полную (среднюю) плотность случайной величины X.

Решение. Найдем элемент вероятности $f(x)dx$ по формуле полной вероятности с гипотезами $H_i=$ {плотность случайной величины есть $f_i(x)$} $(i=1, \ldots, n)$. По формуле полной вероятности

$$f(x)\,dx=\sum_{i=1}^n p_i f_i(x)\,dx,$$

откуда

$$f(x)=\sum_{i=1}^n p_i f_i(x).$$

Рис. 5.39

В частности, если гипотезы две и их вероятности равны $p_1=p_2=1/2$, то $f(x)$ есть полусумма плотностей $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (рис. 5.39). Наличие двух «горбов» на кривой распределения всегда наводит на мысль о том, что распределение получено усреднением двух разнохарактерных распределений.

5.40. Случайная величина X с вероятностью 0,4 имеет нормальное распределение с параметрами $m=0$ и $\sigma=2$, а с вероятностью 0,6 — нормальное распределение с параметрами $m=2$ и $\sigma=1$. Найти плотность распределения случайной величины X.

Ответ: $f(x)=\frac{0{,}4}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{8}}+\frac{0{,}6}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$.

График $f(x)$ показан на рис. 5.40.

5.41. Имеются две случайные величины: дискретная X с рядом распределения

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \right|$$

и непрерывная Y с плотностью $f(y)$. Величины X и Y принимают свои значения независимо друг от друга. Является ли их сумма $Z = X + Y$ дискретной, непрерывной или смешанной случайной величиной? Найти ее распределение.

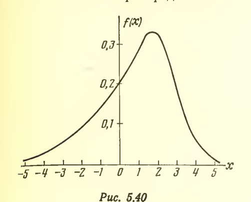


Рис. 5.40

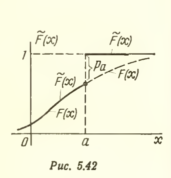


Рис. 5.42

Р е ш е н и е. Случайная величина Z непрерывна. Ее плотность $\tilde{f}(z)$ найдем по формуле полной вероятности с гипотезами: $H_1 = \{X = x_1\}$; $H_2 = \{X = x_2\}, \dots, H_n = \{X = x_n\}$. Условный элемент вероятности случайной величины Z для i-й гипотезы равен

$$f_i(z)\,dz = f(z - x_i)dz.$$

Полный элемент вероятности

$$\tilde{f}(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} p_i f(z - x_i)\,dz,$$

откуда

$$\tilde{f}(z) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(z - x_i).$$

5.42. Дискретной, непрерывной или смешанной является величина $Z = \min\{X, a\}$, где X — непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$; a — неслучайная величина? Найти распределение случайной величины Z, ее математическое ожидание и дисперсию.

Р е ш е н и е. Случайная величина Z определяется формулой

$$Z = \begin{cases} X, & \text{если } X < a; \\ a, & \text{если } X \geqslant a. \end{cases}$$

Значение случайной величины $Z = a$ имеет вероятность

$$p_a = P\{X \geqslant a\} = P\{X > a\} = \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

При $p_a > 0$ случайная величина Z — смешанная, при $p_a = 0$ — непрерывная.

При $z < a$ функция распределения $\tilde{F}(z)$ случайной величины Z совпадает с $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ (рис. 5.42).

$$M[Z] = ap_a + \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx;$$

$$D[Z] = \alpha_2[Z] - (M[Z])^2;\ \alpha_2[Z] = a^2p_a + \int_{-\infty}^{a} x^2 f(x)dx.$$

Если $P\{X \geqslant a\} = 0$, то $Z = \min\{X, a\} = X$; $\tilde{F}(z) = F(z)$.

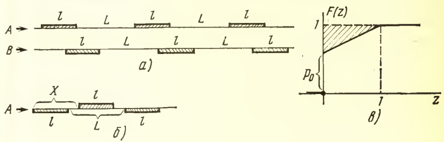


Рис. 5.43

5.43. Из двух источников A и B посылаются периодические сигналы одинаковой длительности l и с одинаковыми интервалами L между ними (рис. 5.43, *а*); $l < L$. Моменты передачи сообщений из источников A и B несогласованны. Сообщения, передаваемые источниками, при наложении искажаются. Найти 1) вероятность R того, что хотя бы одно сообщение будет искажено (полностью или частично); 2) вероятность того, что будет искажено не более 10 % каждого сообщения; 3) функцию распределения случайной величины Z — «доля искаженного текста»; 4) среднюю долю искаженного текста $\bar{z}$.

Решение. Пусть ось B (см. рис. 5.43, *а*) случайно накладывается на ось A. Так как начала и концы всех сообщений связаны функционально, то достаточно будет рассмотреть на оси A только одну пару соседних отрезков: l — сообщение, L — промежуток (рис. 5.43, *б*). Выберем в качестве начала отсчета начало промежутка l на оси A и обозначим X абсциссу начала ближайшего по времени промежутка l на оси B. Величина X распределена с постоянной плотностью на участке $L + l$. Очевидно, неналожение сообщений будет иметь место в случае, когда $l < X < L$; вероятность этого

$$p_0 = (L - l)/(L + l);\quad R = 1 - p_0 = 1 - (L - l)/(L + l).$$

Для вычисления вероятности p того, что сообщения перекроются не более чем на 10%, нужно увеличить «благоприятный» неперекрытию отрезок $L - l$ на два отрезка длиной $0,1l$; получим $L - l + 2 \times 0,1l = L - 0,8l$; $p = (L - 0,8l)/(L + l)$. Случайная величина Z — доля искаженных сообщений — есть величина смешанного типа; ее значение $z = 0$ имеет отличную от нуля вероятность $p_0 = (L - l)/(L + l)$; при $0 < z < 1$ $F(z) = [L - l(1 - 2z)]/(L + l)$; при $z = 1$ это выражение обращается в единицу: $F(1) = 1$, а между $z = 0$ и $z = 1$ возрастает линейно (рис. 5.43, *в*).

Математическое ожидание случайной величины Z равно площади, заштрихованной на рис. 5.43, *в*, т. е. $\bar{z} = [1 - (L - l)/(L + l)]/2 = l/(L + l)$.

5.44. Имеется непрерывная случайная величина X с плотностью $f(x)$ (рис. 5.44, *а*). Наблюденное значение случайной величины сохраняется, если оно попало в интервал (x_1, x_2), и отбрасывается, если оно вышло за пределы интервала (x_1, x_2). Получается новая случайная величина $\tilde{X}$ («урезанная» случайная величина X) с диапазоном значений от x_1 до x_2. Найти плотность $\tilde{f}(x)$ случайной величины $\tilde{X}$.

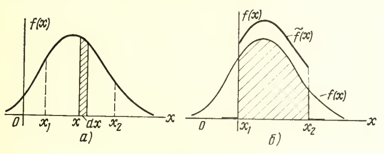


Рис. 5.44

Решение. Искомая плотность $\tilde{f}(x)$ есть не что иное, как условная плотность величины X при условии, что она попала на участок (x_1, x_2). Вычислим элемент вероятности $f(x)dx$ для участка $(x, x + dx) \subset (x_1, x_2)$ (см. рис. 5.44, *а*). По правилу умножения вероятностей

$$f(x)dx = \mathrm{P}\{X \in (x_1, x_2)\}\tilde{f}(x)dx,$$

где $\tilde{f}(x)dx$ — условный элемент вероятности — вероятность того, что величина X попала на участок $(x, x + dx)$ при условии, что $X \in (x_1, x_2)$, и

$$\mathrm{P}\{X \in (x_1, x_2)\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx; \quad \tilde{f}(x) = f(x) \Big/ \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Кривая $\tilde{f}(x)$ подобна кривой $f(x)$ и получается из нее делением каждой ординаты на площадь, заштрихованную на рис. 5.44, *б* (см. утолщенную линию на рис. 5.44, *б*); вне участка (x_1, x_2) $\tilde{f}(x) = 0$.

5.45. Одна женщина утверждает: «Мой муж среднего роста, а ведь большинство мужчин ниже среднего роста». Бессмысленно ли это утверждение?

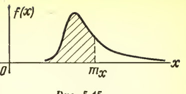


Рис. 5.45

Р е ш е н и е. Утверждение не бессмысленно и может быть даже справедливым, если плотность распределения роста X мужчин несимметрична относительно среднего значения (математического ожидания), как, например, показано на рис. 5.45. Площадь, заштрихованная на рис. 5.45, равна средней доле мужчин ниже среднего роста m_x, и она больше площади, оставшейся незаштрихованной.

5.46. В теории надежности технических устройств в качестве закона распределения времени безотказной работы устройства часто применяется з а к о н В е й б у л л а с функцией распределения

$$F(x)=1-e^{-\alpha x^n}\ (x>0), \qquad (5.46)$$

где $\alpha>0$ — некоторая константа; n — целое положительное число. Найти 1) плотность $f(x)$; 2) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, распределенной по закону Вейбулла:

Р е ш е н и е.

$$1)\ f(x)=dF(x)/dx=n\alpha x^{n-1}e^{-\alpha x^n};\ 2)\ M[X]=\int_0^\infty xn\alpha x^{n-1}e^{-\alpha x^n}dx.$$

Делаем замену переменной: $\alpha x^n=y$, $x=\alpha^{-1/n}y^{1/n}$,

$$dx=\frac{1}{n}\alpha^{-1/n}y^{\frac{1-n}{n}}dy.$$

$$M[X]=\int_0^\infty nye^{-y}\frac{1}{n}\alpha^{-\frac{1}{n}}y^{\frac{1-n}{n}}dy=$$

$$=\alpha^{-\frac{1}{n}}\int_0^\infty y^{\frac{1}{n}}e^{-y}dy=\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\alpha^{-\frac{1}{n}},$$

где $\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ — известная гамма-функция.

$$M[X^2]=\int_0^\infty n\alpha x^{n+1}e^{-\alpha x^n}dx=$$

$$=\int_0^\infty n\alpha\alpha^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}y^{1+\frac{1}{n}}e^{-y}\frac{1}{n}\alpha^{-\frac{1}{n}}y^{\frac{1-n}{n}}dy=\alpha^{-\frac{2}{n}}\int_0^\infty y^{\frac{2}{n}}e^{-y}dy=$$

$$=\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)\alpha^{-\frac{2}{n}};$$

$$D[X]=\alpha^{-2/n}\,[\Gamma(1+2/n)-\{\Gamma(1+1/n)\}^2].$$

5.47. Срок службы технического устройства есть случайная величина T с плотностью $f(t)$ $(t>0)$. В момент t_0, если устройство до этого момента еще не отказало, проводится его профилактический ремонт, после чего оно работает еще время T_1 с плотностью $f_1(t)$. Если устройство отказало в какой-то момент $u<t_0$, то немедленно производится аварийный ремонт, после которого устройство работает еще случайное время T_2 с плотностью $f_2(t)$ (второго ремонта уже на проводится). Найти математическое ожидание времени θ, которое проработает устройство (в него не включается время, затрачиваемое на ремонт).

Решение. Пусть T приняло значение $t<t_0$; при этой гипотезе условное математическое ожидание величины Θ будет $M[\Theta|t]=t+m_2$, где $m_2=\int\limits_0^\infty tf_2(t)dt$ — математическое ожидание времени работы устройства после ремонта. Если же $t\geqslant t_0$, то естественного отказа устройства до момента t_0 не произойдет, и $M[\Theta|t]=t_0+m_1$, где $m_1=\int\limits_0^\infty tf_1(t)dt$. Следовательно,

$$M[\Theta|t]=\begin{cases} t=m_2 & \text{при } t<t_0;\\ t_0+m_1 & \text{при } t\geqslant t_0.\end{cases}$$

Полное (безусловное) математическое ожидание величины Θ

$$M[\Theta]=\int\limits_0^{t_0}(t+m_2)f(t)\,dt+\int\limits_{t_0}^{\infty}(t_0+m_1)f(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{t_0}tf(t)\,dt+m_2\int\limits_0^{t_0}f(t)\,dt+(t_0+m_1)\int\limits_{t_0}^{\infty}f(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{t_0}tf(t)\,dt+m_2P\{T<t_0\}+(t_0+m_1)P\{T>t_0\}=$$

$$=\int\limits_0^{t_0}tf(t)\,dt+m_2F(t_0)+(t_0+m_1)\left(1-F(t_0)\right),$$

где $F(t)$ — функция распределения случайной величины T:

$$F(t)=\int\limits_0^t f(t)\,dt.$$

5.48. По радиоканалу передается последовательность сообщений одинаковой длины l (рис. 5.48, *а*) со случайными промежутками $T_1, T_2, \ldots$ между ними. Интервалы $T_1, T_2, \ldots$ имеют одинаковое рас-

пределение. Время от времени в сообщение вмешиваются случайные помехи (рис. 5.48, *б*). Моменты возникновения и прекращения помех никак не связаны с последовательностью сообщений. Длительность D каждой помехи случайна и распределена по показательному закону с параметром μ; длительность интервала между помехами тоже случайна и распределена по показательному закону с параметром ν. Если помеха захватывает все сообщение или его часть, искажается либо все сообщение, либо соответствующая его часть. Найти среднюю долю сообщения, которая будет искажена помехами, т. е. отношение средней длины искаженного текста к средней длине переданного.

Рис. 5.48

Р е ш е н и е. $1/\mu$ — средняя продолжительность помехи; $1/\nu$ — средняя длина интервала между ними; средняя доля времени на оси $0t$, занятого помехами, равна

$$\frac{1/\mu}{1/\mu+1/\nu}=\frac{\nu}{\mu+\nu}.$$

Очевидно, что та же средняя доля сообщений будет искажена помехами независимо от распределений их длительности и продолжительности интервалов между ними, если $\mu = 1/M[D]$, $\nu = 1/M[T]$.

5.49. За время τ (продолжительность наблюдения) сигнал приходит с вероятностью p; сигнал появляется в любой точке промежутка τ с одинаковой плотностью вероятности. Известно, что в момент $t<\tau$ (рис. 5.49) сигнал еще не появился. Найти вероятность Q того, что он появится за оставшееся время $\tau - t$.

Р е ш е н и е. Q есть не что иное, как условная вероятность того, что сигнал появится за время $\tau - t$, если известно, что до момента t

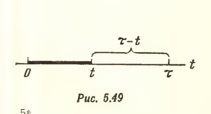


Рис. 5.49

Рис. 5.50

5*

сигнал еще не появлялся. Полная вероятность p появления сигнала за время τ равна вероятности tp/τ, того, что он придет за время t, плюс вероятность $1-tp/\tau$ того, что он не придет за это время, умноженная на Q. Отсюда

$$p=\frac{t}{\tau}\,p+\left(1-\frac{t}{\tau}\,p\right)Q;\quad Q=\frac{p\,(1-t/\tau)}{1-tp/\tau}.$$

5.50. Момент прихода сигнала — случайная величина T с плотностью $f\,(t)$. В какой-то момент $t<\tau$ сигнал еще не пришел. Найти вероятность того, что он придет за последующий участок времени от t до τ (рис. 5.50).

Решение. Задача сходна с предыдущей. Обозначим p вероятность того, что сигнал придет за время τ; она равна $p=\int\limits_0^\tau f\,(t)dt$. Рассуждая, как в предыдущей задаче, найдем полную вероятность p появления сигнала за время τ; она равна вероятности p_t того, что сигнал появится до момента t: $p_t=\int\limits_0^t f\,(t)dt$, плюс вероятность противоположного события $1-p_t$, умноженная на условную вероятность Q того, что сигнал придет за оставшееся время $(\tau-t)$, т. е.

$$\int\limits_0^\tau f\,(t)\,dt=\int\limits_0^t f\,(t)\,dt+\left\{1-\int\limits_0^t f\,(t)\,dt\right\}Q,$$

откуда

$$Q=\frac{\int\limits_0^\tau f\,(t)\,dt-\int\limits_0^t f\,(t)\,dt}{1-\int\limits_0^t f\,(t)\,dt}=\frac{\int\limits_t^\tau f\,(t)\,dt}{1-F\,(t)}=\frac{F\,(\tau)-F\,(t)}{1-F\,(t)},$$

где $F\,(t)$ — функция распределения случайной величины T.

Если $f\,(t)$ — показательное распределение с параметром λ, то $Q=1-e^{-\lambda(\tau-t)}$.

5.51. В условиях предыдущей задачи $f\,(t)$ — нормальное распределение с параметрами m, σ; $t=m$ (т. е. сигнал не пришел за время m)*). Найти вероятность того, что он придет за промежуток времени длиной σ, непосредственно следующий за $t=m$.

Решение. $\tau=m+\sigma$;

$$\int\limits_m^{m+\sigma} f\,(t)\,dt=\Phi\left(\frac{m+\sigma-m}{\sigma}\right)-\Phi\,(0)=\Phi\,(1)\approx 0{,}341;$$

$$Q\approx 0{,}341/0{,}5=0{,}682.$$

---

*) Задача имеет смысл, только когда T—величина практически неотрицательная, т. е. при $m-3\sigma>0$.

ГЛАВА 6

СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ)

6.0. Система двух случайных величин (X,Y) геометрически интерпретируется как *случайная точка* с координатами (X,Y) на плоскости xOy (рис. 6.0.1) или случайный вектор, направленный из начала координат в точку (X,Y), составляющие которого представляют собой случайные величины X и Y (рис. 6.0.2).

Система трех случайных величин (X, Y, Z) изображается *случайной точкой* или *случайным вектором в трехмерном пространстве*; система n случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — *случайной точкой* или *случайным вектором в пространстве n измерений.*

Рис. 6.0.1

Рис. 6.0.2

Совместной функцией распределения двух случайных величин (X, Y) (или функцией распределения системы двух случайных величин) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}. \qquad (6.0.1)$$

Геометрически $F(x,y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрант с вершиной (x, y), заштрихованный на рис. 6.0.3. Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник R со сторонами, параллельными осям координат, включающий свою нижнюю и левую границы, но не включающий верхнюю и правую (рис. 6.0.4), выражается через функцию распределения формулой

$$P\{(X,Y) \in R\} = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma). \qquad (6.0.2)$$

Функция распределения $F(x,y)$ обладает свойствами: 1) $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$; 2) $F(+\infty, +\infty) = 1$; 3) $F(x, +\infty) = F_1(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y)$, где $F_1(x)$, $F_2(y)$ — функции распределения случайных величин X и Y; 4) $F(x, y)$ — неубывающая функция аргументов x и y; 5) $F(x, y)$ непрерывна слева по каждой координате; 6) $F(\beta,\delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma) \geqslant 0$ для любых $\alpha \leqslant \beta$, $\gamma \leqslant \delta$ (последнее свойство означает, что вероятность попадания в прямоугольник неотрицательна).

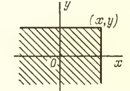


Рис. 6.0.3

Рис. 6.0.4

Совместной плотностью двух непрерывных случайных величин (или плотностью распределения системы) называется предел отношения вероятности попадания случайной точки в элементарный участок плоскости Δx, Δy, примыкающий к точке (x, y), к площади этого участка, когда его размеры Δx, Δy стремятся к нулю. Совместная плотность выражается через совместную функцию распределения:

$$f(x, y) = \partial^2 F(x, y)/\partial x \partial y = F''_{xy}(x, y), \tag{6.0.3}$$

т. е. представляет собой вторую смешанную частную производную функции распределения по обоим аргументам.

Поверхность, изображающая функцию $f(x, y)$, называется *поверхностью распределения.*

Элементом вероятности для системы двух случайных величин называется величина $f(x,y)\,dxdy$, приближенно выражающая вероятность попадания случайной точки (X,Y) в элементарный прямоугольник со сторонами dx, dy, примыкающий к точке (x, y).

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в произвольную область D выражается формулой

$$\mathrm{P}\{X, Y) \in D\} = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{6.0.4}$$

Свойства совместной плотности:

$$1)\ f(x, y) \geqslant 0; \quad 2)\ \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dxdy = 1.$$

Совместная функция распределения выражается через совместную плотность:

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{6.0.5}$$

Плотности отдельных величин, входящих в систему, выражаются через совместную плотность:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy; \quad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx. \tag{6.0.6}$$

Условным законом распределения случайной величины, входящей в систему, называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные функции распределения случайных величин X и Y, входящих в систему, обозначаются $F_1(x \mid y)$ и $F_2(y \mid x)$, а условные плотности распределения — $f_1(x \mid y)$ и $f_2(y \mid x)$.

Теорема умножения плотностей:

$$f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y \mid x) \text{ или } f(x,y) = f_2(y)\, f_1(x \mid y). \tag{6.0.7}$$

Выражения для условных плотностей через безусловные:

$$f_2(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \text{ при } f_1(x) \neq 0; \quad f_1(x, y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \text{ при } f_2(y) \neq 0. \tag{6.0.8}$$

Случайные величины X, Y называются *независимыми,* если условный закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение примет другая:

$$f_1(x \mid y) = f_1(x) \text{ или } f_2(y \mid x) = f_2(y). \tag{6.0.9}$$

Для независимых случайных величин теорема умножения плотностей принимает вид

$$f_1(x,y) = f_1(x)\, f_2(y). \tag{6.0.10}$$

Начальным моментом порядка $k+s$ системы (X,Y) называется величина

$$\alpha_{ks}[X, Y] = \mathrm{M}[X^k Y^s]. \tag{6.0.11}$$

Центральным моментом порядка $k+s$ системы (X, Y) называется величина

$$\mu_{ks}[X, Y] = \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}{}^k \overset{\circ}{Y}{}^s]. \qquad (6.0.12)$$

Расчетные формулы для определения моментов:
а) для дискретных случайных величин

$$\alpha_{ks}[X, Y] = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}; \qquad (6.0.13)$$

$$\mu_{ks}[X, Y] = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij}, \qquad (6.0.14)$$

где $p_{ij} = \mathrm{P}\{X = x_i, \ Y = y_j\}$;
б) для непрерывных случайных величин

$$\alpha_{ks}[X, Y] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int x^k y^s f(x, y)\, dx dy; \qquad (6.0.15)$$

$$\mu_{ks}[X, Y] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y)\, dx dy, \qquad (6.0.16)$$

где $f(x, y)$ — совместная плотность.

Порядком момента $\alpha_{ks}[X, Y]$ или $\mu_{ks}[X, Y]$ называется сумма индексов k и s.

Корреляционным моментом (или ковариацией) двух случайных величин X, Y называется смешанный центральный момент второго порядка, т. е. μ_{11}:

$$K_{xy} = \mu_{11}[X, Y] = \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}]. \qquad (6.0.17)$$

Величину K_{xy} удобно вычислять через второй смешанный начальный момент:

$$K_{xy} = \alpha_{11}[X, Y] - m_x m_y, \qquad (6.0.18)$$

или в других обозначениях

$$K_{xy} = \mathrm{M}[X \cdot Y] - \mathrm{M}[X] \cdot \mathrm{M}[Y]. \qquad (6.0.19)$$

Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

Коэффициентом корреляции (или нормированным корреляционным моментом) r_{xy} двух случайных величин X, Y называется безразмерная величина

$$r_{xy} = K_{xy}/(\sigma_x \sigma_y), \qquad (6.0.20)$$

где $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\mu_{20}[X, Y]}$; $\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{\mu_{02}[X, Y]}$.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами.

Случайные величины X, Y называются *некоррелированными*, если их корреляционный момент (или, что равносильно, коэффициент корреляции) равен нулю.

Из независимости случайных величин следует их некоррелированность; напротив, из некоррелированности случайных величин еще не следует их независимость.

Если случайные величины X, Y связаны линейной функциональной зависимостью вида $Y = aX + b$, где a, b не случайны, то их коэффициент корреляции $r_{xy} = \pm 1$, где знак «+» или «—» берется в соответствии со знаком коэффициента a. Для любых двух случайных величин $|r_{xy}| \leqslant 1$.

Совместной функцией распределения n случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется вероятность совместного выполнения n неравенств вида $X_i < x_i$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{P}\{X_1 < x_1, \ X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}. \qquad (6.0.21)$$

Совместной плотностью n случайных величин называется n-я смешанная частная производная функции распределения:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2, \ldots, \partial x_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (6.0.22)$$

Функция распределения $F_i(x_i)$ одной из величин X_i, входящих в систему, получается из $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если положить в ней все аргументы, кроме x_i, равными $+\infty$:

$$F_i(x_i) = F(+\infty, +\infty, \ldots, x_i, +\infty, \ldots, +\infty). \qquad (6.0.23)$$

Плотность отдельной величины X_i, входящей в систему $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, выражается через совместную плотность формулой

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(n-1)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n. \qquad (6.0.24)$$

Плотность отдельной подсистемы $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, входящей в систему $(X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_n)$, выражается формулой

$$f_{1,\ldots,k}(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(n-k)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\, dx_{k+1} \ldots dx_n. \qquad (6.0.25)$$

Условная плотность подсистемы $X_1, \ldots, X_k$ при фиксированных значениях всех остальных случайных величин выражается формулой

$$f_{1,\ldots,k}(x_1, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f_{k+1,\ldots,n}(x_{k+1}, \ldots, x_n)}. \qquad (6.0.26)$$

Если независимые величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ независимы, то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ldots f_n(x_n). \qquad (6.0.27)$$

Вероятность попадания случайной точки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в пределы n-мерной области D выражается n-кратным интегралом

$$P\{(X_1, \ldots, X_n) \in D\} = \int \overset{(n)}{\underset{(D)}{\cdots}} \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad (6.0.28)$$

Корреляционной матрицей системы n случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется таблица, составленная из корреляционных моментов всех этих величин, взятых попарно:

$$\| K_{ij} \| = \begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} \ldots K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} \ldots K_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} \ldots K_{nn} \end{Vmatrix},$$

где $K_{ij} = K_{x_i x_j} = M[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j]$ — корреляционный момент случайных величин X_i, X_j.

Корреляционная матрица симметрична $(K_{ij} = K_{ji})$, поэтому обычно заполняется лишь половина таблицы:

$$\begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} \ldots K_{1n} \\ & K_{22} \ldots K_{2n} \\ & \cdots \\ & K_{nn} \end{Vmatrix}.$$

По главной диагонали корреляционной матрицы стоят дисперсии случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$K_{ii} = D[X_i]. \qquad (6.0.29)$$

Нормированной корреляционной матрицей системы n случайных величин называется таблица, составленная из коэффициентов корреляции всех этих величин, взятых попарно:

$$\|r_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ & & 1 & \dots & r_{3n} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где $r_{ij} = K_{ij}/(\sigma_i \sigma_j)$ — коэффициент корреляции величин X_i, X_j.

Нормальный закон распределения для двух случайных величин X, Y (нормальный закон на плоскости) имеет плотность вида

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}, \tag{6.0.30}$$

где m_x, m_y — математические ожидания случайных величин X, Y; σ_x, σ_y — их средние квадратические отклонения; r — их коэффициент корреляции.

Для случайных величин, распределенных по нормальному закону, некоррелированность равносильна независимости. Если случайные величины X, Y не коррелированы (независимы), то $r = 0$ и

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x \sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}. \tag{6.0.31}$$

В этом случае оси $0x$, $0y$ называются *главными осями рассеивания*. Если при этом $m_x = m_y = 0$, то нормальный закон принимает *канонический вид*:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x \sigma_y} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right\}. \tag{6.0.32}$$

Вероятность попадания случайной точки, распределенной по нормальному закону, в прямоугольник R со сторонами, параллельными главным осям рассеивания (см. рис. 6.0.4), выражается формулой

$$P\{(X, Y) \in R\} = \left[\Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{\delta - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\gamma - m_y}{\sigma_y}\right)\right]. \tag{6.0.33}$$

Эллипсом равной плотности (эллипсом рассеивания) называется эллипс, во всех точках которого совместная плотность нормального закона постоянна: $f(x, y) = \text{const}$. Полуоси эллипса пропорциональны σ_x, σ_y: $a = k\sigma_x$; $b = k\sigma_y$.

Вероятность попадания случайной точки, распределенной по нормальному закону, в область E_k, ограниченную эллипсом рассеивания с полуосями a и b равна

$$P\{(X, Y) \in E_k\} = 1 - e^{-k^2/2}, \tag{6.0.34}$$

где k — размеры полуосей эллипса в средних квадратических отклонениях: $k = a/\sigma_x = b/\sigma_y$.

Если $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, рассеивание по нормальному закону называется *круговым*. При круговом нормальном рассеивании с $m_x = m_y = 0$ расстояние R от точки (X, Y) до начала координат (центра рассеивания) распределяется по закону Рэлея:

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \text{ при } r > 0. \tag{6.0.35}$$

Нормальный закон в пространстве трех измерений для независимых случайных величин (X, Y, Z) выражается формулой

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma_x\,\sigma_y\,\sigma_z} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z-m_z)^2}{\sigma_z^2}\right]\right\}. \qquad (6.0.36)$$

Вероятность попадания случайной точки (X, Y, Z) в область E_k, ограниченную эллипсоидом равной плотности с полуосями $a = k\sigma_x$, $b = k\sigma_y$, $c = k\sigma_z$, равна

$$\mathrm{P}\{(X, Y, Z) \in E_k\} = 2\Phi(k) - \sqrt{2/\pi}\, k e^{-k^2/2}. \qquad (6.0.37)$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Передаются два сообщения, каждое из которых может быть независимо от другого либо искажено, либо не искажено. Вероятность события A = {сообщение искажено} для первого сообщения равна p_1, для второго p_2. Рассматривается система двух случайных величин (X, Y), определяемых так:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{если первое сообщение искажено;} \\ 0, & \text{если первое сообщение не искажено;} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{если второе сообщение не искажено;} \\ 0, & \text{если второе сообщение не искажено} \end{cases}$$

(X и Y — индикаторы события A в первом и втором опыте).

Найти совместное распределение пары случайных величин (X, Y), т. е. совокупность вероятностей p_{ij} каждой комбинации их значений. Найти совместную функцию распределения $F(x, y)$.

Решение. Совместное распределение определяется вероятностями:

$$p_{00} = \mathrm{P}\{X = 0,\ Y = 0\} = q_1 q_2;\ p_{10} = \mathrm{P}\{X = 1,\ Y = 0\} = p_1 q_2;$$
$$p_{01} = \mathrm{P}\{X = 0,\ Y = 1\} = q_1 p_2;\ \ p_{11} = \mathrm{P}\{X = 1,\ Y = 1\} = p_1 p_2,$$

где $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$ (см. таблицу).

y_i \ x_i	0	1
0	$q_1 q_2$	$p_1 q_2$
1	$q_1 p_2$	$p_1 p_2$

Распределение на плоскости xOy сосредоточено в четырех точках с координатами (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) (рис. 6.1). Пользуясь геометрической интерпретацией функции распределения как вероятности попадания в квадрант с вершиной в точке (x, y) (см. рис. 6.0.3), получим для $F(x, y)$ следующую таблицу значений:

y \ x	$x \leqslant 0$	$0 < x \leqslant 1$	$1 < x$
$y \leqslant 0$	0	0	0
$0 < y \leqslant 1$	0	$q_1 q_2$	q_2
$1 < y$	0	q_1	1

6.2. Функция распределения системы двух случайных величин (X, Y) равна $F(x, y)$. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D (рис. 6.2), ограниченную справа абсциссой α, снизу и сверху ординатами γ, δ.

Ответ. $P\{(X, Y) \in D\} = F(\alpha, \delta) - F(\alpha, \gamma)$.

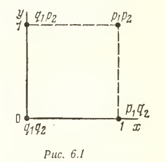


Рис. 6.1

Рис. 6.2

6.3. Имеются две независимые случайные величины X и Y, подчиненные каждая показательному закону

$$f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0); \quad f_2(y) = \mu e^{-\mu y} \quad (y > 0).$$

Написать выражения: 1) совместной плотности; 2) функции распределения системы (X, Y).

Ответ.

$$1)\ f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0; \\ \lambda\mu\, e^{-(\lambda x + \mu y)} & \text{при } x > 0 \text{ и } y > 0; \end{cases}$$

$$2)\ F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y}) & \text{при } x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

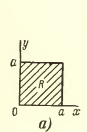
6.4. Система случайных величин (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата R со стороной a (рис. 6.4, a). Написать выражение плотности $f(x, y)$. Построить функцию распределения системы. Написать выражения $f_1(x)$, $f_2(y)$. Определить, являются ли случайные величины X, Y независимыми или зависимыми.

Ответ. $$f(x, y) = \begin{cases} 1/a^2 & \text{при } (x, y) \in R; \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin R; \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0 \quad \text{или} \ y \leqslant 0; \\ xy/a^2 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant a \quad \text{и} \ 0 < y \leqslant a; \\ y/a & \text{при} \quad x > a \quad \text{и} \ 0 < y \leqslant a; \\ x/a & \text{при} \quad 0 < x \leqslant a \quad \text{и} \ y > a; \\ 1 & \text{при} \quad x > a \quad \text{и} \ y > a. \end{cases}$$

Поверхность $F(x, y)$ представлена на рис. 6.4, *б*.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/a & \text{при} \ x \in (0, a); \\ 0 & \text{при} \ x \notin (0, a); \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 1/a & \text{при} \ y \in (0, a); \\ 0 & \text{при} \ y \notin (0, a). \end{cases}$$



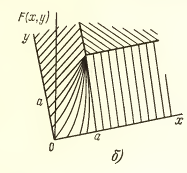


Рис. 6.4

Случайные величины X, Y независимы, так как

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

6.5. Поверхность распределения системы случайных величин (X, Y) представляет собой прямой круговой конус (рис. 6.5, *а*), основанием конуса служит круг K с центром в начале координат и с радиусом r_0. Вне этого круга совместная плотность $f(x, y)$ равна нулю. 1) Написать выражение $f(x, y)$; 2) найти $f_1(x)$, $f_2(y)$; $f_2(y|x)$; $f_1(x|y)$; 3) определить, являются ли случайные величины X, Y зависимыми; 4) определить, являются ли случайные величины X, Y коррелированными.

Решение.

$$1)\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3}{r_0^3 \pi} \left(r_0 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) & \text{при} \ x^2 + y^2 < r_0^2; \\ 0 & \text{при} \ x^2 + y^2 > r_0^2; \end{cases}$$

$$2)\ f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{r_0^3 \pi} \left[r_0 \sqrt{r_0^2 - x^2} - x^2 \ln\left(\dfrac{r_0 + \sqrt{r_0^2 - x^2}}{|x|}\right)\right] & \text{при} \ |x| < r_0; \\ 0 & \text{при} \ |x| > r_0; \end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{r_0^3\pi}\left[r_0\sqrt{r_0^2-y^2}-y^2\ln\left(\dfrac{r_0+\sqrt{r_0^2-y^2}}{|y|}\right)\right] & \text{при } |y|<r_0;\\ 0 & \text{при } |y|>r_0.\end{cases}$$

Далее, при $|x|<r_0$

$$f_2(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{r_0-\sqrt{x^2+y^2}}{r_0\sqrt{r_0^2-x^2}-x^2\ln\left(\dfrac{r_0+\sqrt{r_0^2-x^2}}{|x|}\right)} & \text{при } |y|<\sqrt{r_0^2-x^2};\\ 0 & \text{при } |y|>\sqrt{r_0^2-x^2}\end{cases}$$

и при $|y|<r_0$

$$f_1(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{r_0-\sqrt{x^2+y^2}}{r_0\sqrt{r_0^2-y^2}-y^2\ln\left(\dfrac{r_0+\sqrt{r_0^2-y^2}}{|y|}\right)} & \text{при } |x|<\sqrt{r_0^2-y^2};\\ 0 & \text{при } |x|>\sqrt{r_0^2-y^2};\end{cases}$$

3) так как $f_1(x\mid y)\neq f_1(x)$, то случайные величины X, Y зависимы;

4) находим корреляционный момент K_{xy}; так как $m_x=m_y=0$, то

$$K_{xy}=\iint\limits_{(K)} xyf(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{(K_1)} xyf(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{(K_2)} xyf(x,y)\,dxdy,$$

где K_1 — правая половина круга K; K_2 — левая половина (рис. 6.5, *б*); $f(x,y)$ — функция xy — нечетна относительно аргумента x, поэтому интегралы по K_1 и K_2 отличаются только знаком; в сумме интегралы взаимно уничтожаются, значит, $K_{xy}=0$, и случайные величины X, Y не коррелированы.

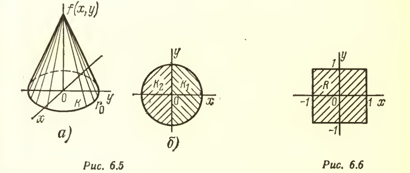


Рис. 6.5 *Рис. 6.6*

6.6. Пара случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность

$$f(x,y)=a/(1+x^2+x^2y^2+y^2).$$

1) Найти коэффициент a; 2) установить, являются ли величины X, Y зависимыми; найти $f_1(x)$; $f_2(y)$; 3) найти вероятность попадания случайной точки $(X\ \ Y)$ в пределы квадрата R, центр которого совпада-

ет с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину $b = 2$ (рис. 6.6).

Решение. 1) Из условия

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy = 1$$

находим $a = 1 / \pi^2$;

2) случайные величины X, Y независимы:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)};\ f_2(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)};\ f(x, y) = f_1(x) f_2(y);$$

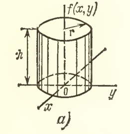
$$3)\ P\{(X, Y) \in R\} = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dxdy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{4}.$$

6.7. Имеются независимые случайные величины X, Y. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами: $m_x = 0$; $\sigma_x = 1/\sqrt{2}$. Случайная величина Y распределена равномерно на интервале (0; 1). Написать выражения для совместной плотности $f(x,y)$ и функции распределения $F(x, y)$ системы (X, Y).

Ответ. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ при $y \in (0,1)$;

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leqslant 0; \\ y\left[\Phi\left(x\sqrt{2}\right) + 0{,}5\right] & \text{при } 0 < y \leqslant 1; \\ \Phi\left(x\sqrt{2}\right) + 0{,}5 & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

6.8. Поверхность распределения $f(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) представляет собой прямой круговой цилиндр, центр основания которого совпадает с началом координат (рис. 6.8, *а*), а высота



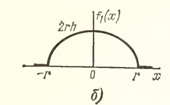


Рис. 6.8

равна h. Определить радиус r цилиндра, найти $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_1(x \mid y)$, $f_2(y \mid x)$; m_x, D_x, K_{xy}.

Решение. Радиус r цилиндра определяется из условия, что объем цилиндра равен единице, откуда $r = \sqrt{1/(\pi h)}$. Совместная плотность

$$f(x, y)=\begin{cases} h, \text{ если } x^2+y^2<r^2; \\ 0, \text{ если } x^2+y^2>r^2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy=\begin{cases} 2\sqrt{r^2-x^2}\, h & \text{при } |x|<r; \\ 0 & \text{при } |x|>r. \end{cases}$$

Аналогично

$$f_2(y)=\begin{cases} 2\sqrt{r^2-y^2}\, h & \text{при } |y|<r; \\ 0 & \text{при } |y|>r. \end{cases}$$

График функции $f_1(x)$ показан на рис. 6.8, *б*. При $|y|<r$

$$f_1(x\mid y)=\frac{f(x, y)}{f_2(y)}=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}} & \text{при } |x|<\sqrt{r^2-y^2}; \\ 0 & \text{при } |x|>\sqrt{r^2-y^2}. \end{cases}$$

Аналогично при $|x|<r$

$$f_2(y\mid x)=\begin{cases} 1/(2\sqrt{r^2-x^2}) & \text{при } |y|<\sqrt{r^2-x^2}; \\ 0 & \text{при } |y|>\sqrt{r^2-x^2}. \end{cases}$$

Математические ожидания равны нулю: $m_x=m_y=0$, так как функция $f(x, y)$ четна как по x, так и по y;

$$D_x=2h\int_{-r}^{r} x^2\sqrt{r^2-x^2}\, dx=hr^4\,\frac{\pi}{4}=\frac{r^2}{4}; \quad \sigma_x=\frac{r}{2}; \quad K_{xy}=0.$$

6.9. Случайная точка (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата R, заштрихованного на рис. 6.9, *а*. Написать выражение совместной плотности $f(x, y)$. Найти выражения плотностей распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$ отдельных величин X, Y, входящих в систему. Написать выражения условных плотностей $f_1(x\mid y)$ и $f_2(y\mid x)$. Зависимы или независимы случайные величины X, Y? Коррелированы они или нет?

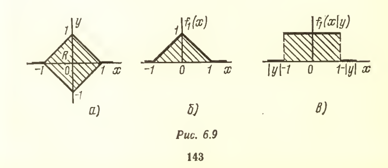


Рис. 6.9

Решение. Площадь квадрата равна двум, поэтому

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } (x, y) \in R; \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin R. \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int\limits_{-(1-x)}^{1-x} dy = 1 - x & \text{при } 0 < x < 1; \\ \frac{1}{2} \int\limits_{-(1+x)}^{1+x} dy = 1 + x & \text{при } -1 < x < 0; \\ 0 & \text{при } x < -1 \text{ или } x > 1, \end{cases}$$

или, короче,

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{при } |x| < 1; \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

График закона $f_1(x)$ показан на рис. 6.9, *б* (закон Симпсона). Аналогично

$$f_2(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{при } |y| < 1; \\ 0 & \text{при } |y| > 1. \end{cases}$$

Далее, при $|y| < 1$

$$f_1(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2(1 - |y|)} & \text{при } |x| < 1 - |y|; \\ 0 & \text{при } |x| > 1 - |y|. \end{cases}$$

График плотности $f_1(x \mid y)$ показан на рис. 6.9, *в*. Аналогично при $|x| < 1$

$$f_2(y \mid x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1 - |x|)} & \text{при } |y| < 1 - |x|; \\ 0 & \text{при } |y| > 1 - |x|. \end{cases}$$

Случайные величины X, Y зависимы, но не коррелированы.

6.10. Совместная плотность случайных величин X, Y задана формулой

$$f(x, y) = \frac{1}{1{,}6\pi} \exp\left\{-\frac{1}{1{,}28}\left[(x-2)^2 - 1{,}2(x-2)(y+3) + (y+3)^2\right]\right\}.$$

Найти коэффицент корреляции величин X, Y.

Ответ. $r_{xy} = 0{,}6$.

6.11. Система случайных величин (X, Y) имеет распределение с плотностью $f(x, y)$. Выразить через плотность $f(x, y)$ вероятности событий: 1) $\{X > Y\}$; 2) $\{X > |Y|\}$; 3) $\{|X| > Y\}$; 4) $\{Y - X > 1\}$.

Решение. На рис. 6.11, *а* — *г* заштрихованы области D_1, D_2, D_3, D_4, попадания в которые соответствуют событиям 1—4. Вероятности попадания в эти области:

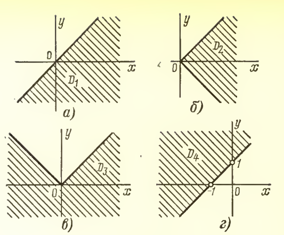


Рис. 6.11

1) $P\{X > Y\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dxdy;$

2) $P\{X > |Y|\} = \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-x}^{x} f(x, y)\, dxdy;$

3) $P\{|X| > Y\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{|x|} f(x, y)\, dxdy;$

4) $P\{Y - X > 1\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{x+1}^{\infty} f(x, y)\, dxdy.$

6.12. Система двух случайных величин X, Y распределена по нормальному закону с параметрами $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $r_{xy} = 0$. Определить вероятности следующих событий:

$$A = \{|Y| < X\};\ B = \{Y < X\};\ C = \{Y < |X|\}.$$

Решение. На рис. 6.12, *а* — *в* показаны области, соответствующие событиям A, B и C. При круговом рассеивании вероятности событий будут: $P(A) = 0{,}25$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = 0{,}75$.

6.13. Случайная величина X имеет плотность $f(x)$; случайная величина Y связана с нею функциональной зависимостью $Y = X^2$. Найти функцию распределения $F(x, y)$ системы (X, Y).

Решение. Исходим из того, что значение случайной величины Y полностью определяется значением случайной величины X. Случайная точка (X, Y) может находиться только на кривой $y = x^2$. Вероятность попадания ее в квадрант с вершиной в точке (x, y) равна вероятности попадания случайной точки на проекцию на ось $0x$ участка кри-

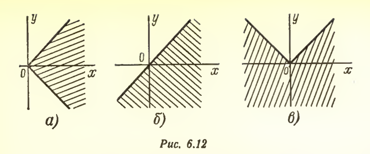


Рис. 6.12

вой $y = x^2$, попадающей в квадрант (рис. 6.13). Пользуясь этой интерпретацией, имеем

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leqslant 0 \text{ или } y > 0 \text{ и } x \leqslant -\sqrt{y}; \\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx & \text{при } y > 0 \text{ и } x > \sqrt{y}; \\ \int\limits_{-\sqrt{y}}^{x} f(x)\,dx & \text{при } y > 0 \text{ и} -\sqrt{y} < x \leqslant \sqrt{y}. \end{cases}$$

6.14. Случайная точка (X, Y) распределена по нормальному закону на плоскости с параметрами $m_x = 1$; $m_y = -1$; $\sigma_x = 1$; $\sigma_y = 2$; $r_{xy} = 0$. Найти вероятность того, что случайная точка попадет внутрь области D, ограниченной эллипсом $(x-1)^2 + (y+1)^2/4 = 1$.

Рис. 6.13

Решение. Область D ограничена эллипсом рассеивания E_1 с полуосями $a = \sigma_x = 1$; $b = \sigma_y = 2$; вероятность попадания в эту область $p = 1 - e^{1/2} \approx 0{,}393$.

6.15. Производится стрельба по точечной (малоразмерной) цели снарядом, зона разрушительного действия которого представляет собой круг радиуса r. Рассеивание точки попадания снаряда круговое с параметрами $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = 2r$ (центр рассеивания совпадает с целью). Сколько выстрелов нужно произвести для того, чтобы разрушить цель с вероятностью $P = 0{,}9$?

Решение. Вероятность разрушения цели при одном выстреле $p = 1 - e^{-(0,5)^2/2} \approx 0{,}118$. Потребное число выстрелов

$$n \geqslant \lg(1-P)/\lg(1-p) = \lg 0{,}1/\lg 0{,}882 \approx 18{,}4, \text{ т. е. } n = 19.$$

6.16. Система трех случайных величин (X, Y, Z) имеет совместную плотность $f(x, y, z)$. Написать выражения: 1) плотности $f_1(x)$ случайной величины X; 2) совместной плотности $f_{2,3}(y, z)$ случайных величин

(Y, Z); 3) условной плотности $f_{2,3}(y, z \mid x)$; 4) условной плотности $f_2(y \mid x, z)$; 5) функции распределения $F(x, y, z)$; 6) функции распределения $F_1(x)$ случайной величины X; 7) функции распределения $F_{1,2}(x, y)$ подсистемы (X, Y).

Ответ.

$$1)\ f_1(x) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dy dz;\quad 2)\ f_{2,3}(y, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dx;$$

$$3)\ f_{2,3}(y, z \mid x) = \frac{f(x, y, z)}{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dy dz};$$

$$4)\ f_2(y \mid x, z) = \frac{f(x, y, z)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dy};$$

$$5)\ F(x, y, z) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{z} f(x, y, z)\, dx dy dz;$$

$$6)\ F_1(x) = F(x, \infty, \infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dx dy dz;$$

$$7)\ F_{1,2}(x, y) = F(x, y, \infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dx dy dz.$$

6.17. Производится стрельба одним снарядом по точечной (малоразмерной) воздушной цели. Рассеивание точки разрыва снаряда происходит по нормальному закону; центр рассеивания совпадает с целью; средние квадратические отклонения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$. Цель поражается, если расстояние между нею и точкой разрыва снаряда не превышает $r_0 = 2\sigma$. Найти вероятность p того, что при одном выстреле цель будет поражена.

Решение. По формуле (6.0.37) для вероятности попадания в эллипсоид равной плотности имеем

$$p = \mathrm{P}\{(X, Y, Z) \in E_2\} = 2\Phi(2) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, 2e^{-2} \approx 0{,}739.$$

6.18. Система трех случайных величин (X, Y, Z) распределена с постоянной плотностью внутри шара радиуса r. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y, Z) внутрь шара, концентричного данному, с радиусом $r/2$.

Ответ. $p = 1/8$.

6.19. Из урны, в которой a белых, b черных и c красных шаров, вынимается один шар. Случайные величины X, Y, Z определяются следующими условиями:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{если появится белый шар;} \\ 0, & \text{если появится черный или красный шар;} \end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, \text{ если появится черный шар;}\\ 0, \text{ если появится белый или красный шар;}\end{cases}$$

$$Z=\begin{cases}1, \text{ если появится красный шар;}\\ 0, \text{ если появится белый или черный шар}\end{cases}$$

(X, Y, Z являются индикаторами событий: {белый шар}; {черный шар}, {красный шар}). Построить корреляционную матрицу и нормированную корреляционную матрицу системы случайных величин X, Y, Z

Решение. Корреляционные моменты определим из таблицы вероятностей отдельных значений X, Y и Z. Обозначим

$$P_{x_i y_j z_k}=\mathrm{P}\{X=x_i,\ Y=y_j,\ Z=z_k\}.$$

Имеем

$$P_{000}=\mathrm{P}\{X=0,\ Y=0,\ Z=0\}=0;$$

$$P_{100}=\mathrm{P}\{X=1,\ Y=0,\ Z=0\}=a/(a+b+c);$$

$$P_{010}=\mathrm{P}\{X=0,\ Y=1,\ Z=0\}=b/(a+b+c);$$

$$P_{001}=\mathrm{P}\{X=0,\ Y=0,\ Z=1\}=c/(a+b+c);$$

$$P_{110}=P_{101}=P_{011}=P_{111}=0;$$

$$m_x=\frac{a}{a+b+c},\quad m_y=\frac{b}{a+b+c},\quad m_z=\frac{c}{a+b+c};$$

$$K_{xy}=\sum_{i,\ j,\ k}(x_i-m_x)(y_j-m_y)P_{x_i y_j z_k}=$$

$$=\left(1-\frac{a}{a+b+c}\right)\left(0-\frac{b}{a+b+c}\right)\frac{a}{a+b+c}+$$

$$+\left(0-\frac{a}{a+b+c}\right)\left(1-\frac{b}{a+b+c}\right)\frac{b}{a+b+c}+$$

$$+\left(0-\frac{a}{a+b+c}\right)\left(0-\frac{b}{a+b+c}\right)\frac{c}{a+b+c}=\frac{-ab}{(a+b+c)^2}.$$

Аналогично

$$K_{xz}=\frac{-ac}{(a+b+c)^2};\quad K_{yz}=\frac{-bc}{(a+b+c)^2}.$$

Далее находим дисперсии

$$D_x=\alpha_2[X]-m_x^2=\frac{a}{a+b+c}-\frac{a^2}{(a+b+c)^2}=\frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2};$$

аналогично

$$D_y=b(a+c)/(a+b+c)^2;\ D_z=c(a+b)/(a+b+c)^2.$$

Корреляционная матрица

$$\|K\|=\begin{Vmatrix}D_x & K_{xy} & K_{xz}\\ & D_y & K_{yz}\\ & & D_z\end{Vmatrix}.$$

Находим коэффициенты корреляции:

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}=\frac{-ab}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}=-\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}.$$

Аналогично $r_{xz} = -\sqrt{\frac{ac}{(a+b)(c+b)}}$; $r_{yz} = -\sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}}$.

Нормированная корреляционная матрица

$$\|r\| = \begin{Vmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ & 1 & r_{yz} \\ & & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.20. Имеется система случайных величин X и Y. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром λ: $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x > 0$. Случайная величина Y при заданном значении $X = x > 0$ распределена также по показательному закону, но с параметром x: $f_2(y \mid x) = xe^{-xy}$ при $y > 0$. Написать совместную плотность $f(x, y)$ величин X, Y; найти плотность $f_2(y)$ случайной величины Y; найти условную плотность $f_1(x \mid y)$.

Решение.

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda x e^{-(\lambda+y)x} & \text{при } x > 0 \text{ и } y > 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0; \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx = \begin{cases} \frac{\lambda}{(\lambda+y)^2} & \text{при } y > 0; \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Далее, при $y > 0$

$$f_1(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} x(\lambda+y)^2 e^{-(\lambda+y)x} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

6.21. Даны две независимые случайные величины: непрерывная X с плотностью $f_1(x)$ и дискретная Y со значениями $y_1, y_2, \ldots, y_n$, имеющими вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Найти функцию распределения системы величин X, Y.

Ответ. $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$, где $F_1(x) = \int_0^x f(x)\,dx$.

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leqslant y_1; \\ p_1 & \text{при } y_1 < y \leqslant y_2; \\ \cdots & \\ \sum_{i=1}^{k-1} p_i & \text{при } y_{k-1} < y \leqslant y_k \quad (k = 2, 3, \ldots, n); \\ \cdots & \\ 1 & \text{при } y > y_n. \end{cases}$$

6.22. Случайная величина X — дискретная величина с двумя значениями x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$), имеющими вероятности p_1 и p_2. Случайная величина Y — непрерывная величина; ее условным распределением при $X = x_i$ служит нормальный закон с математическим ожиданием, равным x_i, и средним квадратическим отклонением, равным σ ($i = 1, 2$).

Найти совместную функцию распределения $F(x, y)$ случайных величин X, Y. Найти плотность $f_2(y)$ случайной величины Y.

Решение. $F(x, y) = P\{X < x\} P\{Y < y \mid X < x\}$. Пусть $x \leqslant x_1$; тогда $P\{X < x\} = 0$ и $F(x, y) = 0$; пусть $x_1 < x \leqslant x_2$; тогда $P\{X < x\} = p_1$ и $F(x, y) = p_1 P\{Y < \mid X = x_1\} = p_1 [\Phi\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right) + 0{,}5]$. При $x > x_2$ по формуле полной вероятности

$$F(x, y) = p_1 \left[\Phi\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right) + 0{,}5\right] + p_2 \left[\Phi\left(\frac{y-x_2}{\sigma}\right) + 0{,}5\right].$$

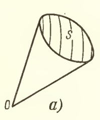
Следовательно,

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant x_1; \\ p_1 \left[\Phi\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right) + 0{,}5\right] & \text{при } x_1 < x \leqslant x_2; \\ p_1 \left[\Phi\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right) + 0{,}5\right] + p_2 \left[\Phi\left(\frac{y-x_2}{\sigma}\right) + 0{,}5\right] & \text{при } x > x_2. \end{cases}$$

Далее, полагая $x = \infty$ и дифференцируя по y, получаем

$$f_2(y) = \frac{d}{dy} F(\infty, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[p_1 e^{-\frac{(y-x_1)^2}{2\sigma^2}} + p_2 e^{-\frac{(y-x_2)^2}{2\sigma^2}}\right].$$

6.23*. Звезды на небесной сфере рассматриваются как пуассоновское поле точек. Число звезд, попадающее в объектив телескопа, является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с параметром λs, где s — площадь участка, вырезаемого на поверхности еди-



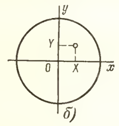


Рис. 6.23

ничной сферы полем зрения телескопа (рис. 6.23, *а*). Поле зрения телескопа имеет координатную сетку (рис. 6.23, *б*). Показать, что при любом положении телескопа координаты (X, Y) ближайшей к перекрестию звезды распределены по нормальному закону с параметрами $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = 1/\sqrt{2\pi\lambda}$.

Решение. В задаче 5.19 было показано, что расстояние R от центра перекрестия до ближайшей к нему точки пуассоновского поля

подчиняется закону Рэлея. Но $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, следовательно, вероятность попадания точки (X, Y) в круг D радиуса r, т. е. $\mathrm{P}\{X^2 + Y^2 < r^2\}$ может быть записана в двух формах

$$\mathrm{P}\{R < r\} = \int_0^r 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} dr,$$

$$\mathrm{P}\{(X, Y) \in D\} = \iint_{(D)} f(x, y)\, dxdy, \qquad (6.23.1)$$

где $f(x, y)$ — совместная плотность величин X, Y. В силу симметрии надо считать, что $f(x, y)$ зависит только от расстояния: $f(x, y) = g(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Переходя к полярным координатам (r, φ), получаем

$$\mathrm{P}\{(X, Y) \in D\} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r g(r)\, dr = 2\pi \int_0^r g(r)\, dr. \qquad (6.23.2)$$

Сравнивая выражения (6.23.1) и (6.23.2), находим: $g(r) = \lambda e^{-\pi\lambda r^2}$ и, значит, $f(x, y) = \lambda\, e^{-\pi\lambda(x^2+y^2)}$, что и требовалось доказать.

6.24. В начале координат O сферической системы координат (r, φ, ϑ) (рис. 6.24), где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\pi/2 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$, находится источник α-частиц. Частицы разлетаются равномерно по всем направлениям. Рассматривается одна частица, полетевшая по случайному направлению, определяемому углами Φ и Θ. Записать совместную плотность распределения $f(\varphi, \vartheta)$ случайных величины Φ, Θ.

Решение. «Равномерный во всех направлениях» разлет α-частиц означает, что для единичного вектора $\mathbf{e}$, исходящего из точки O и определяющего направление полета частицы, все положения его конца на сфере C единичного радиуса обладают одинаковой плотностью вероятности. Следовательно, элемент вероятности $f(\varphi, \vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta$ должен быть пропорционален элементарной площадке ds на сфере C; эта элементарная площадка равна $dS = d\varphi\, d\vartheta \cos\vartheta$, откуда

$$f(\varphi, \vartheta)\, d\varphi d\vartheta = A \cos\vartheta\, d\varphi d\vartheta; \quad f(\varphi, \vartheta) = A \cos\vartheta,$$

где A — коэффициент пропорциональности, определяемый из условия

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi, \vartheta)\, d\vartheta = 1;$$

отсюда $A = 1/(4\pi)$. Таким образом,

$$f(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \cos\vartheta \ \text{ при } \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \text{ и} \\ -\pi/2 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

6.25.*. В условиях предыдущей задачи рассматривается плоскость P, параллельная экваториальной плоскости (в которой отсчитывается угол φ) и проведенная через точку O' со сферическими координатами $r = 1$, $\varphi = 0$, $\vartheta = \pi/2$ (рис. 6.25). В этой плоскости располагается

декартова система координат $x0'y$. Все α-частицы, летящие в верхней полусфере разлета, попадают на плоскость P. Рассматривается одна из таких частиц и соответствующие ей случайные величины — координаты X, Y точки попадания α-частицы на плоскость P. Найти совместную плотность $f(x, y)$ этих случайных величин. Зависимы или нет случайные величины X, Y?

Решение. Найдем элемент вероятности $f(x, y)\,dxdy$, приближенно равный вероятности попадания частицы в элементарную площадку $dxdy$, примыкающую к точке (x, y). Эту вероятность подсчитаем аналогично тому, как мы делали в предыдущей задаче. Найдем

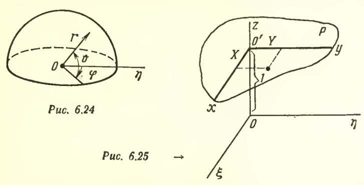


Рис. 6.24

Рис. 6.25 →

площадь ds участка на единичной сфере C такого, что пролетающие через него частицы попадут в нашу элементарную площадку. Этот участок получается центральным проектированием площадки $dxdy$ на сферу C. При таком проектировании площадь множится на косинус угла ϑ между направлением проектирования и плоскостью P, а кроме того, еще уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния R от центра проектирования; элементарная площадка ds на сфере C будет равна

$$ds = \frac{dxdy\cos\vartheta}{R^2} = \frac{dxdy\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2} = \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Чтобы получить элемент вероятности, нужно величину ds разделить на площадь всей верхней полусферы, равную 2π. Получим:

$$f(x, y)\,dxdy = \frac{dxdy}{2\pi\,(1+x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{или} \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi\,(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Случайные величины X, Y зависимы, так как их совместная плотность не распадается на произведение двух функций, из которых одна зависит только от x, а другая — только от y.

6.26. Случайная точка A, изображающая объект на круглом экране радиолокатора радиуса 1 (рис. 6.26, a), равномерно распределена в пределах этого круга. Найти совместную плотность $f(r, \varphi)$ полярных ко-

ординат (R, Φ) точки A. Зависимы или независимы случайные величины R и Φ?

Решение. Рассмотрим в полярной системе координат элементарный «прямоугольник», соответствующий бесконечно малым приращениям dr, $d\varphi$ полярных координат r, φ точки внутри круга (рис. 6.26, *б*). Площадь его (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) равна $rdrd\varphi$. Деля ее на площадь круга, равную π, получаем элемент вероятности

$$f(r, \varphi)\, drd\varphi = rdrd\varphi/\pi,$$

откуда

$$f(r, \varphi) = r/\pi \text{ при } 0 < r < 1,\ 0 < \varphi < 2\pi. \qquad (6.26.1)$$

Плотность распределения $f_1(r)$ найдем, интегрируя (6.26.1) во всем диапазоне изменения φ:

$$f_1(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi}\, d\varphi = 2r \quad \text{при} \quad 0 < r < 1.$$

Аналогично

$$f_2(\varphi) = \int_0^1 \frac{r}{\pi}\, dr = \frac{1}{2\pi} \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Распределение $f_1(r)$ имеет вид прямоугольного треугольника (рис. 6.26, *в*), распределение $f_2(\varphi)$ — равномерное в пределах участка $(0, 2\pi)$.

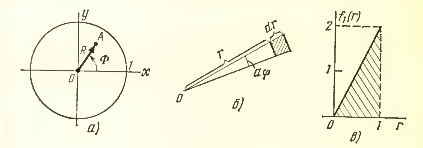


Рис. 6.26

Перемножая $f_1(r)$ и $f_2(\varphi)$, получаем совместную плотность $f(r, \varphi)$ системы (R, Φ); следовательно, случайные величины R, Φ независимы. Заметим, что для такого же равномерного распределения точки в пределах круга ее декартовы координаты X, Y зависимы, в чем мы убедились, решая задачу 6.8.

6.27. В условиях предыдущей задачи радиус экрана равен не единице, а a. Написать выражение совместной плотности полярных координат точки A и их плотностей по отдельности.

Решение. Деля площадь элементарного «прямоугольника» на площадь экрана πa^2 и «сокращая» на $dr d\varphi$, получаем

$$f(r, \varphi) = \frac{r}{\pi a^2} \quad \text{при } 0 < r < a, \ \ 0 < \varphi < 2\pi;$$

$$f_1(r) = \frac{2}{a^2} r \quad \text{при } 0 < r < a;$$

$$f_2(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{при } 0 < \varphi < 2\pi.$$

ГЛАВА 7

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

7.0. Одним из наиболее эффективных средств для решения вероятностных задач является аппарат числовых характеристик, позволяющий находить характеристики интересующих нас случайных величин помимо их законов распределения. В частности, чтобы находить числовые характеристики функций случайных величин, не надо знать законов распределения самих функций, а достаточно знать закон распределения аргумента (аргументов).

Если X — дискретная случайная величина с рядом распределения

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \right| \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right),$$

а величина Y связана с X функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$, то математическое ожидание величины Y равно

$$m_y = \mathrm{M}[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i, \tag{7.0.1}$$

а дисперсия выражается любой из двух формул:

$$D_y = \mathrm{D}[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - m_y]^2 p_i, \tag{7.0.2}$$

$$D_y = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i)]^2 p_i - m_y^2. \tag{7.0.3}$$

Если (X, Y) — система дискретных случайных величин, распределение которой характеризуется вероятностями

$$p_{ij} = \mathrm{P}\{X = x_i, \ Y = y_i\},$$

а $Z = \varphi(X, Y)$, то математическое ожидание величины Z равно

$$m_z = \mathrm{M}[\varphi(X, Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, x_j) p_{ij}, \tag{7.0.4}$$

а дисперсия выражается любой из двух формул:

$$D_y = \mathrm{D}[\varphi(X, Y)] = \sum_i \sum_j [\varphi(x_i, y_j) - m_z]^2 p_{ij}, \tag{7.0.5}$$

$$D_y=\sum_i\sum_j [\varphi(x_i, y_j)]^2 p_{ij}-m_z^2. \qquad (7.0.6)$$

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, а $Y=\varphi(X)$, то математическое ожидание величины Y равно

$$m_y=M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\,dx, \qquad (7.0.7)$$

а дисперсия выражается любой из двух формул:

$$D_y=D[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-m_y]^2 f(x)\,dx, \qquad (7.0.8)$$

$$D_y=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)]^2 f(x)\,dx-m_y^2. \qquad (7.0.9)$$

Если (X, Y) — система непрерывных случайных величин с совместной плотностью $f(x, y)$, а $Z=\varphi(X, Y)$, то математическое ожидание величины Z равно

$$m_z=M[\varphi(X, Y)]=\iint_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y)f(x, y)\,dxdy, \qquad (7.0.10)$$

а дисперсия выражается любой из двух формул:

$$D_z=D[\varphi(X, Y)]=\iint_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x, y)-m_z]^2 f(x, y)\,dxdy, \qquad (7.0.11)$$

$$D_z=\iint_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x, y)]^2 f(x, y)\,dxdy-m_z^2. \qquad (7.0.12)$$

Если $(X_1, \ldots, X_n)$ — система n непрерывных случайных величин с плотностью $f(x_1, \ldots, x_n)$, а $Y=\varphi(X_1, \ldots, X_n)$, то математическое ожидание величины Y равно

$$m_y=M[\varphi(X_1, \ldots, X_n)]=\int_{-\infty}^{\infty}\overset{(n)}{\ldots}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1, \ldots, x_n)f(x_1, \ldots, x_n), \qquad (7.0.13)$$

а дисперсия выражается любой из двух формул:

$$D_y=D[\varphi(X_1, \ldots, X_n)]=\int_{-\infty}^{\infty}\overset{(n)}{\ldots}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x_1, \ldots, x_n)-m_y]^2\times$$
$$\times f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n, \qquad (7.0.14)$$

$$D_y=\int_{-\infty}^{\infty}\overset{(n)}{\ldots}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x_1, \ldots, x_n)]^2 f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n-m_y^2. \qquad (7.0.15)$$

В ряде случаев, для того чтобы получать числовые характеристики функций, не требуется даже знать законов распределения аргументов, а достаточно знать их числовые характеристики. Ниже приводятся основные теоремы о числовых характеристиках.

1. Если c — неслучайная величина, то

$$M[c]=c;\quad D[c]=0. \qquad (7.0.16)$$

2. Если c — неслучайная величина, а X — случайная, то

$$M[cX]=cM[X];\quad D[cX]=c^2D[X]. \qquad (7.0.17)$$

3. Теорема сложения математических ожиданий. *Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:*

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y], \qquad (7.0.18)$$

и вообще

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} M[X_i]. \qquad (7.0.19)$$

4. Математическое ожидание линейной функции нескольких случайных величин

$$Y=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i+b,$$

где a_i и b — неслучайные коэффициенты, равно той же линейной функции от их математических ожиданий:

$$m_y=M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i+b\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i}+b, \qquad (7.0.20)$$

где $m_{x_i}=M[X_i]$. Короче, это правило можно записать так:

$$M[L(X_1, X_2, \ldots, X_n)]=L(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}), \qquad (7.0.21)$$

где L — линейная функция.

5. Математическое ожидание произведения двух случайных величин X, Y выражается формулой

$$M[XY]=M[X]\,M[Y]+K_{xy}, \qquad (7.0.22)$$

где K_{xy} — корреляционный момент величин X, Y. Эту формулу в другом виде можно записать так:

$$K_{xy}=M[XY]-m_x m_y, \qquad (7.0.23)$$

или, имея в виду, что $M[XY]=\alpha_{11}[X, Y]$,

$$K_{xy}=\alpha_{11}[X, Y]-m_x m_y. \qquad (7.0.24)$$

6. Теорема умножения математических ожиданий. *Математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин X, Y равно произведению их математических ожиданий*:

$$M[XY]=M[X]\,M[Y]. \qquad (7.0.25)$$

7. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$—независимые случайные величины, то математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий:

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]=\prod_{i=1}^{n} M[X_i]. \qquad (7.0.26)$$

8. Дисперсия суммы двух случайных величин выражается формулой

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2K_{xy}. \qquad (7.0.27)$$

9. Дисперсия суммы нескольких случайных величин выражается формулой

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i]+2\sum_{i<j} K_{x_i x_j}, \qquad (7.0.28)$$

где $K_{x_i x_j}$ — корреляционный момент случайных величин X_i, X_j.

10. Теорема сложения дисперсий. *Дисперсия суммы двух некоррелированных случайных величин X, Y равна сумме их дисперсий*:

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y], \qquad (7.0.29)$$

и вообще, для некоррелированных случайных величин

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i]. \qquad (7.0.30)$$

11. *Дисперсия линейной функции нескольких случайных величин*

$$Y=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i+b,$$

где a_i, b — неслучайные величины, выражается формулой

$$D_y=\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i+b\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{D}[X_i]+2\sum_{i<j} a_i a_j K_{x_i x_j}. \qquad (7.0.31)$$

В случае, когда величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ некоррелированны,

$$D_y=\mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i+b\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{D}[X_i]. \qquad (7.0.32)$$

12. *При сложении некоррелированных случайных векторов их корреляционные моменты складываются*, т. е. если

$$X=X_1+X_2;\quad Y=Y_1+Y_2;\quad K_{x_1 x_2}=K_{x_1 y_2}=K_{y_1 y_2}=K_{y_1 x_2}=0,$$

то

$$K_{xy}=K_{x_1 y_1}+K_{x_2 y_2}. \qquad (7.0.33)$$

Линеаризация функций. Функция $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ нескольких случайных аргументов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется *почти линейной*, если во всем диапазоне практически возможных значений аргументов она может быть с достаточной для практики точностью линеаризована (приближенно заменена линейной). Это означает, что

$$\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)\approx\varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n})+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m (X_i-m_{x_i}), \qquad (7.0.34)$$

где

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m=\frac{\partial\varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n})}{\partial x_i}$$

частная производная функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по аргументу x_i, в которую вместо каждого аргумента подставлено его математическое ожидание.

Математическое ожидание почти линейной функции $Y=\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ приближенно вычисляется по формуле

$$m_y\approx\varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}). \qquad (7.0.35)$$

Дисперсия почти линейной функции приближенно вычисляется по формуле

$$D_y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m^2 D_{x_i}+2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_m K_{x_i x_j}, \qquad (7.0.36)$$

где D_{x_i} — дисперсия случайной величины X_i; $K_{x_i x_j}$ — корреляционный момент величин X_i, X_j.

В случае, когда случайные аргументы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ некоррелированны,

$$D_y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m^2 D_{x_i}. \qquad (7.0.37)$$

7.1. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

$$X: \left| \begin{array}{c|c|c|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{array} \right|.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2^X$.

Решение. $m_y = 2^{-1} \cdot 0{,}2 + 2^0 \cdot 0{,}1 + 2^1 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$; $D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = (2^{-1})^2 \cdot 0{,}2 + (2^0)^2 \cdot 0{,}1 + (2^1)^2 \cdot 0{,}3 + (2^2)^2 \cdot 0{,}4 - 2{,}4^2 = 1{,}99$.

7.2. Непрерывная случайная величина X распределена в интервале (0; 1) по закону с плотностью $f(x) = 2x$ при $x \in (0;\ 1)$ (рис. 7.2). Найти математическое ожидание и дисперсию квадрата этой случайной величины $Y = X^2$.

Решение.

$$m_y = \alpha_2[X] = \int_0^1 x^2\, 2x\,dx = \frac{1}{2};$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \int_0^1 (x^2)^2\, 2x\,dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

7.3. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ при $x > 0$ $(\lambda > 0)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^{-X}$.

Решение.

$$m_y = \int_0^\infty e^{-x}\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda+1};$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \int_0^\infty e^{-2x}\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx - \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2 = \frac{\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+1)}.$$

7.4. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью $f(x) = \lambda\, e^{\lambda - x}$ при $x > 0$. Установить, при каких условиях существуют и чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины $Y = e^X$.

Решение. $m_y = \int_0^\infty e^x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-1)x}\, dx$; при $\lambda - 1 > 0$, т. е. при $\lambda > 1$, этот интеграл существует и равен $m_y = \lambda/(\lambda - 1)$; при $\lambda \leqslant 1$ он расходится.

$$\alpha_2[Y] = \int_0^\infty e^{2x}\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty e^{-(\lambda-2)x}\, dx.$$

При $\lambda > 2$ этот интеграл существует и равен $\lambda/(\lambda - 2)$, а дисперсия $D_y = \lambda/(\lambda - 2) - [\lambda/(\lambda - 1)]^2 = \lambda/[(\lambda - 2)\ (\lambda - 1)^2]$; при $\lambda \leqslant 2$ интеграл расходится, и дисперсии D_y не существует.

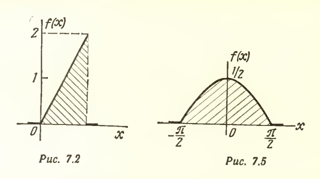


Рис. 7.2 *Рис. 7.5*

7.5. Случайная величина X распределена по закону с плотностью $f(x) = 0{,}5 \cos x$ при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (рис. 7.5). Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \sin X$.

Решение. $m_y = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \cos x dx = 0;$

$$D_y = \alpha_2[Y] = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}.$$

7.6. Случайная величина X распределена по тому же закону, что и в предыдущей задаче. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |\sin X|$.

Решение.

$$m_y = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| \cos x dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2};$$

$$\alpha_2[Y] = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|^2 \cos x dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3};$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \frac{1}{12}.$$

7.7. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно внутри круга K радиуса $r = 1$ (рис. 7.7). Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = XY$.

Решение.

$$f(x, y) = 1/\pi \quad \text{при } (x, y) \in K;$$

$$m_z = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(K)} xy\,dx\,dy = 0; \quad D_z = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(K)} x^2 y^2\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi\,dr = \frac{1}{24}.$$

7.8. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно внутри квадрата R (рис. 7.8). Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = XY$.

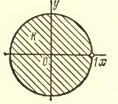


Рис. 7.7 *Рис. 7.8*

Решение. Так как случайные величины X, Y независимы, то

$$m_z = m_x m_y = (1/2)\,(1/2) = 1/4;$$

$$D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2 = \mathrm{M}\,[(XY)^2] - m_z^2 = \mathrm{M}\,[X^2]\,\mathrm{M}\,[Y^2] - m_z^2;$$

$$\mathrm{M}\,[X^2] = \alpha_2[X] = 1/3; \ \mathrm{M}\,[Y^2] = 1/3; \ D_z = 7/144.$$

7.9. Имеются две случайные величины X и Y, связанные соотношением $Y = 2 - 3X$. Числовые характеристики величины X заданы: $m_x = -1$, $D_x = 4$. Определить: 1) математическое ожидание и дисперсию величины Y; 2) корреляционный момент и коэффициент корреляции величин X, Y.

Решение. 1) $m_y = 2 - 3m_x = 5$; $D_y = (-3)^2\,4 = 36$;

$$2)\ K_{xy} = \mathrm{M}\,[XY] - m_x m_y = \mathrm{M}\,[X(2-3X)] + 1\cdot 5 = 2\,\mathrm{M}[X] -$$

$$- 3\,\mathrm{M}\,[X^2] + 5; \ \mathrm{M}\,[X^2] = \alpha_2[X] = D_x + m_x^2 = 4 + 1 = 5;$$

отсюда $K_{xy} = -2 - 3\cdot 5 + 5 = -12$; $r_{xy} = -12/(\sigma_x \sigma_y) =$

$$= -12/\sqrt{4\cdot 36} = -1,$$

что и естественно, так как X и Y связаны линейной функциональной зависимостью с отрицательным коэффициентом при X.

7.10. Имеется система случайных величин (X, Y, Z) с заданными характеристиками: математическими ожиданиями m_x, m_y, m_z и корреляционной матрицей

$$\left\| \begin{matrix} D_x & K_{xy} & K_{xz} \\ & D_y & K_{yz} \\ & & D_z \end{matrix} \right\|.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $U = aX - bY + cZ - d$.

Ответ. $m_u = am_x - bm_y + cm_z - d$; $D_u = a^2D_x + b^2D_y + c^2D_z - 2\,abK_{xy} + 2\,acK_{xz} - 2\,bcK_{yz}$.

7.11. Имеется n-мерный случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, составляющими которого являются n случайных величин X_i с математическими ожиданиями m_{x_i} $(i = 1, \ldots, n)$, дисперсиями D_{x_i} $(i = 1, \ldots, n)$ и нормированной корреляционной матрицей $\| r_{x_i x_j} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j > i)$. Случайный вектор $\mathbf{X}$ преобразуется в m-мерный случайный вектор $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, причем составляющие вектора $\mathbf{Y}$ получены из составляющих вектора $\mathbf{X}$ линейными преобразованиями:

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} X_i + b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Найти характеристики случайного вектора $\mathbf{Y}$: математические ожидания m_{y_k} $(k = 1, \ldots, m)$, дисперсии D_{y_k} $(k = 1, \ldots, m)$ и элементы нормированной корреляционной матрицы $\| r_{y_k y_l} \|$ $(l = 1, 2, \ldots, m;\ k < l)$.

Ответ.

$$m_{y_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} m_{x_i} + b_k \quad (k = 1, \ldots, m);$$

$$D_{y_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 D_{x_i} + 2 \sum_{i<j} r_{x_i x_j} \sqrt{D_{x_i} D_{x_j}};\quad r_{y_k y_l} = K_{y_k y_l} / \sqrt{D_{y_k} D_{y_l}},$$

где

$$K_{y_k y_l} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} a_{il} D_{x_i} + \sum_{i<j} (a_{ik} a_i + a_{jk} a_{il}) r_{x_i x_j} \sqrt{D_{x_i} D_{x_j}}.$$

7.12. Имеются две независимые случайные величины X и Y. Величина X распределена по нормальному закону $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$. Величина Y распределена равномерно в интервале (0; 2). Определить: 1) $M[X + Y]$; 2) $M[XY]$; 3) $M[X^2]$; 4) $M[X - Y^2]$; 5) $D[X + Y]$; 6) $D[X - Y]$.

Решение.

1) $M[X + Y] = M[X] + M[Y] = 1 + 1 = 2$;
2) $M[XY] = M[X]\,M[Y] = 1 \cdot 1 = 1$;
3) $M[X^2] = \alpha_2[X] = D[X] + m_x^2 = 4 + 1 = 5$;
4) $M[X - Y^2] = M[X] - M[Y^2] = 1 - \alpha_2[Y] = -1/3$;
5) $D[X + Y] = D[X] + D[Y] = 4 + 1/3 = 13/3$;
6) $D[X - Y] = D[X] + (-1)^2 D[Y] = 13/3$.

7.13. Случайная величина X подчинена нормальному закону $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = 1 - 3X^2 + 4X^3$.

Р е ш е н и е. $m_y = M[1 - 3X^2 + 4X^3] = 1 - 3M[X^2] + 4M[X^3]$. Так как $m_x = 0$, то $M[X^2] = \sigma^2$; для нашего нормального закона $M[X^3] = 0$, отсюда $m_y = 1 - 3\sigma^2$.

7.14. Независимые случайные величины X и Y распределены по законам $f_1(x)$, $f_2(y)$, графики плотностей которых представлены на рис. 7.14, *а*, *б*. Определить: 1) $M[X + Y]$; 2) $D[3X - 6Y + 1]$; 3) $M[XY]$; 4) $M[2XY - 3X^2 + Y^2 - 1]$.

Р е ш е н и е. $M[X] = 2a/3$; $M[Y] = b/3$; $D[X] = a^2/18$; $D[Y] = b^2/18$.

1) $M[X + Y] = (2a + b)/3$;

2) $D[3X - 6Y + 1] = 9D_x + 36D_y = a^2/2 + 2b^2$;

3) $M[XY] = 2ab/9$;

4) $M[2XY - 3X^2 + Y^2 - 1] = 2M[XY] - 3\alpha_2[X] - \alpha_2[Y] - 1 = 4ab/9 - 3a^2/2 + b^2/6 - 1$.

7.15. Ответить на вопросы 1—3 предыдущей задачи, если величины X, Y зависимы и их коэффициент корреляции $r_{xy} = -0{,}9$.

Р е ш е н и е. 1) $M[X + Y] = (2a + b)/3$; 2) $D[3X - 6Y + 1] = a^2/2 + 2b^2 + (36ab/\sqrt{18 \cdot 18})\,0{,}9 = a^2/2 + 2b^2 + 1{,}8ab$;
3) $M[XY] = ab/9 - 0{,}9\,ab/18 = 31ab/180$.

7.16. По сторонам прямого угла $x0y$ концами скользит линейка AB длины l, занимая случайное положение (рис. 7.16), причем все значения абсциссы X ее конца A на оси $0x$ в пределах от 0 до l одинаково вероятны. Найти математическое ожидание расстояния R от начала координат до линейки.

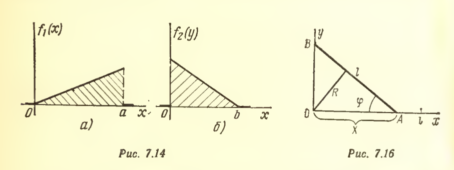


Рис. 7.14

Рис. 7.16

Р е ш е н и е. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, l)$: $f(x) = 1/l$ при $x \in (0, l)$. Случайная величина R выражается через X (см. рис. 7.16): $R = X\sqrt{1 - (X/l)^2}$. Ее математическое ожидание

$$m_r = \frac{1}{l}\int_0^l x\sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}.$$

7.17. Случайные величины V, U связаны линейно со случайными величинами X, Y: $V = aX + bY + c$; $U = dX + fY + g$. Известны числовые характеристики системы случайных величин X, Y: m_x,

m_y, D_x, D_y, K_{xy}. Требуется найти числовые характеристики системы случайных величин V, U : m_v, m_u, D_v, D_u, K_{vu}, r_{vu}.

Решение.

$$m_v = am_x + bm_y + c;\quad D_v = a^2D_x + b^2D_y + 2abK_{xy};$$
$$m_u = dm_x + fm_y + g;\quad D_u = d^2D_x + f^2D_y + 2\,dfK_{xy}.$$

Далее, $\overset{\circ}{V} = a\overset{\circ}{X} + b\overset{\circ}{Y};\ \overset{\circ}{U} = d\overset{\circ}{X} + f\overset{\circ}{X};$

$$K_{vu} = \mathrm{M}[\overset{\circ}{V}\overset{\circ}{U}] = adD_x + bfD_y + (af + bd)K_{xy};\ r_{vu} = K_{vu}/\sqrt{D_v D_u}.$$

7.18. Тело взвешивается на аналитических весах. Истинное (неизвестное нам) значение массы тела равно a. Вследствие наличия ошибок результат каждого взвешивания случаен и распределяется по нормальному закону с параметрами a и σ. Для уменьшения ошибок тело взвешивают n раз, и в качестве приближенного значения массы берут среднее арифметическое результатов n взвешиваний: $Y(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. 1) Найти характеристики случайной величины $Y(n)$: математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение; 2) сколько нужно сделать взвешиваний для того, чтобы уменьшить в десять раз среднюю квадратическую ошибку массы?

Решение. 1) $\mathrm{M}[Y(n)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}[X_i]$. Так как все взвешивания производятся в одинаковых условиях, то $\mathrm{M}[X_i] = a$ при любом i; тогда

$$\mathrm{M}[Y(n)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = \frac{na}{n} = a.$$

Считая ошибки отдельных взвешиваний независимыми, находим дисперсию $Y(n)$:

$$\mathrm{D}[Y(n)] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}[X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2) Число взвешиваний n находим из условия $\sigma[Y(n)] = \sqrt{\sigma^2/n} = \sigma/\sqrt{n} = \sigma/10;\ n = 100$.

7.19. Светящаяся точка, изображающая наблюдаемый объект на круглом экране радиолокатора, может случайным образом занимать любое положение на экране (плотность вероятности постоянна). Диаметр экрана равен D. Найти математическое ожидание расстояния R от светящейся точки до центра экрана.

Решение. $R = \sqrt{X^2+Y^2}$, где (X, Y) — система случайных величин, распределенная равномерно в круге K_D диаметра D:

$$f(x, y) = 4/(\pi D^2)\quad \text{при } (x, y) \in K_D;$$
$$m_r = \mathrm{M}[R] = \iint\limits_{(K_D)} \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{4}{\pi D^2}\,dx\,dy,$$

или, переходя к полярной системе координат (r, φ),

$$m_r = \frac{4}{\pi D^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{D/2} r^2 \, dr = \frac{D}{3}.$$

7.20. Две точки X и Y независимо друг от друга занимают случайное положение на отрезке (0; 1) оси абсцисс (рис. 7.20, *а*), причем плотность вероятности на этом отрезке постоянна для обеих случайных величин. Найти математическое ожидание расстояния R между этими точками и квадрата расстояния между ними.

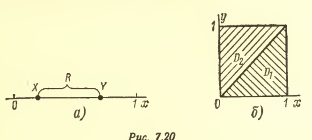


Рис. 7.20

Решение. Имеем $R = |Y - X|$; $m_r = \mathrm{M}[|Y - X|]$. Изобразим систему случайных величин (X, Y) как случайную точку на плоскости xOy (рис. 7.20, *б*), распределенную с постоянной плотностью $f(x, y) = 1$ в квадрате со стороной, равной единице. В области $D_1 : X > Y$; $|Y - X| = X - Y$. В области $D_2 : Y > X$; $|Y - X| = Y - X$.

$$m_r = \iint\limits_{(D_1)} (x - y)\, dxdy + \iint\limits_{(D_2)} (y - x)\, dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x (x - y)\, dy + \int_0^1 dy \int_0^y (y - x)\, dx = \frac{1}{3};$$

$$\mathrm{M}[R^2] = \mathrm{M}[|Y - X|^2] = \alpha_2[Y] + \alpha_2[X] - 2m_x m_y =$$

$$= 2(D_x + m_x^2) - 2m_x^2 = 1/6.$$

7.21. Имеется квадрат K со стороной, равной единице (рис. 7.21). На смежные стороны квадрата случайным образом и независимо друг от друга падают точки X и Y; каждая из них имеет в пределах соответствующей стороны равномерное распределение. Найти математическое ожидание квадрата расстояния между ними.

Решение. $R^2 = X^2 + Y^2$; $\mathrm{M}[R^2] = \alpha_2[X] + \alpha_2[Y] = 2/3$.

7.22. Условия предыдущей задачи изменены так, что точки X, Y попадают не на смежные, а на противоположные стороны квадрата (рис. 7.22). Найти математическое ожидание квадрата расстояния между точками X и Y.

Решение. $R^2 = 1 + (Y - X)^2$; $\mathrm{M}[R^2] = 1 + \alpha_2[Y] + \alpha_2[X] - 2\,\mathrm{M}[X]\,\mathrm{M}[Y] = 1 + 2/3 - 1/2 = 7/6$.

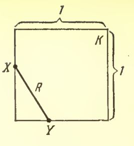


Рис. 7.21

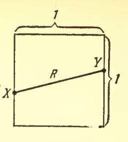


Рис. 7.22

7.23. Условия предыдущих задач (7.21 и 7.22) изменены так, что точки X и Y случайным образом и независимо друг от друга занимают с постоянной плотностью любое положение на периметре квадрата K. Найти математическое ожидание квадрата расстояния между ними.

Р е ш е н и е. Выберем три гипотезы:

H_1 = {точки X, Y легли на одну и ту же сторону квадрата};

H_2 = {точки X, Y легли на смежные стороны квадрата};

H_3 = {точки X, Y легли на противоположные стороны квадрата}.

Математическое ожидание величины R^2 найдем по формуле полного математического ожидания:

$$\mathrm{M}[R^2] = \mathrm{P}(H_1)\,\mathrm{M}[R^2 \mid H_1] + \mathrm{P}(H_2)\,\mathrm{M}[R^2 \mid H_2] + \\ + \mathrm{P}(H_3)\,\mathrm{M}[R^2 \mid H_3],$$

где $\mathrm{M}[R^2 \mid H_1]$, $\mathrm{M}[R^2 \mid H_2]$, $\mathrm{M}[R^2 \mid H_3]$ — условные математические ожидания величины R^2 при соответствующих гипотезах.

Из ранее решенных задач 7.20, 7.21, 7.22 имеем

$$\mathrm{M}[R^2 \mid H_1] = 1/6;\ \mathrm{M}[R^2 \mid H_2] = 2/3;\ \mathrm{M}[R^2 \mid H_3] = 7/6.$$

Находим вероятности гипотез: $\mathrm{P}(H_1) = 1/4$; $\mathrm{P}(H_2) = 1/2$; $\mathrm{P}(H_3) = 1/4$; отсюда $\mathrm{M}[R^2] = {}^1/_4 \cdot {}^1/_6 + {}^1/_2 \cdot {}^2/_3 \cdot + {}^1/_4 \cdot {}^7/_6 = {}^2/_3$.

7.24. Случайная величина X имеет плотность $f(x)$. Рассматривается ее функция $Y = \min\{X, a\}$, где a — неслучайная величина. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y, не находя ее закона распределения.

Р е ш е н и е. По общей формуле (7.0.7)

$$\mathrm{M}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \min\{x, a\}\, f(x)\, dx.$$

При $x < a$ получим $\min\{x, a\} = x$; при $x \geqslant a$ получим $\min\{x, a\} = a$. Отсюда

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{a} xf(x)\,dx + a\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} x\,f(x)\,dx + a\,P\{X > a\} \quad (7.24.1)$$

Аналогично находим второй начальный момент

$$\alpha_2[Y] = \int_{-\infty}^{a} x^2 f(x)\,dx + a^2\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} x^2 f(x)\,dx + a^2 P\{X > a\} \quad (7.24.2)$$

и дисперсию

$$D[Y] = \alpha_2[Y] - (M[Y])^2.$$

7.25. Тот же вопрос, что в предыдущей задаче, но случайная величина X — дискретная, принимающая целочисленные положительные значения с вероятностями, заданными рядом распределения

$$X: \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{array}\right|; \quad Y = \min\{X, a\},$$

a — не случайное целое положительное число, заключенное между 1 и n $(1 < a < n)$.

Решение. $M[Y] = \sum_{k=1}^{n} \min\{k, a\}\,p_k$; при $k < a$ получим $\min\{k, a\} = k$; при $k \geqslant a$ получим $\min\{k, a\} = a$. Тогда

$$M[Y] = \sum_{k=1}^{a-1} kp_k + a\sum_{k=a}^{n} p_k.$$

Аналогично находится второй начальный момент

$$\alpha_2[Y] = \sum_{k=1}^{a-1} k^2 p_k + a^2 \sum_{k=a}^{n} p_k$$

и дисперсия

$$D[Y] = \alpha_2[Y] - (M[Y])^2.$$

7.26. Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p. Опыты прекращаются, как только произошло событие A; общее число опытов не должно превосходить N. Найти математическое ожидание и дисперсию числа Y опытов, которое будет произведено.

Решение. Сначала рассмотрим случайную величину X — число произведенных опытов, если ограничение N по общему числу опытов снято. Случайная величина X имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы; ее ряд распределения:

$$X: \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ \hline p & pq & \dots & pq^{k-1} & \dots \end{array}\right. \quad (q = 1 - p).$$

Случайная величина Y есть минимальное из X и N: $Y = \min\{X, N\}$. На основе результатов задачи 7.25 имеем (полагая $n = \infty$)

$$M[Y]=\sum_{k=1}^{N-1}kp_k+N\sum_{k=N}^{\infty}p_k=\sum_{k=1}^{N-1}kpq^{k-1}+N\sum_{k=N}^{\infty}pq^{k-1}=$$

$$=p\left\{\sum_{k=1}^{N-1}kq^{k-1}+N\sum_{k=N}^{\infty}q^{k-1}\right\}.$$

Вычислим первую сумму

$$\sum_{k=1}^{N-1}kq^{k-1}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{d}{dq}q^k=\frac{d}{dq}\,\frac{q-q^N}{1-q}=\frac{1-Nq^{N-1}+(N-1)\,q^N}{(1-q)^2}.$$

Вторая сумма равна $(Nq^{N-1})/(1-q)$, откуда

$$M[Y]=p\,\frac{1-Nq^{N-1}+(N-1)\,q^N+Nq^{N-1}-Nq^N}{(1-q)^2}=\frac{1-q^N}{p}.$$

7.27. В гл. 1 рассмотрена задача Бюффона: игла длины l наугад бросается на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $L>l$, и установлено, что вероятность пересечения иглой какой-нибудь из прямых равна $p=2l/(L\pi)$; так как число пересечений при $l<L$ может быть только 0 или 1, то математическое ожидание числа пересечений будет равно p. Каково будет математическое ожидание числа пересечений иглы с прямыми, если снять ограничение $l<L$?

Решение. Разобьем длину иглы l на n элементарных участков $\Delta l=l/n<L$. Случайная величина X — число пересечений иглы с линиями — может быть представлена в виде суммы: $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, где X_i — число пересечений с прямыми i-го элементарного участка. Случайная величина X_i — индикатор пересечения i-го участка с какой-либо из прямых — имеет математическое ожидание, равное вероятности пересечения:

$$M[X_i]=p_i=2\,\Delta l/(L\pi),$$

откуда

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}p_i=\frac{2n\Delta l}{L\pi}=\frac{2l}{L\pi}.$$

7.28. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, фигурирующую в предыдущей задаче, бросается случайным образом любой контур (выпуклый или невыпуклый, замкнутый или незамкнутый) длины l. Определить математическое ожидание числа пересечений этого контура с прямыми.

Решение. Как и в предыдущей задаче, $M[Y]=2\,l/(L\pi)$. Чтобы доказать это, нужно разделить контур на n элементарных, практически прямолинейных участков длины Δl; для каждого из них математическое ожидание числа пересечений будет $2\Delta l/(N\pi)$, а для всего контура $2l/(L\pi)$.

7.29. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние L, бросается случайным образом выпуклый замкнутый контур длины l, наибольший размер кото-

рого a не превосходит L (рис. 7.29). Найти вероятность того, что он пересечется с какой-либо из прямых.

Решение. Обозначим p — искомую вероятность, Y — число точек пересечения контура с прямыми. Так как контур выпуклый и замкнутый, а его наибольший размер меньше L, то контур может иметь либо две точки пересечения с прямыми, либо ни одной. Ряд распределения случайной величины Y имеет вид

$$Y: \left| \begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 1-p & p \end{array} \right|.$$

На основании задачи 7.28 $M[Y] = 0 \cdot (1-p) + 2p = 2p = 2l/(L\pi)$, откуда $p = l/(L\pi)$.

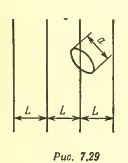


Рис. 7.29

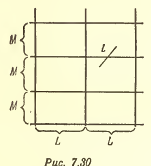


Рис. 7.30

7.30. Плоскость разграфлена на прямоугольники со сторонами L и M (рис. 7.30). На плоскость случайным образом бросается игла длины l ($l < L, l < M$). Найти вероятность того, что игла пересечется хотя бы с одной из линий, а также найти математическое ожидание числа пересечений иглы с какой-либо прямой при снятых ограничениях $l < L$, $l < M$.

Решение. Рассмотрим прямые, ограничивающие прямоугольники, как две системы линий — горизонтальных и вертикальных. Рассмотрим события:

A = {игла пересечется с одной из вертикальных прямых};

B = {игла пересечется с одной из горизонтальных прямых}.

Так как положение иглы относительно вертикальных прямых никак не влияет на ее положение относительно горизонтальных, события A и B независимы; поэтому искомая вероятность

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

На основании задачи Бюффона $P(A) = 2l/(\pi L)$, $P(B) = 2l/(\pi M)$, откуда

$$P(A + B) = 2l/(\pi L) + 2l/(\pi M) - 4l^2/(\pi^2 LM).$$

Снова, как и раньше, разделяя иглу произвольной длины l на элементарные участки, имеем

$$M[X] = 2l/(\pi L) + 2l/(\pi M) - 4l^2/(\pi^2 LM).$$

7.31. Прямоугольник с размерами $l_1 \times l_2$ случайным образом бросается на плоскость (рис. 7.31); все значения угла Θ равновероятны. Найти математическое ожидание длины X его проекции на ось $0x$.

Решение. Представим X как сумму $X = X_1 + X_2$, где X_1 — проекция отрезка l_1; X_2 — проекция отрезка l_2. Искомое математическое ожидание

$$M[X] = M[X_1] + M[X_2] = 2l_1/\pi + 2l_2/\pi = 2(l_1 + l_2)/\pi,$$

т. е. равно периметру прямоугольника, деленному на π.

7.32. Выпуклый замкнутый контур длины l бросается случайным образом на плоскость, причем все его ориентации одинаково вероятны (рис. 7.32). Найти математическое ожидание длины X его проекции на ось $0x$.

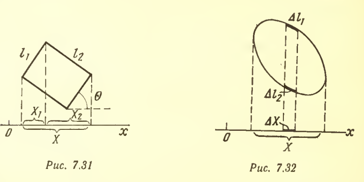


Рис. 7.31 Рис. 7.32

Решение. Так как контур выпуклый, то каждый элемент проекции Δx получается проектированием двух и только двух противолежащих элементов контура: Δl_1 и Δl_2 (см. рис. 7.32); значит, средняя длина проекции контура вдвое меньше суммы средних длин проекций элементарных отрезков Δl, на которые можно разбить контур:

$$M[X] = \frac{1}{2} \sum \frac{2\Delta l}{\pi} = \frac{l}{\pi}.$$

7.33. Имеется случайная величина X с плотностью $f(x)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |X|$.

Решение. Запись $Y = |X|$ означает, что

$$Y = \begin{cases} -X & \text{при } X < 0; \\ X & \text{при } X > 0. \end{cases}$$

$$m_y = M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} x[f(x) + f(-x)]\,dx;$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 f(x)\,dx - m_y^2 = \alpha_2[X] - m_y^2 = D_x + m_x^2 - m_y^2.$$

7.34. Найти математическое ожидание и дисперсию модуля случайной величины X, распределенной по нормальному закону с параметрами m, σ.

Решение. Из предыдущей задачи

$$m_y = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} x e^{-\frac{(x-m)}{2\sigma^2}}\,dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Делая замену переменных $(x - m)/\sigma = t$, получаем

$$m_y = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{m}{\sigma}} (t\sigma + m) e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{m}{\sigma}}^{\infty} (t\sigma + m) e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2} + m\Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right),$$

где Φ — функция Лапласа.

$$D_y = \sigma^2 + m^2 - m_y^2.$$

В частности, при $m = 0$

$$m_y = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \approx 0{,}80\sigma;\quad D_y = \sigma^2 - \frac{2}{\pi}\sigma^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sigma^2 \approx 0{,}36\sigma^2.$$

7.35*. Независимые случайные величины X и Y имеют плотности $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Найти математическое ожидание и дисперсию модуля их разности $Z = |X - Y|$.

Решение. Имеем

$$m_z = \iint_{-\infty}^{\infty} |x - y| f_1(x) f_2(y)\,dx dy.$$

Прямая $y = x$ делит плоскость $x0y$ на две области I и II (рис. 7.35). В области I $x > y$, $|x - y| = x - y$. В области II $y > x$, $|x - y| = y - x$. Отсюда

$$m_z = \iint_{(I)} (x - y) f_1(x) f_2(y)\,dx dy + \iint_{(II)} (y - x) f_1(x) f_2(y)\,dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x) \left\{ \int_{-\infty}^{x} f_2(y)\,dy \right\} dx - \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y) \left\{ \int_{y}^{\infty} f_1(x)\,dx \right\} dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y) \left\{ \int_{-\infty}^{y} f_1(x)\,dx \right\} dy - \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x) \left\{ \int_{x}^{\infty} f_2(y)\,dy \right\} dx.$$

Введем в рассмотрение функции распределения

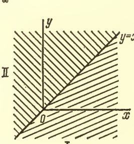
$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx; \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\,dy.$$

Тогда

$$m_z = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)\,F_2(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)\,[1 - F_1(y)]\,dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)\,F_1(y)\,dy - \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)\,[1 - F_2(x)]\,dx.$$

Рис. 7.35



Объединяя первый интеграл с четвертым, а второй с третьим, получаем

$$m_z = \int_{-\infty}^{\infty} [2xf_1(x)\,F_2(x) - xf_1(x)]\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} [2yf_2(y)\,F_1(y) - yf_2(y)]\,dy =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)\,F_2(x)\,dx - m_x + 2\int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)\,F_1(y)\,dy - m_y.$$

Так как X, Y независимы, то

$$\alpha_2[Z] = M[|X - Y|^2] = M[(X - Y)^2] =$$
$$= M[X^2] + M[Y^2] - 2M[X]\,M[Y] =$$
$$= \alpha_2[X] + \alpha_2[Y] - 2m_x m_y = D_x + D_y + (m_x - m_y)^2.$$

Отсюда находим $D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2$.

7.36. Независимые случайные величины X и Y имеют плотности $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Найти математичеокое ожидание и дисперсию минимальной из этих двух величин $Z = \min\{X, Y\}$.

Решение.

$$Z = \begin{cases} X, & \text{если } X \leq Y; \\ Y, & \text{если } X > Y. \end{cases}$$

Прямая $y = x$ делит плоскость xOy на две области (см. рис. 7.35): I, где $Z = Y$, и II, где $Z = X$ (случай $X = Y$ не рассматриваем, как имеющий нулевую вероятность).

$$m_z = \mathrm{M}[Z] = \iint\limits_{(II)} x f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy + \iint\limits_{(I)} y f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)[1 - F_2(x)]\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)[1 - F_1(y)]\,dy,$$

где F_1, F_2 — функции распределения случайных величин X и Y.

$$\alpha_2[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)[1 - F_2(x)]\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)[1 - F_1(y)\,dy];$$

$$D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2.$$

7.37. Случайное напряжение U распределено по нормальному закону $f(u)$ с параметрами m и σ. Напряжение U поступает на ограничитель, который оставляет его равным U, если $U \leqslant u_0$, и делает равным u_0, если $U > u_0$;

$$Z = \min\{U, u_0\} = \begin{cases} U \text{ при } U \leqslant u_0; \\ u_0 \text{ при } U > u_0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z — напряжения, снимаемого с ограничителя.

Решение. На основании задачи 7.24 имеем:

$$m_z = \mathrm{M}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \min\{u, u_0\} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{u_0} u f(u)\,du + \int_{u_0}^{\infty} u_0 f(u)\,du =$$

$$= \int_{-\infty}^{u_0} \frac{u}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_u} \exp\left[-\frac{(u - m_u)^2}{2\sigma_u^2}\right] du + u_0 \int_{u_0}^{\infty} f(u)\,du =$$

$$= m_u\left[\Phi\left(\frac{u_0 - m_u}{\sigma_u}\right) + 0{,}5\right] - \frac{\sigma_u}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u_0 - m_u}{\sigma_u}\right)^2\right] +$$

$$+ u_0\left[0{,}5 - \Phi\left(\frac{u_0 - m_u}{\sigma_u}\right)\right] = u_0 - \sigma_u\left[t_0(\Phi(t_0) + 0{,}5) +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t_0^2}{2}\right]\right], \quad \text{где } t_0 = \frac{u_0 - m_u}{\sigma_u};$$

$$\alpha_2[Z] = \int_{-\infty}^{u_0} u^2 f(u)\,du + \int_{u_0}^{\infty} u_0^2 f(u)\,du = (m_u^2 + \sigma_u^2)(\Phi(t_0) + 0{,}5) +$$

$$+ u_0[0{,}5 - \Phi(t_0)] - \frac{2\sigma_u m_u + \sigma_u^2 t_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t_0^2}{2}\right];$$

$$D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2 = \sigma_u^2\left\{(1+t_0^2)(\Phi(t_0)+0{,}5) + \frac{t_0}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{t_0^2}{2}\right] - \right.$$
$$\left. - \left[t_0(\Phi(t_0)+0{,}5) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{t_0^2}{2}\right]\right]^2\right\}.$$

Заметим, что при $u_0 = m_u$, $t_0 = 0$, имеем $m_z = m_u - \sigma_u(\sqrt{2\pi})^{-1}$; $D_z = \sigma_u^2(\pi - 1)(2\pi)^{-1}$.

7.38. По каналу связи передается N сообщений; длительность каждого сообщения случайная, имеет одни и те же математическое ожидание m и дисперсию D и не зависит от длительностей других сообщений. Найти математическое ожидание и дисперсию суммарного времени T, за которое будут переданы все N сообщений. Найти T_{max} — максимальное практически возможное время передачи всех сообщений.

Решение. $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$, где T_i — длительность i-го сообщения ($i = 1, 2, \ldots, N$). По теореме сложения математических ожиданий

$$\mathrm{M}[T] = \mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{N} T_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{M}(T_i] = Nm.$$

По теореме сложения дисперсий

$$\mathrm{D}[T] = \mathrm{D}\left[\sum_{i=1}^{N} T_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{D}[T_i] = ND; \quad \sigma_t = \sqrt{\mathrm{D}[T]} = \sqrt{ND}.$$

По «правилу трех сигма» $T_{max} = Nm + 3\sqrt{ND}.$

7.39. Решить предыдущую задачу 7.38 с тем изменением, что длительности T_i сообщений зависимы и коэффициент корреляции случайных величин T_i и T_j равен r_{ij}.

Решение. Математическое ожидание по-прежнему равно $\mathrm{M}[T] = Nm$. Для вычисления дисперсии находим корреляционный момент величин T_i, T_j: $K_{ij} = r_{ij}\sigma^2 = r_{ij}D$. По формуле (7.0.28) для дисперсии суммы

$$\mathrm{D}[T] = ND + 2\sum_{i<j} r_{ij}D = D\left(N + 2\sum_{i<j} r_{ij}\right); \quad T_{\max} = Nm + 3\sqrt{\mathrm{D}[T]}.$$

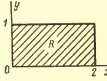


Рис. 7.40

7.40. Система случайных величин (X, Y) распределена равномерно в прямоугольнике R (рис. 7.40). Определить: 1) $\mathrm{M}[X+Y]$; 2) $\mathrm{M}[X-Y]$; 3) $\mathrm{M}[XY]$; 4) $\mathrm{D}[X+Y]$; 6) $\mathrm{D}[X-Y]$; 6) $\mathrm{M}[(X-Y)^2]$; 7) $\mathrm{M}[2X^3+3Y^2+1]$.

Ответ. 1) 3/2; 2) 1/2; 3) 1/2; 4) 5/12; 5) 5/12; 6) 2/3; 7) 6.

7.41. При работе электронного прибора возникают случайные неисправности; среднее число неисправностей, возникающих за единицу времени работы прибора, равно λ; число неисправностей за время τ работы прибора — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$. Для ликвидации возникшей неисправности (ремонта прибора) требуется случайное время $T_{\text{рем}}$; это время распределено по показательному закону $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ при $t > 0$. Времена ликвидации неисправностей независимы. Найти: 1) среднюю долю времени, которую прибор будет исправно работать, и среднюю долю времени, которую он будет находиться в ремонте; 2) средний интервал времени между двумя последовательными неисправностями.

Решение. 1) Среднее время исправной работы прибора (математическое ожидание времени, которое проработает прибор после пуска до остановки для ремонта) $\bar{t}_{\text{испр}} = 1/\lambda$. Среднее время ремонта $\bar{t}_{\text{рем}} = 1/\mu$. Средняя доля времени, которую прибор будет исправно работать, равна

$$\alpha = \frac{\bar{t}_{\text{испр}}}{\bar{t}_{\text{испр}} + \bar{t}_{\text{рем}}} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Аналогично средняя доля времени, которую прибор будет ремонтироваться, равна

$$\beta = 1 - \alpha = \lambda/(\lambda + \mu).$$

2) Средний интервал времени $\bar{T}_t$ между двумя последовательными неисправностями

$$\bar{T}_t = \bar{t}_{\text{испр}} + \bar{t}_{\text{рем}} = 1/\lambda + 1/\mu = (\lambda + \mu)/(\lambda\mu).$$

7.42. Случайная точка (X, Y) распределена на плоскости по нормальному закону с круговым рассеиванием: $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Случайная величина R — расстояние от точки (X, Y) до центра рассеивания. Найти математическое ожидание и дисперсию величины R.

Решение.

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2};$$

$$m_r = M[R] = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{2\sigma^2 \pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx dy.$$

Переходим к полярной системе координат r, φ:

$$m_r = \int\limits_0^{\infty} r^2 \frac{1}{2\sigma^2 \pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1{,}25\sigma;$$

$$D_r = D[R] = \alpha_2[R] - m_r^2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) \frac{1}{2\sigma^2 \pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) dx dy -$$

$$-m_r^2=\int_0^\infty r^3\frac{1}{2\sigma^2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)dr\int_0^{2\pi}d\varphi-\sigma^2\frac{\pi}{2}=$$

$$=2\sigma^2\int_0^\infty te^{-t}\,dt-\sigma^2\frac{\pi}{2}=\sigma^2\frac{4-\pi}{2}.$$

7.43. Доказать, что если случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, то ее математическое ожидание $\mathrm{M}[X]=np$, а дисперсия $\mathrm{D}[X]=npq$ $(q=1-p)$.

Р е ш е н и е. X — число появлений события A в n независимых опытах — представляем в виде $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, где X_i — индикатор события A в i-м опыте, т. е.

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{если в } i\text{-м опыте событие появилось;}\\ 0, & \text{если в } i\text{-м опыте событие не появилось.}\end{cases}$$

$$\mathrm{M}[X_i]=p;\ \mathrm{D}[X_i]=pq;$$

$$\mathrm{M}[X]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}[X_i]=np;\quad \mathrm{D}[X]=\sum_{i=1}^{n}pq=npq.$$

7.44. Доказать, что для n независимых опытов, в которых событие A происходит с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, математическое ожидание и дисперсия числа X появлений события равны:

$$\mathrm{M}[X]=\sum_{i=1}^{n}p_i;\quad \mathrm{D}[X]=\sum_{i=1}^{n}p_iq_i,\ \text{где}\ q_i=1-p_i.$$

Р е ш е н и е. Аналогично предыдущей задаче $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, где X_i - индикатор события A в i-м опыте;

$$\mathrm{M}[X]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}[X_i]=\sum_{i=1}^{n}p_i;\quad \mathrm{D}[X]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}[X_i]=\sum_{i=1}^{n}p_iq_i.$$

7.45. Рассматривается n независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p. Найти математическое ожидание и дисперсию частоты Y события A. Найти диапазон практически возможных значений частоты.

Р е ш е н и е. $Y=X/n$, где X — число появлений события A.

$$\mathrm{M}[Y]=\mathrm{M}[X]/n=\frac{1}{n}np=p;\quad \mathrm{D}[Y]=npq/n^2=pq/n;$$

$$\sigma_y=\sqrt{\mathrm{D}[Y]}=\sqrt{pq/n},$$

где $q=1-p$. Диапазон практически возможных значений Y есть $m_y\pm3\sigma_y=p\pm3\sqrt{pq/n}.$

7.46. Доказать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей гипергеометрическое распределение (см. 4.0.34) с параметрами a, b, n, равны соответственно

$$M[X]=\frac{na}{a+b}; \quad D[X]=\frac{nab}{(a+b)^2}-n(n-1)\left[\frac{a}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right]. \qquad (7.46.1)$$

Решение. Рассмотрим физическую модель возникновения гипергеометрического распределения — вынимание n шаров из урны, где a белых и b черных шаров; X — число вынутых белых шаров. Представим n выниманий шара как n опытов, в каждом из которых может произойти событие A = {белый шар}. Представим величину X как сумму величин X_i — индикаторов события A в i-м опыте: $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$. Случайные величины X_i зависимы, но теорема сложения математических ожиданий применима:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} M[X_i]; \quad M[X_i]=\frac{a}{a+b}; \quad M[X]=\frac{na}{a+b}.$$

Дисперсию суммы случайных величин X_i находим по формуле (7.0.28):

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i]+2\sum_{i<j} K_{x_i x_j}; \qquad (7.46.2)$$

$$D[X_i]=pq=\frac{a}{a+b}\,\frac{b}{a+b}=\frac{ab}{(a+b)^2};$$

$$\sum_{i=1}^{n} D[X_i]=\frac{nab}{(a+b)^2}.$$

Найдем $\quad K_{x_i x_j}=M[X_i X_j]-M[X_i]M[X_j].$

Произведение индикаторов X_iX_j события A в i-м и j-м опытах равно единице только в случае, когда $X_i=1$, $X_j=1$, т. е. и при i-м, и при j-м опытах происходит событие A. Вероятность этого равна $\frac{a}{(a+b)}\times$ $\times\frac{(a-b)}{(a+b-1)}$; этому же значению равно математическое ожидание

$$M[X_i X_j]=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Отсюда

$$K_{x_i x_j}=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}-\frac{a}{(a+b)^2}. \qquad (7.46.3)$$

Число слагаемых в сумме $\sum_{i<j} K_{x_i x_j}$ равно $C_n^2=n(n-1)/2$. Подставляя (7.46.3) в (7.46.2), получаем формулу (7.46.1).

7.47. В урне 5 белых и 7 черных шаров; из урны вынимается сразу 6 шаров. Случайная величина X — число черных шаров среди вынутых. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

Ответ. $M[X]=3{,}5$; $D[X]=70/33\approx 2{,}12$.

7.48. Радиолокационная станция ведет слежение за областью пространства, где находится N объектов. За один цикл обзора i-й объект (независимо от других) обнаруживается с вероятностью p_i ($i = 1, \ldots, N$). За время наблюдения осуществляется n циклов обзора. Найти математическое ожидание и дисперсию числа объектов X, которые будут обнаружены.

Решение. $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, где X_i — индикатор события $A_i =$ $=$ {обнаружение i-го объекта}.

$$\mathrm{P}(A_i) = 1 - (1 - p_i)^n;$$

$$\mathrm{M}[X] = \sum_{i=1}^{N} [1 - (1 - p_i)^n] = N - \sum_{i=1}^{N} (1 - p_i)^n;$$

$$\mathrm{D}(X) = \sum_{i=1}^{N} [1 - (1 - p_i)^n](1 - p_i)^n.$$

При неограниченном увеличении числа циклов обзора n

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{M}[X] = N; \quad \lim_{n \to \infty} \mathrm{D}[X] = 0,$$

т. е. в пределе при $n \to \infty$ будут обнаружены все объекты.

7.49 *. Берется произвольная точка A внутри круга радиуса a (рис. 7.49), и через эту точку проводится хорда BC под произвольным углом Θ к радиусу, проходящему через A. Найти среднюю длину этой хорды.

Решение. Точка A берется произвольно в пределах круга, поэтому ее полярные координаты R, Φ независимы и распределены по законам:

$$f_1(r) = \frac{2}{a^2} r \text{ при } 0 < r < a; \quad f_2(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \text{ при } 0 < \varphi < 2\pi.$$

Так как средняя длина хорды, очевидно, не зависит от угла φ, возьмем точку A на произвольном радиусе (на расстоянии R от центра) и проведем через нее хорду BC под случайным углом Θ к радиусу. Из условий задачи следует, что случайная величина Θ имеет плотность $f_3(\vartheta) =$ $= 1/2\pi$ при $0 < \vartheta < 2\pi$. Выразим длину D хорды BC через случайные величины R и Θ. Для этого опустим из центра круга перпендикуляр на хорду и обозначим его длину H. Очевидно,

$$D = 2\sqrt{a^2 - H^2}; \ H = R \sin \Theta; \ D = 2\sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \Theta}.$$

Математическое ожидание случайной величины D найдется как

$$\mathrm{M}[D] = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a 2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \vartheta} \, \frac{2r}{a^2} \, \frac{1}{2\pi} \, dr =$$

$$= \frac{8}{\pi a^2} \int_0^{\pi/2} \frac{r^3 (1 - \cos^3 \vartheta)}{3 \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta = \frac{16a}{3\pi} \approx 1{,}70a.$$

7.50 *. Найти среднее значение длины хорды BC (рис. 7.50), проведенной через точку A внутри круга, находящуюся на расстоянии L от центра круга радиуса r, причем все направления этой хорды одинаково вероятны.

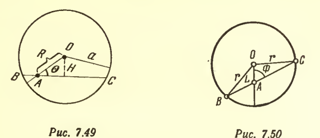


Рис. 7.49 Рис. 7.50

Решение. Хорда $\overline{BC}$ выражается через величины L, Φ, r следующим образом:

$$\overline{BC} = 2r\sqrt{1 - \frac{L^2}{r^2}\sin^2\Phi}.$$

Если длину хорды $\overline{BC}$ считать случайной величиной X, то

$$m_x = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} 2r \sqrt{1 - \left(\frac{L}{r}\right)^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{4r}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

где $k = L/r$. Полученный интеграл представляет собой полный эллиптический интеграл $E(k, \pi/2)$ с модулем k; его значения можно найти в справочниках. Например, при $k = 1/2$ интеграл $E(1/2, \pi/2) = 1{,}4675$ и $m_x \approx 1{,}87r$.

Так как полный эллиптический интеграл $E(k, \pi/2)$ измеряется от $\pi/2$ (при $k = 0$) до 1 (при $k = 1$), то средняя длина хорды будет принимать значения от $2r$ (при $k = 0$, т. е. для точки A в центре круга) до $4r/\pi$ (при $L = r$, т. е. для точек A на окружности).

7.51*. Техническое устройство состоит из n узлов. Каждый узел может выходить из строя независимо от других. Время исправной работы i-го узла распределено по показательному закону с параметром λ_i:

$$f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t} \quad (t > 0).$$

Каждый узел, оказавшийся неисправным, немедленно заменяется новым и поступает в ремонт. Ремонт i-го узла продолжается случайное время, распределенное по показательному закону с параметром μ_i: $\varphi_i(t) = \mu_i e^{-\mu_i t}$ $(t > 0)$. Устройство работает в течение времени τ.

Определить: 1) математическое ожидание и дисперсию числа узлов, которые придется заменить; 2) математическое ожидание суммарного времени T, которое будет затрачено на ремонт вышедших из строя узлов.

Решение. 1) Обозначим X_i число узлов i-го типа, вышедших из строя за время τ. Эта случайная величина распределена по закону Пуассона и имеет математическое ожидание $m_{x_i} = \lambda_i \tau$ и дисперсию $D_{x_i} = \lambda_i \tau$. Обозначим X общее число узлов, вышедших из строя за время τ. Имеем

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i; \quad m_x = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i} = \tau \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Так как величины X_i независимы, то

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} = \tau \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

2) Обозначим T_i общее время, затраченное на ремонт всех вышедших из строя за время τ узлов i-го типа. Оно представляет собой сумму времен, затраченных на ремонт каждого из узлов. Так как число этих узлов равно X_i, то

$$T_i = T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + \ldots + T_i^{(X_i)} = \sum_{k=1}^{X_i} T_i^{(k)},$$

где $T_i^{(k)}$—случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром μ_i; величины $T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, \ldots$ независимы.

Найдем математическое ожидание случайной величины T_i по интегральной формуле полного математического ожидания; для этого предположим, что случайная величина X_i приняла определенное значение m. При этом условии математическое ожидание величины T_i будет

$$M[T_i \mid m] = \sum_{k=1}^{m} M[T_i^{(k)}] = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\mu_i} = \frac{m}{\mu_i}.$$

Умножив это условное математическое ожидание на вероятность P_m того, что случайная величина X_i приняла значение m, и просуммировав все эти произведения, мы найдем полное (безусловное) математическое ожидание величины T_i

$$M[T_i] = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \frac{m}{\mu_i} = \frac{1}{\mu_i} \sum_{m=1}^{\infty} m P_m = \frac{1}{\mu_i} M[X_i] = \frac{\lambda_i \tau}{\mu_i}.$$

Применяя далее теорему сложения математических ожиданий, получаем

$$M[T] = \tau \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Заметим, что тот же результат можно получить путем следующих (не вполне строгих) рассуждений. Среднее число выходов из строя уз-

ла i-го типа за время τ равно $\lambda_i\tau$; среднее время ремонта одного такого узла равно $1/\mu_i$; среднее время, которое будет затрачено на ремонт всех вышедших из строя за время τ узлов i-го типа, равно $\lambda_i\tau/\mu_i$; среднее время, которое будет затрачено на ремонт узлов всех типов, равно $\tau \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$.

7.52*. Условия задачи 7.52 изменены таким образом, что каждый вышедший из строя узел отправляется в ремонт, а техническое устройство на это время прекращает работу; при неработающем (выключенном) устройстве узлы выходить из строя не могут. Найти: 1) математическое ожидание числа остановок устройства за время τ; 2) математическое ожидание той части времени τ, в течение которой устройство будет простаивать (оно же среднее время, затраченное на ремонт).

0 — 1-й цикл — 2-й цикл — 3-й цикл — 4-й цикл — t

Рис. 7.52

Решение. 1) Обозначим X число остановок за время τ и найдем его математическое ожидание m_x. Задачу будем решать с помощью следующих не совсем строгих (но тем не менее верных) рассуждений. Рассмотрим неограниченный во времени процесс работы устройства в виде последовательности «циклов» (рис. 7.52), каждый из которых состоит из периода работы системы (отмечен жирно) и периода ремонта. Длительность каждого цикла представляет собой сумму двух случайных величин: $T_{раб}$ (времени работы устройства) и $T_{рем}$ (времени ремонта). Средняя длительность времени работы устройства $m_{t_{раб}}$ вычисляется как среднее время между двумя последовательными отказами в потоке отказов интенсивности $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$; оно равно

$$m_{t_{раб}} = 1/\lambda = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Находим среднее время ремонта $m_{t_{рем}}$. Будем его искать по формуле полного математического ожидания при гипотезах H_i = {ремонтируется узел i-го типа} ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Вероятность каждой гипотезы пропорциональна параметру λ_i:

$$P(H_i) = \lambda_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_i/\lambda.$$

Условное математическое ожидание времени ремонта при этой гипотезе равно $1/\mu_i$; отсюда

$$m_{t_{рем}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda\mu_i} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Среднее время цикла

$$m_{t_{\text{ц}}}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right).$$

Теперь представим себе последовательность остановок устройства как последовательность случайных точек на оси $0t$, разделенных интервалами, в среднем равными $m_{t_{\text{ц}}}$. Среднее число остановок за время τ будет равно среднему числу таких точек на отрезке длиной τ;

$$m_x=\tau/m_{t_{\text{ц}}}=\lambda\tau/\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right).$$

2) За каждый цикл устройство будет простаивать (ремонтироваться) в среднем время $m_{t\,\text{рем}}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}$; следовательно среднее время простоя

$$m_x\,m_{t_{\text{ц}}}=\frac{\lambda\tau}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}}\cdot\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}=\tau\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\Bigg/\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right).$$

7.53. Случайная величина X распределена по нормальному закону с характеристиками m_x и σ_x. Случайные величины Y и Z связаны с X зависимостями $Y=X^2$; $Z=X^3$. Найти корреляционные моменты K_{xy}, K_{xz} и K_{yz}.

Решение. Для упрощения вычислений перейдем к центрированным величинам и воспользуемся тем, что для центрированной нормальной величины $\mathring{X}=X-m_x$ все центральные моменты нечетных порядков равны нулю, а $M[\mathring{X}^2]=\sigma_x^2$, $M[\mathring{X}^4]=3\sigma_x^4$ (см. задачу 5.26). Так как

$$\mathring{Y}=(\mathring{X}+m_x)^2-M[X^2]=\mathring{X}^2+2\mathring{X}m_x+m_x^2-D_x-m_x^2=$$
$$=\mathring{X}^2+2\mathring{X}m_x-\sigma_x^2,$$

то

$$K_{xy}=M[\mathring{X}\mathring{Y}]=M[\mathring{X}(\mathring{X}^2+2\mathring{X}m_x-\sigma_x^2)]=2\sigma_x^2\,m_x.$$

Далее

$$\mathring{Z}=(\mathring{X}+m_x)^3-M[X^3]=\mathring{X}^3+3\mathring{X}^2m_x+3\mathring{X}m_m^2+m_x^3-(3m_x\sigma_x^2+m_x^3)=$$
$$=X^3+3\mathring{X}^2m_x+3\mathring{X}m_x^2-3m_x\sigma_x^2,$$

и поэтому

$$K_{xz}=M[\mathring{X}\mathring{Z}]=M[\mathring{X}^4]+3m_x M[\mathring{X}^3]+3m_x^2M[\mathring{X}^2]-$$
$$-3m_x\sigma_x^2M[\mathring{X}]=3\sigma_x^4+3m_x^2\sigma_x^2.$$

Наконец,

$$K_{y_2} = M[(\mathring{X}^2 + 2\mathring{X}m_x - \sigma_x^2)(\mathring{X}^3 + 3\mathring{X}^2 m_x + 3\mathring{X}m_x^2 - 3m_x\sigma_x^2)] =$$
$$= 5m_x M[\mathring{X}^4] + 6m_x(m_x^2 - \sigma_x^2) M[\mathring{X}^2] + 3m_x\sigma_x^4 = 12m_x\sigma_x^4 + 6m_x^3\sigma_x^2.$$

7.54. Тело, масса которого равна a г, взвешивается на аналитических весах четыре раза; получаются результаты X_1, X_2, X_3, X_4. В качестве измеренного значения массы принимается их среднее арифметическое: $Y = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$. Результаты взвешиваний независимы. Весы дают систематическую ошибку $m_x = +0{,}001$ г. Среднее квадратическое отклонение каждого взвешивания $\sigma_x = 0{,}002$ г. Найти параметры: математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины Y.

Ответ. $m_y = a + 0{,}001$ г; $\sigma_y = \sigma_x/2 = 0{,}001$ г.

7.55. Производятся четыре независимых измерения одной и той же величины X. Каждое измерение характеризуется одним и тем же математическим ожиданием m_x и средним квадратическим отклонением σ_x. Результаты измерений: X_1, X_2, X_3, X_4. Рассматриваются разности между соседними измерениями: $Y_1 = X_2 - X_1$; $Y_2 = X_3 - X_2$; $Y_3 = X_4 - X_3$. Найти характеристики системы этих случайных величин: математические ожидания $m_{y_1}, m_{y_2}, m_{y_3}$; средние квадратические отклонения $\sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}, \sigma_{y_3}$; нормированную корреляционную матрицу $\|r_{ij}\|$.

Решение.

$$m_{y_1} = m_{y_2} = m_{y_3} = 0; \quad \sigma_{y_1}^2 = \sigma_{y_2}^2 = \sigma_{y_3}^2 = 2\sigma_x^2; \quad \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_{y_3} = \sigma_x\sqrt{2}.$$

В силу независимости величин $\mathring{X}_1, \mathring{X}_2, \mathring{X}_3, \mathring{X}_4$

$$K_{y_1y_2} = M[(\mathring{X}_2 - \mathring{X}_1)(\mathring{X}_3 - \mathring{X}_2)] = -M[\mathring{X}_2^2] = -\sigma_x^2;$$
$$K_{y_2y_3} = M[(\mathring{X}_3 - \mathring{X}_2)(\mathring{X}_4 - \mathring{X}_3)] = -M[\mathring{X}_3^2] = -\sigma_x^2;$$
$$K_{y_1y_3} = M[(\mathring{X}_2 - \mathring{X}_1)(\mathring{X}_4 - \mathring{X}_3)] = 0;$$
$$r_{y_1y_2} = r_{y_2y_3} = \frac{-\sigma_x^2}{2\sigma_x^2} = -\frac{1}{2}; \quad r_{y_1y_3} = 0,$$
$$\|r_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1/2 & 0 \\ & 1 & -1/2 \\ & & 1 \end{matrix} \right\|.$$

7.56. Имеется кубический бак с горючим, на одной из шести стенок которого случайным образом появляется пробоина; она оказывается с равной вероятностью на любой из шести стенок бака и в любой точке каждой из шести стенок. Вследствие наличия пробоины из бака вытекает все горючее, находящееся выше пробоины. В неповрежденном состоянии бак заполнен на 3/4 своего объема. Определить среднее количество горючего, которое сохранится в баке после появления пробоины.

Решение. Для простоты будем считать ребро бака равным единице. Высоту пробоины обозначим X, объем оставшегося горючего Y. Так как площадь основания равна единице, то

$$Y = \begin{cases} X & \text{при } X < 0{,}75; \\ 0{,}75 & \text{при } 0{,}75 < X < 1. \end{cases}$$

Если пробоина окажется выше чем на 0,75, от дна бака ($X > 0{,}75$), то горючее вытекать не будет, и в баке останется, как и было, количество горючего $Y = 0{,}75$; вероятность этого равна доле площади поверхности бака, находящейся выше уровня 0,75:

$$P\{Y = 0{,}75\} = P\{X > 0{,}75\} = 1/6 + (4/6) \cdot 0{,}25 = 1/3.$$

Если пробоина окажется в дне бака ($X = 0$), то вытечет все горючее; вероятность этого равна доле площади, приходящейся на дно бака:

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} = 1/6.$$

Если пробоина окажется в одной из боковых стенок бака на расстоянии $X < 0{,}75$ от дна, то в баке останется количество горючего $Y = X$. Плотность вероятности в интервале (0; 0,75) постоянна и равна $(1 - 1/3 - 1/6)/0{,}75 = 2/3$. Среднее количество оставшегося в баке горючего

$$m_y = 0{,}75 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + \int_0^{0{,}75} x \cdot \frac{2}{3}\, dx = 0{,}44.$$

7.57. В интервале (0; 1) зафиксирована точка a (рис. 7.57). Случайная точка X распределена равномерно в том же интервале. Найти коэффициент корреляции между случайной величиной X и расстоянием R от точки a до X (расстояние R всегда считается положительным). Определить, при каком значении a величины X и R будут некоррелированными.

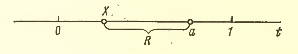


Рис. 7.57

Решение. Определим K_{xr} по формуле $K_{xr} = M[XR] - m_x m_r$.

$$M[XR] = M[X\,|a - X|] = \int_0^1 x\,|a - x|\, f(x)\, dx = \int_0^1 x\,|a - x|\, dx =$$

$$= \int_0^a x(a - x)\, dx - \int_a^1 x(a - x)\, dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3};$$

$$m_x=\frac{1}{2};\quad m_r=\int_0^1|a-x|\,dx=\int_0^a(a-x)\,dx-\int_a^1(a-x)\,dx=a^2-a+\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$K_{xr}=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)=\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{12}.$$

Находим

$$D_x=\frac{1}{12};\quad \sigma_x=\frac{1}{2\sqrt{3}};\quad D_r=\alpha_2[R]-m_r^2;$$

$$\alpha_2[R]=\int_0^1(a-x)^2\,dx=a^2-a+\frac{1}{3};$$

$$D_r=2a^3-a^4-a^2+\frac{1}{12};\quad \sigma_r=\sqrt{D_r}.$$

Отсюда

$$r_{xr}=-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{12}\right)\Bigg/\left(\sqrt{2a^3-a^4-a^2+\frac{1}{12}}\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Уравнение $a^3/3-a^2/2+1/12=0$ имеет только один корень в интервале $(0;1)$; $a=1/2$. Поэтому случайные величины X, R становятся некоррелированными только при $a=1/2$.

7.58. Автомобиль может двигаться по шоссе с произвольной скоростью v $(0\leqslant v\leqslant v_{max})$. Чем быстрее движется автомобиль, тем больше вероятность того, что он будет задержан инспектором милиции. Каждая задержка длится в среднем время t_0. Инспекторы на пути следования расставлены случайным образом; при этом на единицу длины пути приходится случайное число инспекторов, распределенное по закону Пуассона с параметром λ. Зависимость вероятности задержки от скорости машины линейная: $p(v)=kv$ $(0\leqslant v\leqslant v_{max})$, где $k=1/v_{max}$. Определить рациональную скорость движения v_p автомобиля, при которой он пройдет путь s в среднем за минимальное время.

Р е ш е н и е. Среднее время прохождения пути s будет

$$t=s/v+\lambda sp(v)\,t_0=s/v+\lambda\,skvt_0.$$

Если минимум этой функции лежит внутри интервала $(0, v_{max})$, то его можно найти из уравнения

$$\frac{\partial t}{\partial v}=-\frac{s}{v^2}+\lambda skt_0=0,$$

откуда

$$v=v_p=\sqrt{1/(\lambda kt_0)}=\sqrt{v_{max}/(\lambda t_0)}.$$

Эта формула справедлива при $v_p<v_{max}$, т. е. при $v_{max}>1/(\lambda t_0)$ Так, например, при $v_{max}=100$ км/ч, $\lambda=1/20$ км$^{-1}$ и $t_0=20$ мин

$$v_p=\sqrt{100/(^1/_{20}\cdot{}^1/_3)}\approx 77{,}5 \text{ км/ч}.$$

Если $v_{max} < 1/(\lambda t_0)$, то минимум функции $t = s/v + \lambda sp(v)\, t_0$ лежит вне интервала $(0, v_{max})$, и наивыгоднейшей является скорость $v_p = v_{max}$. Например, если при указанных выше данных время задержки уменьшить до 10 мин, то $v_p = v_{max} = 100$ км/ч.

7.59. Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p. Опыты проводятся до тех пор, пока событие A не произойдет k раз, после чего они прекращаются. Случайная величина X — число опытов, которое придется произвести. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Представим случайную величину X в виде суммы:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i,$$

где X_1 — число опытов до первого появления события A; X_2 — число опытов от первого до второго появления события A; ...; X_k — число опытов от $(k-1)$-го до k-го появления события A.

Каждая случайная величина X_i имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы [см. (4.0.32)], и ее характеристики

$$\mathrm{M}[X_i] = 1/p; \; \mathrm{D}[X_i] = q/p^2 \quad (q = 1-p).$$

Пользуясь теоремами сложения математических ожиданий и дисперсий, получаем

$$\mathrm{M}[X] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{M}[X_i] = kp; \quad \mathrm{D}[X] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{D}[X_i] = kq/p^2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{D}[X]} = \sqrt{kq}/p.$$

7.60. Для сборки устройства повышенной надежности необходимо k высококачественных однородных деталей. Перед тем, как поступить в сборку, каждая деталь разносторонне испытывается и (независимо от других) оказывается высококачественной с вероятностью p. После того как набралось k высококачественных деталей, испытания новых прекращаются. Запас деталей практически неограничен. Найти математическое ожидание m_x и дисперсию D_x случайной величины X (число испытанных деталей). Найти X_{max} — максимальное практически возможное число деталей, которые будут испытаны.

Ответ. Из решения предыдущей задачи

$$m_x = kp; \; D_x = kq/p^2; \; \sigma_x = \sqrt{kq}/p; \; X_{max} = kp + 3\sqrt{kq}/p.$$

7.61. Имеется сетевой график планирования управления (СПУ), согласно которому момент Y начала какой-то работы представляет собой максимальное время окончания двух обеспечивающих работ X_1, X_2 (моменты окончания этих работ). Случайные величины X_1, X_2 независимы и имеют плотности $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y, а также диапазон ее практически возможных значений.

Решение. $Y = \max\{X_1, X_2\} = \begin{cases} X_1 & \text{при } X_1 > X_2; \\ X_2 & \text{при } X_1 < X_2. \end{cases}$

Область I, где $X_1 > X_2$, и область II, где $X_1 < X_2$, показаны на рис. 7.61.

$$m_y = M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) \left\{ \int_{-\infty}^{x_1} f_2(x_2)\,dx_2 \right\} dx_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2) \left\{ \int_{-\infty}^{x_2} f_1(x_1)\,dx_1 \right\} dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) F_2(x_1)\,dx_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2) F_1(x_2)\,dx_2,$$

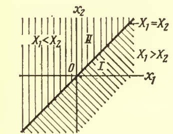


Рис. 7.61

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения случайных величин X_1 и и X_2 соответственно.

$$M[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f_1(x_1) F_2(x_1)\,dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 f_2(x_2) F_1(x_2)\,dx_2;$$

$$D[Y] = M[Y^2] - m_y^2; \quad \sigma_y = \sqrt{D[Y]}.$$

Диапазон практически возможных значений Y равен $m_y \pm 3\sigma_y$.

7.62. В условиях предыдущей задачи для начала работы (момент Y) требуется окончание n предыдущих (обеспечивающих) работ. Моменты их окончания $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и имеют плотности $f_1(x_1)$, $f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$. Ответить на те же вопросы.

Решение.

$Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = X_i$ при $X_i > X_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$;

$$m_y = M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) \left\{ \int_{-\infty}^{x_1} (n-1) \int_{-\infty}^{x_1} f_2(x_2) f_3(x_3) \ldots f_n(x_n)\,dx_2\,dx_3 \ldots dx_n \right\} \times$$

$$\times\, dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2) \left\{ \int_{-\infty}^{x_2} (n-1) \int_{-\infty}^{x_2} f_1(x_1) f_3(x_3) \ldots f_n(x_n)\,dx_1\,dx_3 \ldots dx_n \right\} \times$$

$$\times\, dx_2 + \ldots + \int_{-\infty}^{\infty} x_n f_n(x_n) \left\{ \int_{-\infty}^{x_n} (n-1) \int_{-\infty}^{x_n} f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_{n-1}(x_{n-1})\,dx_1 \times \right.$$

$$\left. \times\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \right\} dx_n.$$

В данном случае ($n-1$)-кратный интеграл распадается на произведение $n-1$ однократных, поэтому

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i) \prod_{\substack{1 \le j \le n \\ i \ne j}} F_j(x_i)\, dx_i,$$

где $F_j(x_i)$— функция распределения случайной величины X_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) при аргументе, равном x_i. Аналогично находим

$$\mathrm{M}[Y^2] = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 f_i(x_i) \prod_{\substack{1 \le j \le n \\ i \ne j}} F_j(x_i)\, dx_i;\ \mathrm{D}[Y] = \mathrm{M}[Y^2] - m_y^2.$$

Если случайные величины X_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) распределены одинаково с плотностью $f(x)$ и функцией распределения $F(x)$, то

$$m_y = n \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) [F(x)]^{n-1}\, dx.$$

Аналогично вычисляются $\mathrm{M}[Y^2]$ и $\mathrm{D}[Y]$:

$$\mathrm{M}[Y^2] = n \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) [F(x)]^{n-1}\, dx;\quad \mathrm{D}[Y] = \mathrm{M}[Y^2] - m_y^2.$$

7.63. Прибор (построенный по типу максимального вольтметра) регистрирует максимальное из двух напряжений: U_1, U_2. Случайные величины U_1, U_2 независимы и имеют одну и ту же плотность $f(u)$. Найти математическое ожидание показания вольтметра, т. е. случайной величины $U = \max\{U_1, U_2\}$, если $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$ $(u > 0)$ — показательное распределение с параметром λ.

Решение. В соответствии с решением предыдущей задачи

$$\mathrm{M}[U] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) F(u)\, du = 2 \int_{0}^{\infty} \lambda u e^{-\lambda u} (1 - e^{-\lambda u})\, du =$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} \lambda u e^{-\lambda u}\, du - 2\lambda \int_{0}^{\infty} u e^{-2\lambda u}\, du = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.$$

Отсюда видно, что $\mathrm{M}[U]$ больше математического ожидания каждой из случайных величин U_1, U_2 в 1,5 раза.

7.64. *Математическое ожидание и дисперсия суммы случайного числа случайных слагаемых.* Случайная величина Z представляет собой сумму: $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$, где случайные величины X_i независимы и имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием m_x и дисперсией D_x; число слагаемых Y есть целочисленная случайная величина, не зависящая от слагаемых X_i, имеющая математическое ожидание m_y и дисперсию D_y. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z.

Р е ш е н и е. Пусть дискретная случайная величина Y имеет ряд распределения

$$Y: \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots \end{array} \right. .$$

Сделаем гипотезу $\{Y = k\}$. При этой гипотезе

$$\mathrm{M}[Z \mid Y = k] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{M}[X_i] = k m_x.$$

По формуле полного математического ожидания

$$\mathrm{M}[Z] = \sum_k k p_k m_x = m_x \sum_k k p_k = m_x \mathrm{M}[Y] = m_x m_y.$$

Аналогично условный второй начальный момент величины Z

$$\mathrm{M}[Z^2 \mid Y = k] = \mathrm{M}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2\right] = \mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_2[X] + 2\sum_{i<j} m_x m_x = k\alpha_2[X] + k(k-1) m_x^2 =$$

$$= k[D_x + m_x^2] + k(k-1) m_x^2 = kD_x + k^2 m_x^2.$$

По формуле полного математического ожидания

$$\alpha_2[Z] = D_x \sum_k k p_k + m_x^2 \sum_k k^2 p_k = D_x m_y + m_x^2 \alpha_2[Y] =$$

$$= D_x m_y + m_x^2 (D_y + m_y^2) = D_x m_y + m_x^2 D_y + m_x^2 m_y^2;$$

$$\mathrm{D}[Z] = \alpha_2[Z] - m_x^2 m_y^2 = D_x m_y + m_x^2 D_y.$$

Итак,

$$m_z = m_x m_y; \quad D_z = D_x m_y + m_x^2 D_y.$$

Если случайная величина Y распределена по закону Пуассона с параметром a, то

$$m_z = a m_x; \quad D_z = a(D_x + m_x^2).$$

7.65. По каналу связи передается сообщение в двоичном коде, состоящее из n символов «0» ил «1»; оба значения одинаково вероятны и принимаются независимо. Найти математическое ожидание и дисперсию числа X перемен символа в сообщении, а также максимальное практически возможное число перемен.

Р е ш е н и е. Рассмотрим $n - 1$ переходов от предыдущего символа к последующему как $n - 1$ независимых опытов, и для каждого из них введем в рассмотрение величину X_i — индикатор перемены символа, равную единице, если символ менялся, и нулю, если оставался прежним.

$$X=\sum_{i=1}^{n-1} X_i;\ \mathrm{M}\,[X]=\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{M}\,[X_i]=\sum_{i=1}^{n-1} p=(n-1)\,p,$$

где p — вероятность того, что на данном (i-м) промежутке произойдет смена символа; аналогично

$$\mathrm{D}\,[X]=\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{D}\,[X_i]=(n-1)\,p\,(1-p).$$

В нашем случае, очевидно, $p = 1/2$ и $\mathrm{M}[X] = (n-1)/2$; $\mathrm{D}\,[X] = (n-1)/4$. По правилу трех сигма $X_{\max} = (n-1)/2 + 3\sqrt{n-1}/2$.

7.66. Группа из четырех радиолокационных станций ведет наблюдение за областью пространства, в которых находится три объекта: S_1, S_2, S_3. Наблюдение ведется в течение некоторого времени τ. За это время каждая из станций независимо от других обнаруживает каждый из объектов с вероятностью p_i, зависящей от номера объекта, и передает его координаты на центральный пульт управления. Найти математическое ожидание числа объектов X, координаты которых будут зарегистрированы на пульте.

Решение. Обозначим X_i индикатор события $A_i = \{i$-й объект обнаружен$\}$:

$$X_i=\begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й объект обнаружен;} \\ 0, \text{ если } i\text{-й объект не обнаружен} \quad (i=1,\,2,\,3). \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины X_i равно $\mathrm{M}[X_i] = \mathrm{P}\,\{i$-й объект обнаружен$\} = 1-(1-p_i)^4$.

Так как $X=\sum_{i=1}^{3} X_i$, то

$$\mathrm{M}\,[X]=\sum_{i=1}^{3}\,[1-(1-p_i)^4]=3-\sum_{i=1}^{3}\,(1-p_i)^4.$$

7.67. Условия предыдущей задачи изменены таким образом, что вероятности обнаружения объекта разными станциями различны: j-я станция обнаруживает i-й объект с вероятностью p_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$).

Ответ. $\mathrm{M}\,[X]=3-\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{4}\,(1-p_{ij})$.

7.68. Радиолокационная станция наблюдает за областью пространства, в которой находятся четыре объекта. Вероятность обнаружения отдельного объекта в зависимости от времени наблюдения выражается функцией $p\,(t)$ и не зависит от того, обнаружены ли другие объекты. Найти: 1) математическое ожидание времени T_1, за которое будет обнаружен хотя бы один объект; 2) математическое ожидание времени T_4, за которое будут обнаружены все четыре объекта.

Решение. 1) Вероятность того, что ни один объект не будет обнаружен за время t, равна $[1-p\,(t)]^4$; вероятность того, то за это время будет обнаружен хотя бы один объект, равна $1-[1-p\,(t)]^4$.

Это есть не что иное, как функция распределения $F_1(t)$ случайной величины T_1. Как мы доказали в задаче 5.28, для неотрицательной случайной величины T_1

$$M[T_1] = \int_1^{\infty} [1 - F_1(t)]\, dt = \int_0^{\infty} [1 - p(t)]^4\, dt.$$

2) Находим вероятность того, что все четыре объекта будут обнаружены за время t; она равна $[p(t)]^4$; это есть функция распределения $F_4(t)$ случайной величины T_4. Ее математическое ожидание

$$M[T_4] = \int_0^{\infty} [1 - F_4(t)]\, dt = \int_0^{\infty} \{1 - [p(t)]^4\}\, dt.$$

Например, если вероятность $p(t)$ задана формулой $p(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, то

$$M[T_1] = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-\alpha t})]^4\, dt = \int_0^{\infty} e^{-4\alpha t}\, dt = \frac{1}{4\alpha};$$

$$M[T_4] = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-\alpha t})^4]\, dt = \frac{25}{\alpha}.$$

В этом примере среднее время обнаружения всех четырех объектов в сто раз больше среднего времени обнаружения хотя бы одного объекта.

7.67. Производится n опытов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A. Случайная величина X — число появлений события A во всей серии опытов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

Р е ш е н и е. Представляем величину X как сумму n случайных величин X_i $(i = 1, \ldots, n)$, где X_i — индикатор события A в i-м опыте:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м опыте событие } A \text{ появится;} \\ 0, & \text{если в } i\text{-м опыте событие } A \text{ не появится.} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i;\quad M[X] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i];$$

$M[X_i] = p_i$, где p_i — вероятность появления события в i-м опыте. Итак,

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i. \tag{7.67.1}$$

В частности, если $p_1 = p_2 = \ldots = p$, то

$$M[X] = np. \tag{7.67.2}$$

Специально подчеркнем, что для применимости формул (7.67.1) и (7.67.2) *вовсе не требуется, чтобы опыты были независимы.*

7.68. Для условий предыдущей задачи 7.67 считая опыты независимыми, найти дисперсию случайной величины X.

Решение. По теореме сложения дисперсий

$$D[X]=D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i].$$

Дисперсия индикатора события A в i-м опыте [см. формулу (4.0.19)] равна $p_i(1-p_i)$; тогда

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i), \tag{7.68.1}$$

В частном случае, когда $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$,

$$D[X] = np(1-p). \tag{7.68.2}$$

Специально подчеркнем, что формулы (7.68.1) и (7.68.2) применимы *только для независимых опытов.*

7.69. Производится n зависимых опытов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A. Случайная величина X — число появлений события. Найти ее дисперсию.

Решение. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, где X_i — индикатор события A в i-м опыте. По общей формуле (7.0.28) для дисперсии суммы случайных величин

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n} D[X_i]+2\sum_{i<j} K_{x_i x_j},$$

где $K_{x_i x_j}$ — корреляционный момент случайных величин X_i, X_j:

$$K_{x_i x_j}=M[X_i X_j]-M[X_i]\,M[X_j].$$

Величина X_iX_j обращается в единицу только если $X_i = 1$ и $X_j = 1$ (т. е. и в i-м, и в j-м опытах появилось событие A). $M[X_iX_j] = p_{ij}$, где p_{ij} — вероятность того, что и в i-м, и в j-м опытах появится событие A. $K_{x_ix_j} = p_{ij}-p_ip_j$; отсюда

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)+2\sum_{i<j}(p_{ij}-p_i p_j), \tag{7.69}$$

Таким образом, для нахождения дисперсии числа появлений события в n зависимых опытах недостаточно знать вероятность p_i появления события в каждом из опытов; надо еще знать вероятность p_{ij} совместного появления события в каждой паре опытов.

В частности, когда $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, p_{ij} не зависит от i и j и равна P, формула (7.69) принимает вид

$$D[X] = np(1-p) + n(n-1)(P-p^2),$$

где $P = p_{ij}$ — вероятность совместного появления события в любой паре опытов.

7.70. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимается наугад k шаров. Случайная величина X — число белых шаров среди вынутых.

Не пользуясь законом распределения случайной величины X (гипергеометрический, см. гл. 4), найти числовые характеристики случайной величины X: ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение. $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$, где

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й вынутый шар белый;} \\ 0, & \text{если он черный.} \end{cases}$$

$$\mathrm{M}[X] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{M}[X_i] = kp,$$

где p — вероятность того, что вынутый шар — белый;

$$p = a/(a+b); \quad \mathrm{M}[X] = ka/(a+b).$$

Дисперсию случайной величины X находим как дисперсию числа появлений события в k зависимых опытах [см. задачу 7.69)]:

$$\mathrm{D}[X] = kp(1-p) + k(k-1)(P - p^2). \tag{7.70}$$

Найдем P—вероятность того, что какие-то два вынутых шара (i-й и j-й) будут белыми: $P = \frac{a}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1}$. Подставляя это выражение и $p = \frac{a}{a+b}$ в (7.70), получаем

$$\mathrm{D}[X] = \frac{kab}{(a+b)^2} + k(k-1)\left(\frac{a}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1} - \frac{a^2}{(a+b)^2}\right).$$

7.71*. На железнодорожную сортировочную станцию подается состав, состоящий из m вагонов; из этих вагонов m_1 направляется в адрес A_1, m_2 = в адрес A_2, ..., m_k—в адрес A_k $\left(\sum_{l=1}^{k} m_l = m\right)$. Вагоны расположены в составе случайно безотносительно к их адресам. Если два соседних вагона направляются в один и тот же адрес, расцеплять их не нужно; если в разные — производится расцеп. Найти математическое ожидание и дисперсию числа расцепов, которые придется произвести, а также оценить (пользуясь правилом трех сигма) диапазон практически возможного числа расцепов.

Решение. Рассмотрим $m-1$ сцепок между вагонами как $m-1$ возможных позиций, на каждой из которых может произойти «расцеп» или «нерасцеп». Обозначим X случайную величину «число расцепов», а Y — «число нерасцепов»; $Y = m - 1 - X$. Проще будет манипулировать со случайной величиной Y. Представим ее в виде суммы: $Y = \sum_{i=1}^{m-1} Y_i$, где

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{если на } i\text{-й позиции не производится расцеп;} \\ 0, & \text{если производится} \end{cases}$$

(индикатор нерасцепа на i-й позиции).

По теореме сложения математических ожиданий $\mathrm{M}[Y] = \sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{M}[Y_i]$; $\mathrm{M}[Y_i] = q_i$, где q_i — вероятность отсутствия расцепа на i-й позиции. Все позиции в одинаковом положении: $q_1 = q_2 = \ldots = q_{m-1} = q$.

Вероятность q того, что на i-й позиции нет расцепа, равна вероятности того, что два вагона, между которыми находится позиция, направляются в один и тот же адрес. Складывая вероятности того, что эти вагоны направляются в 1-, 2-, ..., k-й адрес, находим

$$q=\sum_{l=1}^{k}\frac{m_l\,(m_l-1)}{m\,(m-1)}=\frac{1}{m\,(m-l)}\sum_{l=1}^{k}m_l\,(m_l-1);$$

$$\mathrm{M}\,[Y]=\frac{m-1}{m\,(m-1)}\sum_{l=1}^{k}m_l\,(m_l-1)=\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{k}m_l\,(m_l-1).$$

Отсюда

$$\mathrm{M}\,[X]=m-1-\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{k}m_l\,(m_l-1).$$

Так как величины X и Y различаются на постоянную, $\mathrm{D}\,[X]=\mathrm{D}\,[Y]$. Дисперсию случайной величины Y находим по формуле (7.0.28) для дисперсии суммы:

$$\mathrm{D}\,[Y]=\sum_{i=1}^{m-1}\mathrm{D}\,[Y_i]+2\sum_{i<j}K_{y_i\,y_j}.$$

Корреляционный момент случайных величин Y_i, Y_j находим по формуле

$$K_{y_i\,y_j}=\mathrm{M}\,[Y_i\,Y_j]-\mathrm{M}\,[Y_i]\,\mathrm{M}\,[Y_j]=\mathrm{M}\,[Y_i\,Y_j]-q^2.$$

Произведение Y_iY_j равно нулю, если хотя бы на одной позиции есть расцеп, и равно единице, если на обеих позициях нет расцепа; отсюда

$$K_{y_i\,y_j}=\mathrm{P}\,\{Y_i=1,\ Y_j=1\}-q^2.$$

Находим вероятность того, что на обеих позициях (i-й и j-й) нет расцепа. Эта вероятность различна в случае, когда позиции соседние ($j-i=1$) и не соседние ($j-i>1$). Обозначим эту вероятность, когда позиции соседние, $q_{\text{с}}$, а не соседние $q_{\text{нс}}$. Вероятность того, что на двух соседних позициях нет расцепа, равна вероятности того, что i-й, $(i+1)$-й и $(i+2)$-й вагоны направляются в один адрес:

$$q_{\text{с}}=\sum_{l=1}^{k}\frac{m_l\,(m_l-1)\,(m_l-2)}{m\,(m-1)\,(m-2)}=\frac{1}{m\,(m-1)\,(m-2)}\sum_{l=1}^{k}m_l\,(m_l-1)\,(m_l-2).$$

Для двух соседних позиций $\mathrm{M}\,[Y_iY_j]=q_{\text{с}}$; $K_{y_iy_j}=q_{\text{с}}-q^2$. Вероятность того, что на двух не соседних позициях ($j-i>1$) нет расцепов, равна вероятности того, что каждая пара вагонов, между которыми лежит данная позиция, направляется в один и тот же адрес. Это может осуществиться в двух вариантах: либо все четыре вагона направляются в один и тот же адрес (l-й), либо первая пара направляется в l-й, а вторая — в r-й адрес. Вероятность первого варианта равна $\frac{m_l\,(m_l-1)\,(m_l-2)\,(m_l-3)}{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}$, второго $\frac{m_l\,(m_l-1)\,m_r\,(m\;-1)}{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}$. Полная вероятность того, что на двух не соседних позициях нет расцепа, равна

$$q_{нс} = \frac{1}{m(m-1)(m-2)(m-3)} \left[\sum_{l=1}^{k} m_l (m_l - 1)(m_l - 2)(m_l - 3) + \right.$$

$$\left. + \sum_{r \neq l} m_l (m_l - 1) m_r (m_r - 1) \right].$$

Корреляционный момент $K_{v_i v_j}$ для двух не соседних позиций равен $q_{нс} - q^2$. С учетом количества соседних $(m - 2)$ и не соседних $(C_{m-1}^2 - m + 2)$ пар позиций получим

$$D[X] = D[Y] = (m-1) q (1-q) + 2(m-2)(q_с - q^2) +$$
$$+ [(m-2)(m-3) - 2(m-2)](q_{нс} - q^2); \quad \sigma_x = \sigma_y = \sqrt{D[Y]}.$$

Диапазон практически возможных значений X есть $M[X] \pm 3\sigma_x$.

Примечание: Весь расчет имеет смысл для $m > 3$. Если в формулах для $q_с$ и $q_{нс}$ некоторые множители отрицательны, соответствующие члены полагаются равными нулю.

7.72*. Производится ряд опытов, в каждом из которых некоторое событие A («успех») может появиться или не появиться. Условная вероятность того, что событие A появится при m-м опыте, если в предыдущих $m - 1$ опытах оно не появилось, задана неубывающей функцией $R(m)$ (рис. 7.72)*). Найти среднее число опытов, которое будет произведено до достижения успеха.

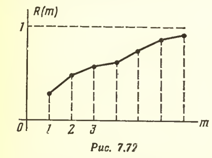


Рис. 7.72

Решение. Допустим, что опыты не прекращаются после достижения успеха, а продолжаются. Каждый из них (кроме первого) может быть «необходимым», если успех до сих пор еще не достигнут, и «излишним», если успех уже достигнут. Свяжем с каждым (i-м) опытом случайную величину X_i, которая равна единице, если опыт необходим, и нулю, если он излишен.

Рассмотрим случайную величину Z — число опытов, которые придется произвести до достижения успеха; она равна сумме всех случайных величин X_i, из которых первая X_1 всегда равна единице (первый опыт всегда необходим):

$$Z = X_1 + \sum_{i=2}^{\infty} X_i.$$

Ряд распределения случайной величины X_i $(i > 1)$ имеет вид

X_i:	0	1
	$R(i-1)$	$1 - R(i-1)$

*) Функция $R(m)$ задана только для целых m, но для наглядности на рис. 7.72 точки соединены отрезками прямых.

(если успех уже был достигнут при предыдущих $i-1$ опытах, i-й опыт излишен; если нет — он необходим). Математическое ожидание случайной величины X_i равно

$$M[X_i] = 0 \cdot R(i-1) + 1 \cdot [1 - R(i-1)] = 1 - R(i-1).$$

Очевидно, так же можно записать и $M[X_1] = M[1] = 1 - R(0)$; отсюда

$$M[Z] = \sum_{i=1}^{\infty} [1 - R(i-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - R(k)].$$

7.73*. Для условий предыдущей задачи 7.72 найти дисперсию количества опытов, достаточного для достижения успеха.

Решение. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ зависимы, поэтому нельзя просто складывать их дисперсии. Найдем второй начальный момент величины Z:

$$M[Z^2] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right)^2\right] = M\left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2\right] + 2M\left[\sum_{j>i} X_i X_j\right];$$

$$M[X_i^2] = 1^2 \cdot [1 - R(i-1)] = 1 - R(i-1).$$

Величина $X_i X_j$ принимает значение 1, если и X_i и X_j равны единице, т. е. оба опыта (i-й и j-й) излишни. Для того чтобы оба опыта (и i-й и j-й) были излишними, достаточно, чтобы излишним был более поздний (j-й) опыт:

$$M[X_i X_j] = P\{X_i = 1,\ X_j = 1\} = 1 - R(j-1);$$

отсюда

$$M[Z^2] = \sum_{i=1}^{\infty} [1 - R(i-1)] + 2\sum_{j>i} [1 - R(j-1)].$$

Последняя сумма

$$\sum_{j>i} [1 - R(j-1)] = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} [1 - R(j-1)] = \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)[1 - R(j-1)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k[1 - R(k)];$$

отсюда

$$D[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - R(k)] + 2\sum_{k=1}^{\infty} k[1 - R(k)] - \left\{\sum_{k=0}^{\infty} [1 - R(k)]\right\}^2.$$

7.74. Вероятность обнаружения объекта радиолокатором с ростом числа циклов обзора n растет по экспоненциальному закону:

$$P(n) = 1 - \alpha^n \quad (0 < \alpha < 1). \qquad (7.74).$$

Найти математическое ожидание числа циклов X, после которого объект будет обнаружен.

Решение. Полагая $\alpha = 1 - p$, перепишем формулу (7.74) в виде

$$P(n) = 1 - (1 - p)^n,$$

из чего мы видим, что циклы независимы и вероятность обнаружения объекта в каждом цикле равна $p = 1 - \alpha$. При этих условиях величина X имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы, а ее математическое ожидание

$$M[X] = 1/p = 1/(1 - \alpha).$$

Тот же результат можно получить, воспользовавшись решением задачи 7.72:

$$M[X] = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - P(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}.$$

7.75. Радиолокационная станция ведет наблюдение за областью пространства, в которой находится n объектов. За один цикл обзора станция обнаруживает каждый объект (независимо от других объектов и других циклов) с вероятностью p. Сколько циклов понадобится для того, чтобы 1) вероятность обнаружения всех объектов стала не меньше P и 2) среднее число обнаруженных объектов стало не меньше данного $m < n$?

Решение. 1) Обозначим $G_n(k)$ вероятность обнаружения всех n объектов за k циклов; $G_n(k) = [G(k)]^n$, где $G(k)$ — вероятность обнаружения одного объекта хотя бы один раз за k циклов. $G(k) = 1 - (1 - p)^n$, откуда $G_n(k) = [1 - (1 - p)^k]^n$. Полагаем $G_n(k) \geqslant P$; $[1 - (1 - p)^k]^n \leqslant P$; $(1 - p)^k \leqslant 1 - \sqrt[n]{P}$; $k \lg (1 - p) \leqslant \lg (1 - \sqrt[n]{P})$. Так как $\lg (1 - p) < 0$, то при делении на него знак неравенства меняется на обратный:

$$k \geqslant \lg\left(1 - \sqrt[n]{P}\right) / \lg (1 - p).$$

2) Среднее число объектов $M[X]$, обнаруженное за k циклов, по теореме сложения математических ожиданий равно $n[1 - (1 - p)^k]$. Полагая $n[1 - (1 - p)^k] \geqslant m$ и решая неравенство относительно показателя k, получаем

$$k \geqslant \lg\left(1 - \frac{m}{n}\right) / \lg (1 - p).$$

7.76.*. Производится n независимых опытов в разных условиях; вероятность появления события A в первом, втором и т. д. опытах равна $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Нас интересуют математическое ожидание и дисперсия случайной величины X — общего числа появлений события A. Для упрощения вычислений вероятности p_i осредняются и заменяются одной, постоянной:

$$\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Верно ли будут вычислены $M[X]$ и $D[X]$?

Решение. $M[X]$ будет вычислено верно:

$$M[X] = n\bar{p} = \frac{n}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Что касается дисперсии, то она будет завышена. Для доказательства сравним приближенное выражение дисперсии

$$\tilde{D}_x = n\bar{p}\bar{q}, \text{ где } \bar{q} = 1 - \bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

с ее точным значением

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i, \text{ где } q_i = 1 - p_i.$$

Преобразуем двумя способами сумму

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{q}) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{q} - \sum_{i=1}^{n} \bar{p} q_i + n\bar{p}\bar{q} = \\ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - n\bar{p}\bar{q},$$

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{q}) = \sum_{i=1}^{n} (p_i - \bar{p})(1 - p_i - 1 + \bar{p}) = -\sum_{i=1}^{n} (p_i - \bar{p})^2 \leqslant 0.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i - n\bar{p}\bar{q} = D_x - \tilde{D}_x \leqslant 0; \; \tilde{D}_x \geqslant D_x,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что знак равенства в $\tilde{D}_x \geqslant D_x$ достигается только при $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \bar{p}$.

7.77*. Доказать, что если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, положительны и одинаково распределены, то

$$M\left[\sum_{i=1}^{k} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \frac{k}{n}.$$

Решение. Так как все величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ положительны, то в знаменателе никогда не стоит нуль. По теореме сложения математических ожиданий

$$M\left[\sum_{i=1}^{k} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{k} M\left[X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right].$$

Так как все величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены одинаково, то

$$M\left[X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = M\left[X_m \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right]$$

при любых i и m. Обозначим α их общее значение:

$$M\left[X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Вместе с тем ясно, что сумма всех величин вида $X_i / \sum_{j=1}^{n} X_j$ равна единице, следовательно, и математическое ожидание ее тоже равно единице:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{n} M\left[X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = 1.$$

Заменяя выражение, стоящее под знаком математического ожидания через α, имеем $\sum_{j=1}^{n} \alpha = n\alpha = 1$, откуда $\alpha = 1/n$. Следовательно,

$$M\left[\sum_{i=1}^{k} X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{k} M\left[X_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$

что и требовалось доказать.

7.78. Имеется n потребителей энергии, потребности которых за единицу времени представляют собой независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ с одним и тем же (произвольным) распределением. Рассматривается случайная величина $Z_i = X_i / \sum_{i=1}^{n} X_i$ $(i = 1, \dots, n)$ — доля i-го потребителя в суммарном потреблении энергии. Доказать, что при любом i математическое ожидание случайной величины Z_i равно $1/n$.

Р е ш е н и е. Ясно, что математическое ожидание величины Z_i существует, так как ее значение заключено между нулем и единицей. Законы распределения всех случайных величин Z_i $(i = 1, \dots, n)$ одинаковы (в силу полной симметрии задачи), и их математические ожидания равны: $M[Z_1] = M[Z_2] = \dots = M[Z_n]$. Так как сумма всех случайных величин Z_i равна единице, то сумма их математических ожиданий также равна единице:

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[Z_i] = 1, \text{ т. е. } nM[Z_i] = 1;$$

$$M[Z_i] = 1/n \quad (i = 1, \dots, n).$$

7.79. Для построения равностороннего треугольника со стороной $a = 3$ см пользуются следующим способом: из произвольной точки O откладывают отрезок длины a; при нем строят угол, равный 60°; затем на стороне этого угла снова откладывают отрезок длины a и полученную точку соединяют с точкой O (рис. 7.79). Отрезки длины a откладываются с помощью линейки с делениями по 1 мм; максимально возможная при этом ошибка равна 0,5 мм. Угол откладывается с помощью транспортира с максимально возможной ошибкой 1°. Пользуясь методом линеаризации, найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение третьей стороны X.

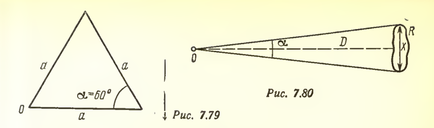


Рис. 7.79

Рис. 7.80

Решение. Обозначим фактическую длину первой стороны X_1, второй X_2, фактическое значение угла Θ. Эти случайные величины можно считать независимыми. Имеем

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2 \cos\Theta}.$$

Пользуясь методом линеаризации, найдем

$$m_x = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 - 2m_{x_1} m_{x_2} \cos m_\vartheta},$$

где $m_{x_1} = m_{x_2} = 30$ мм, $\cos m_\vartheta = 0{,}5$, откуда $m_x = \sqrt{900 + 900 - 900} = 30$ мм. Далее

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)_m = \left(\frac{1}{2}\,\frac{2x_1 - 2x_2\cos\vartheta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos\vartheta}}\right)_m = \frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)_m = \left(\frac{1}{2}\,\frac{2x_2 - 2x_1\cos\vartheta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos\vartheta}}\right)_m = \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)_m = \left(\frac{1}{2}\,\frac{2x_1 x_2 \sin\vartheta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos\vartheta}}\right)_m = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ мм}.$$

Вычисляем

$$D_x \approx \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)_m^2 D_{x_1} + \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)_m^2 D_{x_2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)_m D_\vartheta.$$

Дисперсии аргументов нам не заданы, заданы лишь максимальные практически возможные отклонения их от математических ожиданий: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0{,}5$ мм; $\Delta\vartheta = 1° = 0{,}01745$ рад. Полагая приближенно $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \Delta x_1/3 = 0{,}167$ мм, $D_{x_1} = D_{x_2} = 0{,}0278$ мм^2, $\sigma_\vartheta = \Delta\vartheta/3 = 0{,}00582$ рад, $D_\vartheta = 3{,}39 \cdot 10^{-5}$ рад, получаем $D_x = 0{,}25 \times 0{,}0278 \cdot 2 + 675 \cdot 3{,}39 \cdot 10^{-5} \approx 0{,}0368$ мм^2, $\sigma_x \approx 0{,}192$ мм.

7.80. Расстояние D от некоторой точки O до объекта R определяется следующим образом: измеряется угол α, под которым виден объект из точки O (рис. 7.80); далее, зная линейный размер объекта X и считая угол α малым, определяют расстояние по приближенной формуле:

$$D = X/[2\sin(\alpha/2)] \approx X/\alpha.$$

Линейный размер объекта X, видимый из точки O, в зависимости от его случайного поворота может изменяться в пределах от 8 до 12 м; угол α определяется с точностью до 0,1 тыс. радиана. Расстояние D велико по сравнению с размером объекта X. Найти приближенно среднее

квадратическое отклонение σ_D ошибки в определении расстояния D, если измеренное значение угла α равно одной тысячной радиана.

Решение. Применяя метод линеаризации, имеем

$$\sigma_D^2 = \left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)_m^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right)_m^2 \sigma_\alpha^2.$$

Линейный размер X будем считать равномерно распределенным в интервале $(8;\ 12)$: $\sigma_x = (12-8)/(2\sqrt{3}) = 2/\sqrt{3}$ м, $\sigma_x^2 = 4/3$ м^2; $m_x = 10$ м. Далее $\sigma_\alpha \approx \frac{1}{3}\,0{,}0001$; $\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{9}\,10^{-8}$; $m_\alpha = 0{,}001$, откуда

$$\sigma_D^2 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)_m^2 \sigma_x^2 + \left(-\frac{x}{\alpha^2}\right)_m^2 \sigma_\alpha^2 = \frac{13}{9}\,10^6 \text{ м}^2;$$

$$\sigma_D = \frac{\sqrt{13}}{3}\cdot 10^3 = 1{,}20\cdot 10^3 \text{ м}.$$

7.81. Имеются две почти линейные функции n случайных аргументов: $Y = \varphi_y(X_1, X_2, \ldots, X_n)$; $Z = \varphi_z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Даны характеристики системы m_{x_i}, D_{x_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и корреляционная матрица $\|K_{ij}\|$. Найти приближенно корреляционный момент K_{yz}.

Решение. Линеаризуя функции φ_y и φ_z, получаем

$$Y \approx \varphi_y\left(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_i;$$

$$Z \approx \varphi_z\left(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_i;$$

отсюда

$$\mathring{Y} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_i;\quad \mathring{Z} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_i;$$

$$K_{yz} = \mathrm{M}\left[\mathring{Y}\mathring{Z}\right] = \mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_i \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right)_m \mathring{X}_j\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right)_m D_{x_i} + \sum_{i \neq j}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_j}\right)_m K_{ij}.$$

Последняя сумма содержит $n(n-1)$ членов; каждому K_{ij} соответствуют два члена суммы:

$$\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i}\right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_j}\right)_m K_{ij} \text{ и } \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_j}\right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i}\right)_m K_{ij}.$$

7.82. Для определения расстояния R от точки K до начала координат можно применить два способа: 1) определить расстояния X и Y

до осей координат и затем найти R по формуле $R_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}$; 2) измерить только расстояние Y до оси абсцисс и угол α (рис. 7.82), затем найти R по формуле $R_2 = Y/\cos\alpha$. Нас интересует, какой способ приведет к меньшей погрешности, если расстояния X и Y и угол α определяются с независимыми друг от друга ошибками, причем средние квадратические отклонения ошибок X, Y равны $\sigma_x = \sigma_y$, а ошибки в угле — σ_α?

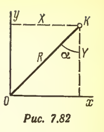


Рис. 7.82

Привести численный расчет для значений средних квадратических ошибок $\sigma_x = \sigma_y = 1$ м; $\sigma_\alpha = 1° = 0{,}0174$ рад при средних значениях параметров, равных $m_x = 100$ м; $m_y = 60$ м; $m_\alpha = \operatorname{arc\,tg}(m_x/m_y) \approx 59° \approx 1{,}03$ рад.

Решение: 1) $\dfrac{\partial R_1}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial R_1}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

$$D[R_1] = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)_m \sigma_x^2 + \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)_m \sigma_y^2 = \sigma_y^2;\quad \sigma_1 = \sqrt{D[R_1]} = \sigma_y.$$

$$2)\ \frac{\partial R_2}{\partial y} = \frac{1}{\cos\alpha};\ \frac{\partial R_2}{\partial \alpha} = \frac{y \sin\alpha}{\cos^2\alpha};$$

$$D[R_2] = \left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)_m \sigma_y^2 + \left(\frac{y^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}\right)_m \sigma_\alpha^2 > \sigma_y^2;\ \sigma_2 = \sqrt{D[R_2]} > \sigma_1.$$

Для числовых данных задачи первый способ более точен:

$$\sigma_1 = \sigma_y = 1\ \text{м};\ \sigma_2 = \left(\left[1 + \left(\frac{100}{60}\right)^2\right]\left[1^2 + 60^2\left(\frac{100}{60}\right)^2 0{,}0174^2\right]\right)^{1/2} = 3{,}9\ \text{м}.$$

7.83. Система трех случайных величин X, Y, Z имеет математические ожидания $m_x = 10$, $m_y = 5$, $m_z = 3$; средние квадратические отклонения $\sigma_x = 0{,}1$, $\sigma_y = 0{,}06$, $\sigma_z = 0{,}08$ и нормированную корреляционную матрицу

$$\|r\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0{,}7 & -0{,}3 \\ & 1 & 0{,}6 \\ & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Пользуясь методом линеаризации, найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины $U = (3X^2 + 1)/(Y^2 + 2\ Z^2)$.

Решение. $m_y = (3\cdot 100 + 1)/(25 + 2\cdot 9) = 301/43 = 7.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{6x}{y^2 + 2z^2};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{(3x^2+1)\,2y}{(y^2+2z^2)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{(3x^2+1)\,4z}{(y^2+2z^2)^2};\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m = \frac{6\cdot 10}{43} = 1{,}4;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_m = -\frac{301\cdot 10}{(43)^2} = -1{,}63; \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_m = -\frac{201\cdot 12}{(43)^2} = -1{,}95;$$

$$D[U] = 1{,}4^2 \cdot 0{,}1^2 + 1{,}63^2 \cdot 0{,}06^2 + 1{,}95^2\, 0{,}08^2 +$$

$$+ 2\,[-1{,}4\cdot 1{,}63\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1\cdot 0{,}06 + 1{,}4\cdot 1{,}95 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}03 +$$

$$+ 1{,}63 \cdot 1{,}95 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}08] \approx 0{,}066; \quad \sigma_u \approx 0{,}26.$$

7.84. Производится параллельное соединение двух выбранных наугад сопротивлений: R_1 и R_2. Номинальное значение каждого сопротивления одинаково и равно $m_{r_1} = m_{r_2} = 900$ Ом. Максимальная ошибка в R при изготовлении сопротивлений равна 1 % номинального значения. Определить методом линеаризации номинальное значение сопротивления такого соединения и его среднее квадратическое отклонение.

Решение: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \varphi(R_1, R_2)$; $m_r = \varphi(m_{r_1}, m_{r_2}) = 450$ Ом;

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{r_2} = \frac{1}{3}\,\frac{900}{100} = 3 \text{ Ом}; \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_1}\right)_m = \left[\frac{r_2^2}{(r_1+r_2)^2}\right]_m = \frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_2}\right)_m = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_1}\right)_m = \frac{1}{4};$$

$$D[R] = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_i}\right)_m^2 \sigma_{r_i}^2 = \frac{9}{8} \text{ Ом}^2; \ \sigma_r \approx 1{,}06 \text{ Ом}.$$

При этом максимальная ошибка будет 3,2 Ом, что составляет 0,7% (а не 1 %, как было первоначально) номинала.

7.85. Резонансная частота колебательного контура f_p определяется из выражения $f_p = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, где L — индуктивность контура, C — емкость контура. Определить приближенно среднее значение резонансной частоты контура и ее среднее квадратическое отклонение если $m_l = 50$ мкГн; $m_C = 200$ пФ, $\sigma_l = 0{,}5$ мкГн и $\sigma_C = 1{,}5$ пФ.

Решение. $m_{f_p} = 1/\left(2\pi\sqrt{m_l m_C}\right) = 1{,}59$ МГц.

$$\left(\frac{\partial f_p}{\partial l}\right)_m = \frac{1}{2\pi m_C^{1/2} m_l^{3/2}\, 2} = m_{f_p}\frac{1}{2m_l};$$

$$\left(\frac{\partial f_p}{\partial C}\right)_m = \frac{1}{2\pi m_l^{1/2}\, m_C^{3/2}\, 2} = m_{f_p}\frac{1}{2m_C};$$

$$D_{f_p} = \left(\frac{\partial f_p}{\partial l}\right)_m^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial f_p}{\partial C}\right)_m^2 \sigma_C^2 = \frac{m_{f_p}^2}{4}\left(\frac{\sigma_l^2}{m_l^2} + \frac{\sigma_C^2}{m_C^2}\right) =$$

$$= \bar{m}_{f_p}^2\left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot 10^{-4};$$

$$\sigma_{f_p} = m_{f_p}\frac{5}{8}\cdot 10^{-2} = 1{,}0\cdot 10^{-2} \text{ МГц},$$

что составляет 0,62% номинальной частоты.

ГЛАВА 8

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8.0. Если X — непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, а случайная величина Y связана с нею функциональной зависимостью

$$Y = \varphi(X),$$

где φ — дифференцируемая функция, монотонная на всем участке возможных значений аргумента X, то плотность случайной величины Y выражается формулой

$$g(y) = f(\psi(y))\,|\psi'(y)|, \tag{8.0.1}$$

где ψ — функция, обратная по отношению к φ.

Если φ — функция немонотонная, то обратная функция неоднозначна, и плотность случайной величины Y определяется в виде суммы стольких слагаемых, сколько значений (при данном y) имеет обратная функция:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y))\,|\psi_i'(y)|, \tag{8.0.2}$$

где $\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_k(y)$ — значения обратной функции для данного y.

Для функции нескольких случайных величин удобнее искать не плотность распределения, а функцию распределения. В частности, для функции двух аргументов $Z = \varphi(X, Y)$ функция распределения

$$G(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{8.0.3}$$

где $f(x, y)$ — совместная плотность величин X, Y; $D(z)$ — область на плоскости xOy, для которой $\varphi(x, y) < z$.

Плотность $g(z)$ определяется дифференцированием $G(z)$: $g(z) = G'(z)$.

Плотность распределения суммы двух случайных величин $Z = X + Y$ выражается любой из формул:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx; \qquad g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy, \tag{8.0.4}$$

где $f(x, y)$ — совместная плотность распределения величин X, Y.

В частности, когда случайные величины X, Y независимы, $f(x, y) = f_1(x) \times f_2(y)$ и

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx, \tag{8.0.5}$$

или

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)\,f_2(y)\,dy. \tag{8.0.6}$$

В этом случае закон распределения суммы $g(z)$ называется *композицией* законов распределения слагаемых $f_1(x)$, $f_2(y)$.

Если случайные величины, подчиненные нормальному закону, подвергать любому линейному преобразованию, то будут получаться снова случайные величины, распределенные нормально. В частности, если случайная величина X распределена нормально с параметрами m_x, σ_x, то случайная величина $Y = aX + b$ (где a, b неслучайны) распределена нормально с параметрами $m_y = am_x + b$; $\sigma_y = |a|\sigma_x$.

При композиции двух нормальных законов $f_1(x)$ *в параметрами* m_x, σ_x *и* $f_2(y)$ *с параметрами* m_y, σ_y *— получается снова нормальный закон с параметрами*

$$m_z=m_x+m_y; \quad \sigma_z=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}. \qquad (8.0.7)$$

При сложении двух нормально распределенных случайных величин X, Y с параметрами $m_x, \sigma_x, m_y, \sigma_y$ и коэффициентом корреляции r_{xy} получается случайная величина Z, *также распределенная нормально*, с параметрами

$$m_z=m_x+m_y; \quad \sigma_z=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}. \qquad (8.0.8)$$

Линейная функция от нескольких независимых нормально распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$$Z=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i+b,$$

где a_i, b — неслучайные коэффициенты, также имеет нормальный закон распределения с параметрами

$$m_z=\sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i}+b; \quad \sigma_z=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_{x_i}^2}, \qquad (8.0.9)$$

где m_{x_i}, σ_{x_i} — параметры случайной величины X_i $(i=1, \ldots, n)$.

Если аргументы $X_1, X_2, \ldots, X$ коррелированы, закон распределения линейной функции остается нормальным, но с параметрами

$$m_z=\sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i}+b; \quad \sigma_z=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_{x_i}^2+2\sum_{i<j} a_i a_j r_{x_i x_j}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}}, \qquad (8.0.10)$$

где $r_{x_i x_j}$ — коэффициент корреляции величин X_i, X_j $(i=1, \ldots, n;\ j\neq i)$.

Композицией двух нормальных законов на плоскости называют закон распределения случайного вектора с составляющими $X=X_1+X_2$; $Y=Y_1+Y_2$, где (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) — случайные векторы, не коррелированные между собой $(r_{x_1x_2}=r_{x_1y_2}=r_{y_1x_2}=r_{y_1y_2}=0)$.

При композиции двух нормальных законов на плоскости получают снова нормальный закон с параметрами

$$m_x=m_{x_1}+m_{x_2}; \quad m_y=m_{y_1}+m_{y_2};$$
$$\sigma_x=\sqrt{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2}; \quad \sigma_y=\sqrt{\sigma_{y_1}^2+\sigma_{y_2}^2}; \qquad (8.0.11)$$

откуда

$$K_{xy}=K_{x_1y_1}+K_{x_2y_2},$$
$$r_{xy}=(r_{x_1y_1}\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}+r_{x_2y_2}\sigma_{x_2}\sigma_{y_2})/(\sigma_x\sigma_y). \qquad (8.0.12)$$

При проектировании случайной точки (X, Y), распределенной на плоскости по нормальному закону, на ось $0z$, проходящую через центр рассеивания и составляющую угол α с осью $0x$, получается случайная точка Z, распределенная по нормальному закону с параметрами

$$m_z=m_x\cos\alpha+m_y\sin\alpha;$$
$$\sigma_z=\sqrt{\sigma_x^2\cos^2\alpha+\sigma_y^2\sin^2\alpha+r_{xy}\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha}. \qquad (8.0.13)$$

Предельные теоремы теории вероятностей образуют две группы теорем: 1) закон больших чисел и 2) центральная предельная теорема. Закон больших чисел имеет несколько форм, каждая из которых устанавливает ту или иную *устойчивость средних* при большом числе наблюдений.

1. *Теорема Я. Бернулли* (простейшая форма закона больших чисел). При неограниченном увеличении числа n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, частота P_n^* события A сходится по вероятности к вероятности p этого события:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{|P_n^* - p| < \varepsilon\} = 1, \tag{8.0.14}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

2. *Теорема Пуассона.* При неограниченном увеличении числа n независимых опытов, в которых событие A появляется с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, частота P_n^* события A сходится по вероятности к средней вероятности события:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left| P_n^* - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{8.0.15}$$

3. *Теорема Чебышева (закон больших чисел).* При неограниченном увеличении числа n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина X с математическим ожиданием m_x принимает какое-то значение X_i, среднее арифметическое этих значений сходится по вероятности к математическому ожиданию случайной величины X:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_x \right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{8.0.16}$$

4. *Теорема Маркова (закон больших чисел для разных условий опыта).* Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}$ и дисперсиями $D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_n}$, причем все дисперсии ограничены сверху одним и тем же числом L: $D_{x_i} < L$ $(i=1, \ldots, n)$, то при неограниченном возрастании n среднее арифметическое наблюденных значений случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} \right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{8.0.17}$$

При оценке скорости сходимости по вероятности различных средних к постоянным величинам можно пользоваться *неравенством Чебышева*:

$$\mathrm{P}\{|X - m_x| \geqslant \alpha\} \leqslant D_x/\alpha^2, \tag{8.0.18}$$

где $\alpha > 0$; m_x, D_x — математическое ожидание и дисперсия случайной величины X.

Центральная предельная теорема имеет различные формы, из которых мы приводим три.

1. *Теорема Лапласа.* Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A имеет вероятность p, то при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины X — числа появлений события — *неограниченно приближается к нормальному закону* с параметрами $m = np$; $\sigma = \sqrt{npq}$ $(q = 1 - p)$. На основе этого можно вычислить вероятность попадания величины X на любой участок (α, β): при достаточно большом n

$$\mathrm{P}\{X \in (\alpha, \beta)\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{8.0.19}$$

Вместо формулы (8.0.19) часто пользуются выражением для вероятности попадания на участок не самой случайной величины X, а нормированной величины

$$Z = (X - m_x)/\sigma_x = (X - np)/\sqrt{npq}; \; m_z = 0, \; \sigma_z = 1.$$

При достаточно большом n

$$P\{Z \in (\alpha, \beta)\} \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \qquad (8.0.20)$$

2. *Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых.* Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — одинаково распределенные независимые случайные величины с математическим ожиданием m_x и средним квадратическим отклонением σ_x, то *их сумма* $Y = \sum_{i=0}^{n} X_i$ при достаточно большом n *имеет приближенно нормальное распределение* с параметрами

$$m_y = nm_x, \; \sigma_y = \sqrt{n}\; \sigma_x. \qquad (8.0.21)$$

3. *Теорема Ляпунова.* Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие математические ожидания $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}$ и дисперсии D_{x_1}, $D_{x_2}, \ldots, D_{x_n}$ причем выполняется ограничение

$$\lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} D_{x_i} \right)^{3/2} \right] = 0, \qquad (8.0.22)$$

где $b_i = M[\,|X_i|^3]$, то случайная величина $Y = \sum_{i=0}^{n} X_i$ при достаточно большом n имеет *приближенно нормальное распределение* с параметрами

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}; \; \sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}}. \qquad (8.0.23)$$

Смысл ограничения (8.0.22) в том, чтобы случайные величины были сравнимы по порядку своего влияния на рассеивание суммы.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Непрерывная случайная величина X имеет плотность $f(x)$ Найти плотность $g(y)$ случайной величины $Y = aX + b$, где a и b не случайны.

Решение. Так как функция $\varphi(x) = ax + b$ монотонна, применяем формулу (8.0.1). Обратную функцию $\psi(y)$ находим, разрешая относительно x уравнение $y = ax + b$; получим $\psi(y) = (y - b)/a$. Находим $\psi'(y) = 1/a$; $|\psi'(y)| = 1/|a|$;

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right). \qquad (8.1)$$

8.2. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin X$.

Решение. Функция $y = \sin x$ в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ монотонна, поэтому плотность распределения величины Y может быть найдена по формуле (8.0.1): $g(y) = f(\psi(y))\,|\psi'(y)|$. Решение задачи удобно располагать в виде двух столбцов: слева писать обозначения функций, принятые в общем случае; справа — конкретные функции, соответствующие данному примеру:

$f(x)$	$1/\pi$ при $x \in (-\pi/2; \pi/2)$
$y = \varphi(x)$	$y = \sin x$
$x = \psi(y)$	$x = \arcsin y$
$\psi'(y)$	$1/\sqrt{1-y^2}$
$g(y) = f(\psi(y))\psi'(y)$	$g(y) = 1/(\pi\sqrt{1-y^2})$ при $y \in (-1; 1)$.

Интервал $(-1; 1)$, в котором лежат значения случайной величины Y, определяется областью значений функций $y = \sin x$ для $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ *).

8.3. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Найти плотность $g(y)$ случайной величины $Y = \cos X$.

Решение. Функция $y = \cos x$ немонотонна в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Решение будем составлять аналогично предыдущему с той разницей, что в данном случае для любого y обратная функция будет иметь два значения [см. (8.0.2)]. Решение снова оформляем в виде двух столбцов:

$f(x)$	$1/\pi$ при $x \in (-\pi/2; \pi/2)$
$y = \varphi(x)$	$y = \cos x$
$x = \begin{cases} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \end{cases}$	$x_1 = -\arccos y$ $x_2 = \arccos y$
$\lvert\psi_1'(y)\rvert, \lvert\psi_2'(y)\rvert$	$1/\sqrt{1-y^2}$
$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y))\lvert\psi_i'(y)\rvert$	$g(y) = 2/(\pi\sqrt{1-y^2})$ при $y \in (0,1)$

8.4. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = |\sin X|$.

Ответ. $g(y) = 2/(\pi\sqrt{1-y^2})$ при $y \in (0,1)$.

8.5. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = |1 - X|$.

Решение. Функция $y = |1 - x|$ — немонотонная. Решение будем составлять так же, как в задаче 8.3:

$f(x)$	$f(x)$
$y = \varphi(x)$	$y = \lvert 1 - x\rvert$
$x = \begin{cases} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \end{cases}$	$x_1 = 1 - y$ $x_2 = 1 + y$
$\lvert\psi_1'(y)\rvert, \lvert\psi_2'(y)\rvert$	1
$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y))\lvert\psi_i'(y)\rvert$	$g(y) = f(1-y) + f(1+y)$ при $y > 0$

* В дальнейшем при решении аналогичных задач мы всюду, как и здесь, будем писать выражение плотности только на участке, где она отлична от нуля, подразумевая при этом, что вне этого участка она равна нулю.

8.6. Непрерывная случайная величина X имеет плотность $f_x(x)$. Рассматривается величина $Y = -X$. Найти ее плотность $f_y(y)$.

Ответ. $f_y(y) = f_x(-y)$.

8.7. Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на участке (α, β) $(\beta > \alpha)$. Найти распределение величины $Y = -X$.

Ответ. Равномерное на участке $(-\beta, -\alpha)$.

8.8. Непрерывная случайная величина X имеет плотность $f_x(x)$. Найти плотность $f_y(y)$ ее модуля $Y = |X|$.

Ответ. $f_y(y) = f_x(-y) + f_x(y)$ при $y > 0$.

8.9. Случайная величина X распределена нормально с параметрами m_x, σ_x. Написать плотность распределения ее модуля $Y = |X|$. В частности, каков будет этот закон распределения при $m_x = 0$?

Ответ. $$f_y(y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{(y+m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\frac{(y-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]\right\} \text{ при } y > 0. \text{ Если } m_x = 0, \text{ то}$$

$$f_y(y) = \frac{2}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}\right) \text{ при } y > 0.$$

8.10. Круглое колесо, закрепленное в центре O (рис. 8.10), приводится во вращение, которое затухает вследствие трения. В результате фиксированная точка A на ободе колеса останавливается на некоторой высоте H (положительной или отрицательной) относительно горизонтальной линии $l - l$, проходящей через центр колеса; высота H зависит от случайного угла Θ, при котором остановилось вращение. Найти: 1) закон распределения высоты H; 2) закон распределения расстояния D от точки A до прямой $l - l$ (считая это расстояние всегда положительным).

Решение. $H = r \sin\Theta$, где угол Θ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0; 2\pi)$. Очевидно, решение задачи не изменится, если считать случайную величину Θ распределенной равномерно в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$; тогда H является монотонной функцией Θ.

Плотность распределения величины H равна

$$g(h) = \left(\pi r\sqrt{1-\left(\frac{h}{r}\right)^2}\right)^{-1} \text{ при } -r < h < r.$$

Плотность распределения величины $D = |H|$ равна

$$g_1(d) = 2\left(\pi r\sqrt{1-\left(\frac{d}{r}\right)^2}\right)^{-1} \text{ при } 0 < d < r.$$

8.11. Случайная величина X распределена по закону Рэлея с плотностью $f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ при $x > 0$. Найти плотность $g(y)$ величины $Y = e^{-X^2}$.

Р е ш е н и е. На участке возможных значений аргумента функция $y = e^{-x^2}$ монотонна. Применяя общее правило, получаем

$f(x)$	$\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) (x > 0)$
$y = \varphi(x)$	$y = e^{-x^2}$
$x = \psi(y)$	$x = \sqrt{-\ln y}$
$\lvert\psi'(y)\rvert$	$(2y\sqrt{-\ln y})^{-1}$
$g(y) = f(\psi(y))\lvert\psi'(y)\rvert$	$g(y) = \frac{1}{2\sigma^2 y} \exp\left(\frac{\ln y}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\sigma^2} y^{\frac{1-2\sigma^2}{2\sigma^2}}$ при $0 < y < 1$

Графики $g(y)$ при разных σ приведены на рис. 8.11.

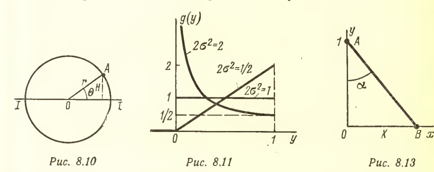


Рис. 8.10 Рис. 8.11 Рис. 8.13

8.12. Случайная величина X_1 распределена по закону Коши с плотностью $f(x) = [\pi(1 + x^2)]^{-1}$ $(-\infty < x < \infty)$. Найти плотность $g(y)$ обратной величины $Y = 1/X$.

Р е ш е н и е. Учитывая, что, несмотря на разрывный характер функции $y = 1/x$, обратная функция $x = 1/y$ однозначна, и решая задачу по правилам для монотонной функции, получаем

$$g(y) = \frac{1}{\pi\left[1 + \frac{1}{y}\right]^2} \frac{1}{y^2} \text{ или } g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \quad (-\infty < y < \infty),$$

т. е. *величина, обратная величине, распределенной по закону Коши, также имеет распределение Коши.*

8.13. Через точку A, лежащую на оси $0y$ на расстоянии 1 от начала координат, проводится прямая AB под углом α к оси $0y$ (рис. 8.13). Все значения угла α от $-\pi/2$ до $\pi/2$ равновероятны. Найти плотность распределения $g(x)$ абсциссы X точки B пересечения прямой с осью абсцисс.

Р е ш е н и е. $X = \operatorname{tg}\alpha$; эта функция монотонна на участке $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Имеем $g(x) = [\pi(1 + x^2)]^{-1}$ $(-\infty < x < \infty)$, т. е. случайная величина X распределена по закону Коши.

8.14. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

X:

2	−1	0	1	2
0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить ряды распределения случайных величин $Y = X^2 + 1$; $Z = |X|$.

Решение. Определяя для каждого X соответствующие значения величин Y и Z и располагая их в возрастающем порядке, получаем ряды распределения

Y:

1	2	5
0,3	0,5	0,2

, Z:

0	1	2
0,3	0,5	0,2

8.15. Через точку A с координатами (0; 1) проводится прямая AB под случайным углом Θ к оси ординат (рис. 8.15). Закон распределения угла Θ имеет вид $f(\Theta) = 0{,}5 \cos \vartheta$ при $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$. Найти закон распределения расстояния L от прямой AB до начала координат.

Решение. Имеем $L = |\sin \Theta|$. Функция $l = |\sin \vartheta|$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ немонотонна. Применяя обычную схему для немонотонной функции, получаем

$$g(l) = \frac{1}{\sqrt{1-l^2}} \cos(\arc \sin l)$$

или, имея в виду, что $\cos(\arc \sin l) = \sqrt{1-l^2}$, $g(l) = 1$ при $l \in (0, 1)$, т. е. расстояние L распределено равномерно в интервале (0; 1).

8.16. Радиус круга R — случайная величина, распределенная по закону Рэлея:

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \text{при } r > 0.$$

Найти закон распределения площади круга S.

Решение. Функция $S = \pi R^2$ на участке возможных значений R $(0, \infty)$ монотонна, следовательно,

$$g(s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{s}{2\pi\sigma^2}\right) \quad \text{при } s > 0,$$

т. е. закон распределения площади круга есть показательный закон с параметром $1/(2\pi\sigma^2)$.

8.17. Случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$; случайная величина Y связана с нею функциональной зависимостью: $Y = 2 - 3X$. Найти функцию распределения $\tilde{F}(y)$ случайной величины Y.

Решение.

$$\tilde{F}(y) = \mathrm{P}\{Y < y\} = \mathrm{P}\{2 - 3X < y\} = \mathrm{P}\left\{X > \frac{2-y}{3}\right\} =$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left\{X \leqslant \frac{2-y}{3}\right\} = 1 - F\left(\frac{2-y}{3}\right) - \mathrm{P}\left\{X = \frac{2-y}{3}\right\}.$$

Если случайная величина X непрерывна, то вероятность того, что она примет любое отдельное значение, равна нулю, и

$$\tilde{F}(y) = 1 - F\left(\frac{2-y}{3}\right).$$

Если величина X смешанная или дискретная, то $\mathrm{P}\left\{X = \frac{2-y}{3}\right\}$ может быть отлична от нуля и равна скачку функции $F(x)$ в точке $(2-y)/3$; таким образом, в общем случае

$$\tilde{F}(y) = 1 - F\left(\frac{2-y}{3}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left[F\left(\frac{2-y}{3} + \Delta x\right) - F\left(\frac{2-y}{3}\right)\right].$$

8.18. Имеется непрерывная случайная величина X с функцией распределения $F(x)$ (рис. 8.18). Найти и построить функцию распределения $G(y)$ случайной величины $Y = |X|$.

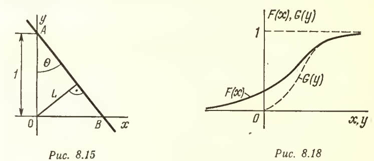


Рис. 8.15 Рис. 8.18

Решение. При $X > 0$ получим $Y = X$; при $X < 0$ получим $Y = -X$.

$$G(y) = \mathrm{P}\{Y < y\} = \mathrm{P}\{|X| < y\}.$$

При $y < 0$ получим $G(y) = 0$; при $y > 0$ получим $G(y) = \mathrm{P}\{-y < X < y\} = F(y) - F(-y)$. Функция $G(y)$ построена пунктиром на рис. 8.18 [далее она сливается с $F(x)$].

8.19. Смешанная случайная величина X принимает два значения с отличными от нуля вероятностями: отрицательное $(-x_1)$ с вероятностью p_1 и положительное (x_2) с вероятностью p_2. В промежутке между $-x_1$ и x_2 функция распределения $F(x)$ непрерывна (рис. 8.19, *а*); $x_1 < x_2$. Найти и построить функцию распределения $G(y)$ случайной величины $Y = |X|$.

Решение. При $y \leqslant 0$ получим $G(y) = 0$ (рис. 8.19, *б*); при $y > 0$ получим $G(y) = \mathrm{P}\{-y < X < y\} = F(y) - F(-y)$. Чтобы построить $G(y)$, нужно из каждого значения $F(y)$ вычесть его значение в зеркально отраженной от оси ординат точке $-y$ (см. рис. 8.19, *б*, где $F(x)$ показана штрих-пунктиром, а $G(y)$ — сплошной линией). Функция $G(y)$ будет иметь два скачка в точках $-x_1$ и x_2, равные соответственно p_1 и p_2.

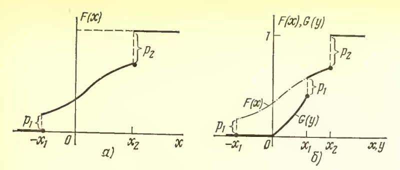


Рис. 8.19

8.20. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ (рис. 8.20, *а*). Найти и построить плотность распределения $g(y)$ ее модуля $Y = |X|$.

Решение. Чтобы построить плотность случайной величины Y, нужно к каждой ординате кривой распределения $f(x)$ прибавить ординату, соответствующую значению плотности в точке $-x$ (см. 8.20, *а*). При $m = 0$ ординаты плотности $f(x)$ удваиваются (рис. 8.20, *б*).

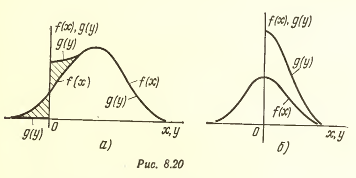


Рис. 8.20

8.21. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 0$, σ. Найти и построить плотность $g(y)$ случайной величины $Y = X^2$.

Решение. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$; $Y = \varphi(X) = X^2$.

Обратная функция для $y = x^2$ имеет два значения: $x_1 = -\sqrt{y}$ и $x_2 = +\sqrt{y}$. По формуле (8.0.2)

$$g(y) = f(\sqrt{-y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left\{\exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{y}}\exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \text{ при } y > 0.$$

При $y = 0$ плотность $g(y)$ имеет точку разрыва 2-го рода (уходит на бесконечность, см. рис. 8.21).

8.22. Имеется непрерывная случайная величина X с плотностью $f(x)$. Найти закон распределения случайной величины

$$Y = \operatorname{sign} X = \begin{cases} +1 \text{ при } X > 0; \\ 0 \text{ при } X = 0; \\ -1 \text{ при } X < 0, \end{cases}$$

и ее числовые характеристики: m_y и D_y.

Решение. Дискретная случайная величина Y имеет всего два значения: -1 и $+1$ (вероятность того, что $Y = 0$, равна нулю).

$$P\{Y = -1\} = P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = F(0);$$

$$P\{Y = +1\} = P\{X > 0\} = 1 - F(0);$$

$$m_y = -1 \cdot F(0) + 1 \cdot [1 - F(0)] = 1 - 2F(0);$$

$$\alpha_2[Y] = 1 \cdot F(0) + 1 \cdot [1 - F(0)] = 1;$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = 4F(0)[1 - F(0)],$$

где $F(x)$ — функция распределения.

8.23. Имеется непрерывная случайная величина X с плотностью $f(x)$. Найти закон распределения случайной величины $Y = \min\{X, X^2\}$, т. е. величины, равной X, если $X < X^2$, и X^2, если $X^2 < X$.

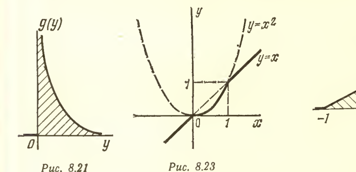


Рис. 8.21 Рис. 8.23 Рис. 8.24

Решение. Функция $y = \varphi(x)$ монотонна (показана сплошной линией на рис. 8.23):

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \in (0, 1); \\ x \text{ при } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Так как интервал (0; 1) оси $0x$ отображается на интервал (0; 1) оси $0y$, то по общему правилу

$$g(y) = \begin{cases} f(\sqrt{y})/(2\sqrt{y}) \text{ при } y \in (0,1); \\ f(y) \quad \text{при } y \notin (0,1). \end{cases}$$

8.24. Случайная величина X имеет плотность $f(x)$, заданную графиком (рис. 8.24). Случайная величина Y связана с X зависимостью $Y = 1 - X^2$. Найти плотность $g(y)$ величины Y.

Решение. Плотность $f(x)$ дается функцией $f(x) = 0{,}5\,(x+1)$ при $x \in (-1, +1)$. Функция $y = 1 - x^2$ на этом участке немонотонна; обратная функция имеет два значения: $x_1 = -\sqrt{1-y}$, $x_2 = +\sqrt{1-y}$. Отсюда

$$g(y) = (4\sqrt{1-y})^{-1}[(1-\sqrt{1-y}) + (1+\sqrt{1-y})]$$

или

$$g(y) = (2\sqrt{1-y})^{-1} \text{ при } 0 < y < 1.$$

8.25. Случайная величина X имеет плотность $f(x)$. Найти плотность $g(y)$ обратной ей случайной величины $Y = 1/X$.

Решение. Функция $y = 1/x$ хотя и немонотонна в обычном смысле слова (при $x = 0$ она скачком возрастает от $-\infty$ до $+\infty$), но обратная функция однозначна, значит, задача может быть решена так, как она решается для монотонных функций:

$$g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}$$

при тех значениях y, которые могут быть обратными заданной совокупности возможных значений x.

8.26. *Логарифмически нормальное распределение.* Натуральный логарифм некоторой случайной величины X распределен по нормальному закону с центром рассеивания m и средним квадратическим отклонением σ. Найти плотность распределения величины X.

Решение. Обозначим нормально распределенную величину U. Имеем

$$U = \ln X;\quad X = e^U;\quad f(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Функция e^u монотонна;

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right]\frac{1}{x} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{при } x > 0.$$

Такое распределение величины X называется *логнормальным.*

8.27. Пятно Π, изображающее объект на круглом экране радиолокатора, может занимать на нем произвольное положение (рис. 8.27), причем плотность распределения координат (X, Y) пятна в пределах экрана постоянна. Радиус экрана равен r_0. Найти плотность распределения расстояния R от пятна до центра экрана.

Решение. Найдем функцию распределения $G(r) = \mathrm{P}\{R < r\} = \mathrm{P}\{(X, Y) \in K_r\}$, где K_r — круг радиуса r с центром в точке 0.

Так как в пределах экрана плотность распределения постоянна, то вероятность попадания в круг равна его относительной площади:

$$G(r) = (\pi r^2)/(\pi r_0^2) = (r/r_0)^2, \text{ откуда}$$

$$g(r) = G'(r) = 2r/r_0^2 \text{ при } 0 < r < r_0.$$

8.28. Случайная величина X распределена равномерно в интервале (0; 1). Случайная величина Y связана с X монотонно возрастающей функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$. Найти функцию распределения $G(y)$ и плотность $g(y)$ случайной величины Y.

Решение. Имеем $f(x) = 1$ при $x \in (0; 1)$. Обозначим $\psi(y)$ функцию, обратную по отношению к функции $y = \varphi(x)$. Так как $\varphi(x)$ монотонно возрастает, то $g(y) = f(\psi(y))\psi'(y) = \psi'(y)$, откуда $G(y) = \psi(y)$, т. е. искомая функция распределения есть обратная по отношению к функции φ (в области возможных значений величины Y).

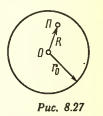


Рис. 8.27

8.29. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно в интервале (0; 1), чтобы получить случайную величину Y, распределенную по показательному закону $g(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ $(y > 0)$?

Решение. На основании решения предыдущей задачи мы должны положить $Y = G^{-1}(X)$, где G^{-1} — функция, обратная требуемой функции распределения $G(y)$ случайной величины Y. Имеем

$$G(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda y}\,dy = 1 - e^{-\lambda y} \quad (y > 0).$$

Полагая $1 - e^{-\lambda y} = x$ и разрешая это выражение относительно y, получаем обратную функцию $y = (\lambda)^{-1}\ln(1 - x)$; откуда искомая зависимость будет

$$Y = (\lambda)^{-1}\ln(1 - X) \quad (0 < X < 1).$$

8.30. Случайная величина X распределена по показательному закону $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$. Каким функциональным преобразованием можно превратить ее в случайную величину Y, распределенную по закону Коши: $f_2(y) = [\pi(1 + y^2)]^{-1}$.

Решение.

$$F_1(x) = 1 - e^{-\lambda x} \;\; (x > 0); \;\; F_2(y) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg} y + \frac{\pi}{2}\right].$$

Полагая $\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg} y + \frac{\pi}{2}\right] = u$ и разрешая эту функцию относительно y, найдем обратную функцию $F_2^{-1}(u)$:

$$y = F_2^{-1}(u) = \operatorname{tg}(\pi u - \pi/2) = -\operatorname{ctg} \pi u.$$

По решению предыдущей задачи получим

$$Y = F_2^{-1}(F_1(X)) = -\operatorname{ctg} \pi (1 - e^{-\lambda X}) = \operatorname{ctg} \pi e^{-\lambda X} \quad (X > 0).$$

8.31. Двое условились встретиться в определенном месте в промежутке времени от 12.00 до 13.00. Каждый приходит на место встречи независимо от другого и с постоянной плотностью вероятности в любой момент назначенного промежутка. Пришедший раньше ожидает другого. Найти распределение вероятностей времени ожидания и вероятность того, что ожидание продлится не менее получаса.

Решение. Обозначим моменты прихода двух лиц T_1 и T_2; за начало отсчета времени выберем 12 ч. Тогда каждая из независимых случайных величин T_1, T_2 распределена с постоянной плотностью в промежутке (0; 1). Случайная величина T — время ожидания: $T = |T_1 - T_2|$.

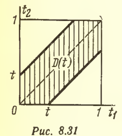
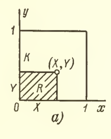


Рис. 8.31



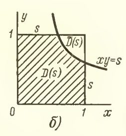


Рис. 8.32

Найдем функцию распределения $G(t)$ этой величины. Выделим на плоскости $t_1 0 t_2$ область $D(t)$, в которой $|t_1 - t_2| < t$ (заштрихованная область на рис. 8.31). Функция распределения $G(t)$ в данном случае равна площади этой области: $G(t) = 1 - (1-t)^2 = t(2-t)$, откуда $g(t) = 2(1-t)$ при $0 < t < 1$.

$$P\{T > 1/2\} = 1 - G(t/2) = 0{,}25.$$

8.32. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно в квадрате K со стороной 1 (рис. 8.32, *а*). Найти закон распределения площади S прямоугольника R со сторонами X, Y.

Решение. Выделим на плоскости $x0y$ область $D(s)$, в пределах которой $xy < s$ (рис. 8.32, *б*). Функция распределения в данном случае равна площади области $D(s)$:

$$G(s) = 1 - \iint\limits_{\overline{D}(s)} dxdy = 1 - \int\limits_s^1 dx \int\limits_{s/x}^1 dy = s(1 - \ln s).$$

Отсюда $g(s) = G'(s) = -\ln s$ при $0 < s < 1$.

8.33. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 0$, σ. Найти закон распределения обратной ей величины $Y = 1/X$.

Решение. $y = \varphi(x) = 1/x$; обратная ей функция однозначна: $x = 1/y$. По общему правилу

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2y^2}\right)\frac{1}{y^2} \text{ или } g(y) = \frac{1}{\sigma y^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2y^2}\right).$$

При $y = 0$ плотность $g(y)$ имеет разрыв 2-го рода (см. рис. 8.33).

Любопытно отметить, что случайная величина Y не имеет математического ожидания — соответствующий интеграл расходится.

8.34. Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность $f(x, y)$. Найти плотность $g(z)$ их отношения $Z = Y/X$.

Решение. Зададимся некоторым значением z и построим на плоскости $x0y$ область $D(z)$, где $\frac{y}{x} < z$ (рис. 8.34 — заштрихованная область). Функция распределения

$$G(z) = \iint\limits_{D(z)} f(x, y)\,dxdy = \int\limits_{-\infty}^{0} dx \int\limits_{zx}^{\infty} f(x, y)\,dy + \int\limits_{0}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{zx} f(x, y)\,dy.$$

Дифференцируя по z, имеем

$$g(z) = -\int\limits_{-\infty}^{0} xf(x, zx)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} xf(x, zx)\,dx.$$

Если случайные величины X, Y независимы, то

$$g(s) = -\int\limits_{-\infty}^{0} xf_1(x)\,f_2(zx)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} xf_1(x)\,f_2(zx)\,dx.$$

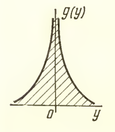


Рис. 8.33

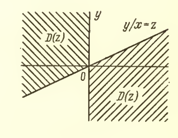


Рис. 8.34

8.35. Найти закон распределения отношения $Z = Y/X$ двух независимых нормально распределенных случайных величин X, Y с характеристиками $m_x = m_y = 0$, σ_x, σ_y.

Решение. Рассмотрим сначала частный случай $\sigma_x = \sigma_y = 1$. На основании предыдущей задачи

$$y(z) = -\int\limits_{-\infty}^{0} x\frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+z^2x^2)}\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} x\frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+z^2z^2)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)}\,xdx = \frac{1}{\pi(1+z^2)} \quad \text{(закон Коши)}.$$

В общем случае отношение $Z = X/Y$ можно представить в виде $Z = (Y_1\sigma_y)/(X_1\sigma_x)$, где величины $X_1 = X/\sigma_x$ и $Y_1 = Y/\sigma_y$ имеют уже нормальные распределения с дисперсией, равной 1; поэтому

$$g(z) = \frac{1}{\pi\left[1 + (\sigma_x z)^2 \sigma_y^{-2}\right]} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

В частности, если $\sigma_x = \sigma_y$,

$$g(z) = [\pi(1 + z^2)]^{-1}.$$

8.36. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно в круге K радиуса 1. Найти закон распределения случайной величины $Z = Y/X$.

Р е ш е н и е. В данном случае $G(z)$ есть относительная площадь области $D(z)$ (рис. 8.36):

$$G(z) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} z + \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда $g(z) = G'(z) = [\pi(1 + z^2)]^{-1}$ (закон Коши).

8.37. *Закон Эрланга 2-го порядка.* Составить композицию двух показательных законов с параметром λ, т.е. найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин X_1 и X_2, имеющих плотности

$$f_1(x_1) = \lambda e^{-\lambda x_1} \ (x_1 > 0); \quad f_2(x_2) = \lambda e^{-\lambda x_2} \ (x_2 > 0).$$

Р е ш е н и е. По общей формуле (8.0.5) для композиции распределений имеем

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(z - x_1)\, dx_1.$$

Так как функции f_1 и f_2 равны нулю при отрицательных значениях аргументов, интеграл принимает вид

$$g(z) = \int_0^z f(x_1) f_2(z - x_1)\, dx_1 = \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda(z - x_1)}\, dx_1 = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \ (z > 0). \tag{8.37}$$

Закон с плотностью (8.37) называется *законом Эрланга 2-го порядка.* Условия его возникновения следующие. Пусть на оси $0t$ имеется простейший поток событий с интенсивностью λ и в этом потоке сохраняется только каждая 2-я точка (событие), а промежуточные выбрасываются. Тогда интервал между соседними событиями в разреженном таким образом потоке есть закон Эрланга 2-го порядка.

8.38. *Закон Эрланга n-го порядка.* Составить композицию n показательных законов с параметром λ, т. е. закон распределения суммы n независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, имеющих показательное распределение с параметром λ.

Р е ш е н и е. Можно было бы решить эту задачу, находя последовательно композицию двух (см. задач. 8.37), трех и т. д. законов, но

проще решить задачу исходя из простейшего потока событий, сохраняя в нем каждую n-ю точку и выкидывая промежуточные (рис. 8.38, *а*). $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, где X_i — случайная величина, имеющая показательное распределение. Найдем плотность $f_n(x)$ случайной величины X; сначала найдем элемент вероятности $f_n(x)\,dx$. Это есть вероятность того, что случайная величина X попадет на элементарный участок $(x, x + dx)$. Для этого нужно, чтобы на участок x (рис. 8.38, *б*) попало ровно $n-1$ событий, а на участок dx — одно событие; вероятность этого рав-

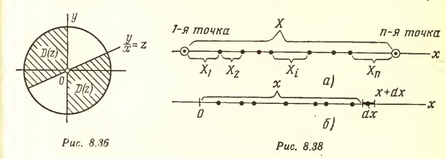


Рис. 8.36

Рис. 8.38

на $f_n(x)\,dx = P_{n-1}\,\lambda\,dx$, где P_{n-1} — вероятность того, что на участок x попало $n-1$ событий. Но число событий простейшего потока, попадающих на участок x, имеет распределение Пуассона с параметром $a = \lambda x$, отсюда

$$f_n(x)\,dx = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda x}\,dx;$$

$$f_n(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} \quad (x > 0). \tag{8.38.1}$$

Закон распределения с плотностью (8.38.1) называется *законом Эрланга n-го порядка.*

Функцию распределения $G_n(x)$ для закона Эрланга n-го порядка можно было бы искать, интегрируя (8.38.1) от 0 до x, но проще вывести ее выражение опять-таки пользуясь простейшим потоком:

$$G_n(x) = P\{X < x\} = 1 - P\{X > x\}.$$

Для того чтобы выполнялось событие $\{X > x\}$, нужно, чтобы на участок x попало не более $n-1$ событий, т. е. 0, 1, 2, ..., $n-1$ событий; отсюда

$$G_n(x) = 1 - \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^m}{m!}e^{-\lambda x} \quad (x > 0). \tag{8.38.2}$$

Выражение (8.38.2) можно свести к табулированной функции $R(m, a)$ (см. приложение 2):

$$G_n(x) = 1 - R(n-1, \lambda x).$$

8.39. *Обобщенный закон Эрланга.* Составить композицию двух показательных законов с разными параметрами:

$$f_1(x_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \quad (x_1 > 0); \quad f_2(x_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \quad (x_2 > 0).$$

Решение. Обозначим $X = X_1 + X_2$, где X_1, X_2 распределены по законам $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$.

Согласно общей формуле для композиции законов распределения

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(x - x_1)\, dx_1.$$

Но в нашем случае оба закона отличны от нуля только при положительном значении аргумента; значит, $f_1(x_1) = 0$ при $x_1 < 0$ и $f_2(x - x_1) = 0$ при $x_1 > x$. При $x > 0$

$$g(x) = \int_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (x - x_1)}\, dx_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x} - 1] =$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x})}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (x > 0)$$

(обобщенный закон Эрланга 2-го порядка). При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, раскрыв неопределенность, получим закон Эрланга 2-го порядка:

$$g(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Примечание. Методом математической индукции можно доказать, что закон распределения суммы n независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, подчиненных показательным законам распределения с различными параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, т. е. обобщенный закон Эрланга n-го порядка, имеет плотность

$$g_n(x) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod\limits_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} \quad (x > 0).$$

(Запись $\prod\limits_{k \neq j}^{n}$ означает, что берется произведение всех биномов вида $\lambda_j - \lambda_k$ при $k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, т. е. кроме $\lambda_j - \lambda_j$.) В частном случае, когда $\lambda_i = i\lambda$,

$$g_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} C_n^j \lambda_j e^{-\lambda_j x}.$$

Функция распределения обобщенного закона Эрланга n-го порядка имеет вид

$$G_n(x) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - e^{-\lambda_j x}}{\lambda_j \sum\limits_{k \neq j}^{n} (\lambda_j - \lambda_k)} \quad (x > 0).$$

Если $\lambda_i = i\lambda$, то

$$G_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} C_n^j \left[1 - e^{-j\lambda x}\right] \quad (x > 0).$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$, то получаем закон Эрланга n-го порядка:

$$g_n(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} = \lambda P(n-1, \lambda x) \quad (x > 0);$$

$$G_n(x) = \int_0^{\infty} \lambda P(n-1, \lambda x)\, dx = 1 - \int_x^{\infty} \lambda P(n-1, \lambda x)\, dx = 1 - R(n-1, \lambda x) \quad (x > 0),$$

где

$$P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}; \quad R(m, a) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad \text{(приложения 1, 2)}.$$

8.40. *Закон распределения максимальной из двух случайных величин.* Имеются две случайные величины X, Y с совместной плотностью $f(x, y)$. Найти функцию распределения $G(z)$ и плотность распределения $g(z)$ максимальной из этих двух величин: $Z = \max\{X, Y\}$.

Решение. Будем искать функцию распределения случайной величины Z: $G(z) = \mathrm{P}\{Z < z\}$. Для того чтобы максимальная из величин X, Y была меньше z, нужно, чтобы каждая из этих величин была меньше z:

$$G(z) = \mathrm{P}\{X < z, Y < z\} = F(z, z),$$

$$\text{где } F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dx dy.$$

Таким образом,

$$G(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{z} f(x, y)\, dx dy.$$

Чтобы найти плотность $g(z)$, продифференцируем $G(z)$ по величине z, входящей в пределы двойного интеграла. Дифференцировать будем как сложную функцию двух переменных z_1 и z_2, из которых каждая зависит от z ($z_1 = z$, $z_2 = z$).

$$g(z) = \frac{dG(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left\{\int_{-\infty}^{z_1}\left[\int_{-\infty}^{z_2} f(x, y)\, dy\right] dx\right\} = \frac{\partial G(z)}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dz} +$$

$$+ \frac{\partial G(z)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dz} = \int_{-\infty}^{z} f(z, y)\, dy + \int_{-\infty}^{z} f(x, z)\, dz.$$

В частном случае, если величины X, Y независимы, $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то

$$g(z) = f_1(z) \int_{-\infty}^{z} f_2(y)\, dy + f_2(z) \int_{-\infty}^{z} f_1(x)\, dx,$$

или, более компактно,

$$g(z) = f_1(z) F_2(z) + f_2(z) F_1(z).$$

Если случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены, то $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ и $g(z) = 2f(z) F(z)$.

8.41. *Закон распределения минимальной из двух случайных величин.* Система двух случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность $f(x, y)$. Найти функцию распределения $G(u)$ и плотность распределения $g(u)$ минимальной из этих двух величин: $U = \min\{X, Y\}$.

Рис. 8.41

Решение. Будем искать дополнение до единицы функции распределения

$$1 - G(u) = P(U > u) = P\{X > u,\ Y > u\}.$$

Это есть вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область $D(u)$, заштрихованную на рис. 8.41. Очевидно, $1 - G(u) = 1 - F(u, \infty) - F(\infty, u) + F(u, u)$, откуда $G(u) = F(u, \infty) + F(\infty, u) - F(u, u) = F_1(u) + F_2(u) - F(u, u)$. Дифференцируя по u, имеем (см. задачу 8.40).

$$g(u) = f_1(u) + f_2(u) - \int_{-\infty}^{u} f(u, y)\, dy - \int_{-\infty}^{u} f(x, u)\, dx.$$

В случае, когда величины X и Y независимы,

$$g(u) = f_1(u)[1 - F_2(u)] + f_2(u)[1 - F_1(u)].$$

Если случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены, $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ и $g(u) = 2f(u)[1 - F(u)]$.

8.42. *Закон распределения максимальной и минимальной из нескольких случайных величин.* Имеется n независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, распределенных по законам с плотностями $f_1(x_1)$, $f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$. Найти плотность распределения максимальной из них: $Z = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ и минимальной: $U = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, т. е. той случайной величины, которая в результате опыта примет максимальное (минимальное) значение.

Решение. Обозначим $G_z(z)$ функцию распределения величины Z. Имеем

$$G_z(z) = P\{Z < z\} = \prod_{i=1}^{n} F_i(z),$$

где $F_i(z) = \int_{-\infty}^{z} f_i(x_i)\, dx_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$

Дифференцируя, получаем сумму произведений производных отдельных функций распределения $F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)$ на произведения всех остальных функций, кроме той, которая продифференцирована. Результат можно записать в виде

$$g_z(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(z)}{F_j(z)} \prod_{i=1}^{n} F_i(z).$$

Аналогично, обозначая $G_u(u)$ функцию распределения величины U, получаем

$$G_u(u) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(u)].$$

Дифференцируя, находим

$$g_u(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(u)}{1 - F_j(u)} \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(u)].$$

8.43. Имеется n независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, распределенных одинаково с плотностью $f(x)$. Найти закон распределения максимальной из них: $Z = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ и минимальной: $U = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Решение. На основании решения предыдущей задачи

$$G_z(z) = (F(z))^n; \; g_z(z) = n(F(z))^{n-1} f(z);$$

$$G_u(u) = 1 - [1 - F(u)]^n; \quad g_u(u) = n[1 - F(u)]^{n-1} f(u).$$

8.44. Производится три независимых выстрела по плоскости $x0y$; центр рассеивания совпадает с началом координат, рассеивание нормальное, круговое, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Из трех точек попадания выбирается та, которая оказалась ближе всех к центру рассеивания. Найти плотность распределения $g(r)$ расстояния R от ближайшей точки попадания до центра.

Решение. Имеем $R = \min\{R_1, R_2, R_3\}$. Из решения предыдущей задачи $g(r) = 3[1 - F(r)]^2 f(r)$, где $F(r)$, $f(r)$ — функция распределения и плотность распределения расстояния R от точки попадания любого выстрела до центра рассеивания;

$$F(r) = \mathrm{P}\{R < r\} = 1 - \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right];$$

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \quad (r > 0).$$

Отсюда

$$g(r) = \frac{3r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \quad (r > 0),$$

т. е. плотность распределения расстояния от ближайшей из трех точек до центра рассеивания имеет тот же вид, что и для каждой из них, но при условии, что параметр σ уменьшен в $\sqrt{3}$ раз, т. е. заменен значением $\sigma' = \sigma/\sqrt{3}$.

8.45. Найти закон распределения $g_u(u)$ минимальной из двух независимых случайных величин T_1, T_2, распределенных по показательным законам:

$$f_1(t_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \; (t_1 > 0); \; f_2(t_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} \quad (t_2 > 0).$$

Решение. На основании решения задачи 8.42

$$g_u(u) = f_1(u)[1 - F_2(u)] + f_2(u)[1 - F_1(u)] = \lambda_1 e^{\lambda_1 u} e^{-\lambda_2 u} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} e^{-\lambda_1 u} = (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) u},$$

т. е. закон распределения минимальной из двух независимых случайных величин, распределенных по показательным законам, есть тоже показательный закон, параметр которого равен сумме параметров исходных законов.

Этот вывод можно получить значительно проще, если воспользоваться понятием потока событий. Пусть на оси Ot_1 имеется простейший поток событий с интенсивностью λ_1, на оси Ot_2 — простейший поток с интенсивностью λ_2. Сведем эти два потока воедино на оси Ot или, как-это называется, произведем «суперпозицию» этих потоков. Нетрудно убедиться, что результат суперпозиции двух простейших потоков также будет простейшим (свойства стационарности, ординарности и отсутствия последействия сохраняются). Интенсивность объединенного потока равна $\lambda_1 + \lambda_2$. Закон распределения расстояния от данной точки до ближайшего события потока — показательный с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

Очевидно, то же справедливо и для минимальной из любого числа n независимых случайных величин, распределенных по показательным законам с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — он будет показательным с параметром $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

8.46. В условиях предыдущей задачи найти закон распределения $g_z(z)$ максимальной из величин T_1, T_2.

Решение.

$$g_z(z) = f_1(z) F_2(z) + f_2(z) F_1(z) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 z}[1 - e^{-\lambda_2 z}] + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z}[1 - e^{-\lambda_1 z}] = \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) z} \quad (z > 0).$$

Этот закон показательным не является. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$g_z(z) = 2\lambda e^{-\lambda z}(1 - e^{-\lambda z}) \quad (z > 0).$$

8.47*. Над случайной величиной X, имеющей плотность $f(x)$, производится n независимых опытов; наблюденные значения располагаются в порядке возрастания; получается ряд случайных величин Z_1, $Z_2, \ldots, Z_k, \ldots, Z_n$. Рассматривается k-я из них Z_k. Найти ее функцию распределения $G_k(z)$ и плотность $g_k(z)$.

Решение. $G_k(z) = P\{Z_k < z\}$. Для того чтобы k-я (в порядке возрастания) из случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k, \ldots, Z_n$ была меньше z, нужно, чтобы не менее k из них были меньше z:

$$G_k(z) = \sum_{m=k}^{n} P_m,$$

где P_m — вероятность того, что ровно m из наблюденных в n опытах значений случайной величины X будут меньше z. По теореме о повторении опытов

$$P_m = C_n^m [F(z)]^m [1 - F(z)]^{n-m},$$

откуда

$$G_k(z)=\sum_{m=k}^{n} C_n^m [F(z)]^m [1-F(z)]^{n-m},$$

где $F(z)=\int\limits_{-\infty}^{z} f(x)\,dx$.

Плотность $g_k(z)$ можно найти, дифференцируя это выражение и учитывая, что

$$C_n^m m\frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!}=nC_{n-1}^{m-1};$$

$$C_n^m (n-m)=nC_{n-1}^m \quad (m<n).$$

После простых преобразований получим

$$g_k(z)=nC_{n-1}^{k-1} f(z)[F(z)]^{k-1}[1-F(z)]^{n-k}.$$

Однако гораздо проще получить $g_k(z)$ непосредственно, с помощью следующего простого рассуждения. Элемент вероятности $g_k(z)\,dz$ приближенно представляет собой вероятность попадания случайной величины Z_k (k-го в порядке возрастания значения случайной величины X) на участок $(z, z+dz)$. Для того чтобы это произошло, нужно, чтобы совместились следующие события:

1) какое-то из значений случайной величины X попало на интервал $(z, z+dz)$;

2) $(k-1)$ других каких-то значений оказались меньше z;

3) $(n-k)$ остальных значений оказались больше z [вероятностью попадания более чем одного значения на элементарный участок $(z, z+dz)$ пренебрегаем].

Вероятность каждой такой комбинации событий равна $f(z)\,dz\times$ $\times[F(z)]^{k-1}[1-F(z)]^{n-k}$. Число комбинаций равно произведению числа n способов, какими можно выбрать одно значение из n, чтобы поместить его на интервал $(z, z+dz)$, на число C_{n-1}^{k-1} способов, какими из оставшихся $n-1$ значений можно выбрать $k-1$, чтобы поместить их левее z. Следовательно,

$$g_k(z)\,dz=nC_{n-1}^{k-1} f(z)[F(z)]^{k-1}[1-F(z)]^{n-k}\,dz,$$

откуда

$$g_k(z)=nC_{n-1}^{k-1} f(z)[F(z)]^{k-1}[1-F(z)]^{n-k}.$$

8.48. В электропечи установлено четыре регулятора (термопары), каждый из которых показывает температуру с некоторой ошибкой, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением σ_t. Происходит нагревание печи. В момент, когда две из четырех термопар покажут температуру не ниже критической τ_0, печь автоматически отключается. Найти плотность распределения температуры Z, при которой будет происходить отключение печи.

Р е ш е н и е. Температура Z, при которой происходит отключение печи, представляет собой второе в порядке убывания (т. е. третье в

порядке возрастания) из четырех значений случайной величины T, распределенной по нормальному закону с центром рассеивания τ_0 и средним квадратическим отклонением σ_t:

$$f(t)=\frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\sigma_t^2}.$$

Соответствующая функция распределения

$$F(t)=\Phi\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma_t}\right)+0{,}5.$$

Пользуясь результатами предыдущей задачи при $n = 4$, $k = 3$, получаем

$$g_3(t)=\frac{12}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\sigma_t^2}\left[\Phi\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma_t}\right)+\right.$$
$$\left.+0{,}5\right]^2\left[0{,}5-\Phi\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma_t}\right)\right].$$

8.49. Имеется n независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, функции распределения которых имеют вид степенной зависимости

$$F_i(x_i)=\begin{cases}0 & \text{при } x_i\leqslant 0;\\ x_i^{k_i} & \text{при } 0<x_i\leqslant 1 \ (i=1,2,\ldots,n);\\ 1 & \text{при } x_i>1,\end{cases}$$

где k_i — целое положительное число. Наблюдается значение каждой случайной величины и из них выбирается максимальное Z. Найти функцию распределения $G(z)$ этой случайной величины.

Р е ш е н и е. На основании решения задачи 8.42

$$G(z)=\prod_{i=1}^{i}F_i(z)=\prod_{i=1}^{n}z^{k_i}\ \text{при } 0<z\leqslant 1,$$

или, если обозначить $k=\sum_{i=1}^{n}k_i$,

$$G(z)=\begin{cases}0 & \text{при } z\leqslant 0;\\ z^k & \text{при } 0<z\leqslant 1;\\ 1 & \text{при } z>1,\end{cases}$$

т. е. максимум нескольких случайных величин, распределенных по степенному закону в интервале $(0;1)$, также распределен по степенному закону с показателем степени, равным сумме показателей степеней отдельных законов.

8.50. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и распределены по законам Пуассона с параметрами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Показать, что их сумма $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ также распределена по закону Пуассона с параметром $a=\sum_{i=1}^{n}a_i$.

Р е ш е н и е. Докажем сначала, что сумма двух случайных величин X_1 и X_2 распределена по закону Пуассона, для чего найдем вероятность того, что $X_1 + X_2 = m$ $(m = 0, 1, 2,\dots)$.

$$\mathrm{P}\{X_1+X_2=m\} = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}\{X_1=k\}\,\mathrm{P}\{X_2=m-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{a_1^k}{k!}\, e^{-a_1} \frac{a_2^{m-k}}{(m-k)!}\, e^{-a_2}.$$

Учитывая, что $C_m^k = \frac{m!}{(k!)\,(m-k)!}$, представим это выражение в виде

$$\frac{e^{-(a_1+a_2)}}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k\, a_1^k\, a_2^{m-k} = \frac{(a_1+a_2)^m}{m!}\, e^{-(a_1+a_2)},$$

а это есть распределение Пуассона с параметром $a_1 + a_2$.

Таким образом доказано, что сумма двух независимых случайных величин, распределенных по законам Пуассона, тоже имеет распределение Пуассона. Распространение этого результата на любое число слагаемых производится по индукции.

8.51. Система случайных величин (X, Y) распределена по нормальному закону с характеристиками m_x, m_y, σ_x, σ_y и z_{xy}. Случайные величины (U, V) связаны с (X, Y) зависимостью $U = aX + bY + c$; $V = kX + lY + m$. Найти закон распределения системы случайных величин (U, V).

О т в е т. Система (U, V) распределена нормально с характеристиками:

$$m_u = am_x + bm_y + c;\ m_v = km_x + lm_y + m;$$

$$\sigma_u = \sqrt{a^2\,\sigma_x^2 + b^2\,\sigma_y^2 + 2ab\sigma_x\,\sigma_y\,r_{xy}};$$

$$\sigma_v = \sqrt{k^2\,\sigma_x^2 + l^2\,\sigma_y^2 + 2kl\sigma_x\,\sigma_y\,r_{xy}};$$

$$z_{uv} = \frac{ak\sigma_x^2 + bl\sigma_y^2 + (bk+al)\,\sigma_x\,\sigma_y\,r_{xy}}{\sigma_u\,\sigma_v}.$$

8.52. Составить композицию двух биномиальных распределений с параметрами (n, p) и (k, p).

Р е ш е н и е. Пусть X — число появлений события A в n независимых опытах, в каждом из которых оно появляется с вероятностью p; X имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p). Аналогично Y есть число появлений события A и k независимых опытах в тех же условиях; оно имеет биномиальное распределение с параметрами (k, p). $Z = X + Y$ — число появлений события A в серии из $n + k$ опытов с вероятностью p события A в каждом опыте; величина z имеет тоже биномиальное распределение с параметрами $(n + k, p)$.

Заметим, что если вероятности p в разных сериях различны, то в результате композиции двух биномиальных законов получится уже не биномиальный закон.

8.53. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить сверху вероятность того, что случайная величина X, имеющая математическое ожи-

дание m и среднее квадратическое отклонение σ, отклонится от m меньше, чем на 3σ.

Решение. Неравенство Чебышева (8.0.18) дает

$$P\{|X-m| \geqslant 3\sigma\} \leqslant \frac{D[X]}{(3\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}; \; P\{|X-m| < 3\sigma\} \geqslant \frac{8}{9}.$$

Итак, *любая случайная величина отходит от своего математического ожидания меньше, чем на* 3σ, *с вероятностью, не меньшей чем* 8/9*).

8.54. Производится большое число n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина X имеет равномерное распределение на участке (1; 2). Рассматривается среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины X: $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. На основе закона больших чисел выяснить, к какому числу a будет приближаться (сходиться по вероятности) величина Y при $n \to \infty$. Оценить максимальную практически возможную ошибку равенства $Y \approx a$.

Решение.

$$a = M[Y] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}\cdot n \cdot 1{,}5 = 1{,}5;$$

$$D[Y] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{n}{n^2}\,\frac{1}{12} = \frac{1}{12n}; \quad \sigma_y = \sqrt{D[Y]} = \frac{1}{2\sqrt{3n}}.$$

Максимальное практически возможное значение ошибки $3\sigma_y$.

8.55. Рассматривается последовательность n случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеющих равномерное распределение соответственно на участках: (0; 1), (0; 2), ..., (0; n). Что будет делаться с их средним арифметическим $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ при увеличении n?

Решение. При заданном n

$$M[Y] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{n}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{4}.$$

При $n \to \infty$ эта величина неограниченно возрастает, устойчивости среднего не наблюдается.

8.56. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены равномерно на участках (— 1; 1), (—2; 2), ..., (—n; n). Будет ли среднее арифме-

---

*) Это — крайиий, самый иеблагоприятный случай. На практике для обычно встречающихся случайиых величин эта вероятиость гораздо ближе к единице: например, для иормальиого закоиа оиа равна 0,997; для равиомериого распределеиия — едииице; для показательиого 0,982.

тическое случайных величин X_i: $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ при увеличении n сходиться по вероятности к нулю?

Решение. $M[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = 0$, но сходиться по вероятности к нулю случайная величина Y не будет, так как условия теоремы Маркова нарушены; дисперсии случайных величин X_i не ограничены одним и тем же числом L, а неограниченно растут с увеличением n.

8.57. ЭВМ вырабатывает случайные двоичные числа так, что знаки 0 и 1 на каждой позиции появляются с одинаковой вероятностью и независимо от других позиций. Последовательность знаков делится на группы, состоящие из одинаковых знаков, например 000 111 0 1 00 1111 00 11 0000 1 0 ... Подсчитывается число знаков в каждой группе и делится на число групп. Как будет себя вести эта средняя величина при неограниченном увеличении числа групп n?

Решение. Случайная величина X_i — число знаков в i-й группе — имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы (см. гл. 4). $M[X_i] = 1/p = 2$; $D[X_i] = q/p^2 = 0{,}5/0{,}5^2 = 2$.

Если $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, то

$$M[Y_n] = \frac{1}{n} n2 = 2; \ D[Y_n] = \frac{1}{n^2} n2 = \frac{2}{n}; \ \sigma_{y_n} = \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

На основании закона больших чисел величина Y_n при $n \to \infty$ сходится по вероятности к $M[Y_n] = 2$: $\lim_{n \to \infty} P\{|Y_n - 2| < \varepsilon\} = 1$. Ошибка приближенного равенства $Y_n \approx 2$ (по правилу трех сигма) не превосходит $3\sqrt{2/n}$.

8.58. Цех завода выпускает шарики для подшипников. За смену производится $n = 10\,000$ шариков. Вероятность того, что один шарик окажется дефектным, равна 0,05. Причины дефектов для отдельных шариков независимы. Продукция проходит контроль сразу после изготовления, причем дефектные шарики бракуются и ссыпаются в бункер, а небракованные отправляются в цех сборки. Определить, на какое количество шариков должен быть рассчитан бункер, чтобы с вероятностью 0,99 после смены он не оказался переполненным.

Решение. Число забракованных шариков X имеет биномиальное распределение; так как n велико, то на основании предельной теоремы Лапласа можно считать распределение приблизительно нормальным с характеристиками: $m_x = np = 10\,000 \cdot 0{,}05 = 500$; $D_x = npq = 500 \cdot 0{,}95 = 475$; $\sigma_x \approx 21{,}8$.

Находим такое значение l, для которого $P\{X < l\} = 0{,}99$ или

$$\Phi\left(\frac{l - m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5 = \Phi\left(\frac{l - 500}{21{,}8}\right) + 0{,}5 = 0{,}99.$$

По таблицам функции $\Phi(x)$ определяем $(l-500)/21{,}8 \approx 2{,}33$, откуда $l \approx 551$, т.е. бункер, рассчитанный примерно на 550 шариков, с вероятностью 0,99 за смену переполняться не будет.

8.59. В очереди на получение денег в кассу стоит $n = 60$ человек; размер выплаты каждому из них случаен. Средняя выплата $m_x = 50$ руб., среднее квадратическое отклонение выплаты $\sigma_x = 20$ руб. Выплаты отдельным получателям независимы. 1) Сколько должно быть денег в классе, чтобы их с вероятностью 0,95 хватило на выплату всем 60 получателям; 2) каков будет гарантированный с той же вероятностью 0,95 остаток денег b в кассе после выплаты всем 60 получателям, если в начале выплаты в кассе было 3500 руб?

Решение. 1) Суммарная выплата $Y = \sum_{i=1}^{60} X_i$, где X_i — выплата i-му получателю. На основании центральной предельной теоремы для одинаково распределенных слагаемых Y имеет приближенно нормальное распределение с параметрами $m_y = 60$, $m_x = 3000$ руб., $\sigma_y = \sqrt{60} \cdot 20 \approx 154{,}8$ руб. Необходимый запас денег l найдем из условия $\Phi[(l-m_y)/\sigma_y] + 0{,}5 = 0{,}95$. По таблицам функции Лапласа (приложение 5) $(l-m_y)/\sigma_y \approx 1{,}65$; $l = m_y + 1{,}65\,\sigma_y \approx 3256$ руб.

2) Гарантированный с вероятностью 0,95 остаток денег b получим, вычитая из 3500 сумму l, полученную в п. 1: $b = 3500 - 3256 = 244$ руб.

8.60*. Лотерея организована следующим образом. Участникам продаются билеты, на каждом из которых имеется таблица с номерами: 1, 2,..., 90. Участник должен выбрать произвольным образом пять различных номеров, отметить эти номера и послать билет организаторам лотереи, которые хранят все присланные билеты в запечатанном виде до дня розыгрыша. Розыгрыш лотереи состоит в том, что случайным образом выбираются (разыгрываются) пять различных номеров из девяноста; выпавшие номера сообщаются участникам. Если у игрока совпали с объявленными менее двух номеров (0 или 1), он никакого выигрыша не получает. Если совпали с объявленными два номера, он выигрывает 1 руб.; если три номера — 100 руб., если четыре — 10 000 руб.; если все пять — 1 000 000 руб. Определить: 1) нижнюю границу цены билета, при котором лотерея в среднем еще не приносит убытка ее организаторам; 2) средний доход M, который приносит лотерея организаторам, если в ней участвуют 1 000 000 человек, назначающих свои номера независимо один от другого; каждый покупает один билет, а цена билета 30 коп; 3) пользуясь правилом трех сигма, найти границы практически возможных выплат по лотерее; можно ли считать суммарную выплуту по лотерее распределенной приблизительно по нормальному закону?

Решение. 1) Обозначим p_i вероятность того, что из пяти названных игроком номеров ровно i совпадут с выпавшими. Находим

$$p_2 = \frac{C_5^2\, C_{85}^3}{C_{90}^5} \approx 2{,}25 \cdot 10^{-2};\; p_3 = \frac{C_5^3\, C_{85}^2}{C_{90}^5} \approx 8{,}12 \cdot 10^{-4};$$

$$p_4 = \frac{C_5^4\, C_{85}^1}{C_{90}^5} \approx 0{,}67 \cdot 10^{-6};\; p_5 = \frac{1}{C_{90}^5} \approx 2{,}28 \cdot 10^{-8}.$$

Минимальная цена билета должна быть равна математическому ожиданию выигрыша игрока, купившего этот билет: $m = 2{,}25 \cdot 10^{-2} + 8{,}12 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2 + 9{,}67 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 + 2{,}28 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6 = 22{,}3 \times 10^{-2}$ руб., т. е. минимальная цена билета около 23 коп.

2) $M = (0{,}30 - 0{,}223) \cdot 10^6 = 77 \cdot 10^3$ руб.

3) Общая сумма выигрышей X, которая подлежит выплате по лотерее, представляет собой сумму выигрышей отдельных игроков: $X = \sum_{i=1}^{1\,000\,000} X_i$, где X_i — выигрыш i-го игрока.

Считается, что игроки называют свои номера независимо друг от друга, так что величины X_i ($i = 1, 2, \ldots, 1\,000\,000$) независимы. Из центральной предельной теоремы известно, что сумма достаточно большого числа назависимых одинаково распределенных случайных величин приближенно распределена по нормальному закону. Требуется выяснить, достаточно ли в данном случае числа слагаемых $n = 1000\,000$ для того, чтобы величину X можно было считать распределенной нормально?

Находим математическое ожидание m_x и среднее квадратическое отклонение σ_x случайной величины X. Для любого $i = 1, 2, \ldots, 1\,000\,000$ получим $m_{x_i} = 22{,}3 \cdot 10^{-2} = 0{,}223$; $\alpha_2[X_i] = 2{,}25 \cdot 10^{-2} + 8{,}12 + 9{,}67 \cdot 10^2 + 2{,}28 \cdot 10^4 = 2{,}38 \cdot 10^4$; $D_{x_i} = 2{,}38 \cdot 10^4 - 0{,}22^2 \approx 2{,}38 \cdot 10^4$. Отсюда

$$m_x = 10^6 \cdot m_{x_i} = 2{,}23 \cdot 10^5; \; D_x = 10^6 \cdot D_{x_i} = 2{,}38 \cdot 10^{10}; \quad \sigma_x = 10^5 \sqrt{2{,}38} \approx 1{,}54 \cdot 10^5.$$

Мы знаем, что для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, границы практически возможных значений заключены между $m_x \pm 3\,\sigma_x$. В нашем случае нижняя граница возможных значений случайной величины X, если бы она была распределена по нормальному закону, была бы $m_x - 3\sigma_x = -2{,}39 \cdot 10^{-5}$. Отрицательное значение этой границы говорит о том, что случайная величина X не может считаться распределенной нормально.

8.61*. Найти предел $\lim\limits_{a \to \infty} \sum\limits_{m=0}^{a} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$, где a — целое положительное число.

Решение. Выражение $\sum\limits_{m=0}^{a} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ есть вероятность того, что случайная величина X, распределенная по закону Пуассона, не превзойдет своего математического ожидания a. Но при неограниченном увеличении параметра a закон Пуассона приближается к нормальному. Для нормального закона вероятность того, что случайная величина не превзойдет своего математического ожидания, равна 1/2, значит,

$$\lim_{a \to \infty} \sum_{m=0}^{a} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = \frac{1}{2}.$$

8.62. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ распределены одинаково по показательному закону с параметром λ: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Рассматривается сумма случайного числа таких величин $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$, где случайная величина Y имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы:

$$P_n = \mathrm{P}\{Y = n\} = pq^{n-1} \quad (0 < p < 1; \quad n = 1, 2, \ldots).$$

Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины Z.

Решение. Сумма фиксированного числа n случайных величин $\sum_{i=1}^{n} X_i$ подчинена закону Эрланга n-го порядка (см. задачу 8.38) с плотностью

$$f_n(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Плотность $\varphi(z)$ случайной величины Z находим по формуле полной вероятности с гипотезами $P_n = \{Y = n\}$:

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} pq^{n-1} = p\lambda e^{-\lambda z} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda qz)^k}{k!} = p\lambda e^{-\lambda z} e^{\lambda qz} = p\lambda e^{-\lambda pz} \quad (z > 0),$$

т. е. случайная величина Z будет также подчинена показательному закону, но с параметром λp. Следовательно,

$$m_z = 1/(\lambda p); \quad D_z = 1/(\lambda^2 p^2).$$

8.63. *Закон распределения суммы случайного числа случайных слагаемых.* Рассматривается сумма случайного числа случайных слагаемых $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$, где $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью $f(x)$; Y — положительная, не зависящая от них целочисленная случайная величина с законом распределения $\mathrm{P}\{Y = n\} = P_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины Z.

Решение. Допустим, что случайная величина Y приняла значение n $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Вероятность этого равна P_n. При этой гипотезе $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Обозначим плотность распределения суммы n независимых одинаково распределенных величин $X_1, X_2, \ldots X_n$ через $f^{(n)}(x)$. Плотности $f^{(n)}(x)$ можно найти последовательно: сначала $f^{(2)}(x)$ — композицию двух одинаковых законов $f(x)$ и $f(x)$, затем $f^{(3)}(x)$ — композицию $f^{(2)}(x)$ и $f(x)$ и т. д.

По формуле полной вероятности плотность $\varphi(z)$ случайной величины Z будет

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{N} f^{(n)}(z) P_n. \qquad (8.63)$$

Числовые характеристики случайной величины Z найдены нами в задаче 7.64:

$$M[Z] = m_x m_y; \quad D[Z] = D_x m_y + m_x^2 D_y,$$

где m_x, m_y; D_x, D_y — математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y.

При выполнении определенных условий можно с достаточной для практики точностью полагать, что случайная величина Z подчинена нормальному закону с указанными параметрами $M[Z]$, $D[Z]$. Покажем это. Не нарушая общности рассуждений для простоты положим $m_x=0$. На основании центральной предельной теоремы для одинаково распределенных слагаемых (см. раздел 8.0) можно приближенно полагать, что при $n > m_y - 3\sigma_y > 20$ плотность $f^{(n)}(z)$ в формуле (8.63) представляет собой нормальный закон с параметрами $m^{(n)}=0$; $D^{(n)}=nD_x$ [см. (5.0.33)]:

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n D_x}} \exp\left(-\frac{z^2}{2nD_x}\right).$$

Формула (8.63) выражает математическое ожидание функции случайного аргумента Y:

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{N} f^{(n)}(z)\, p_n = M[f^{(Y)}(z)].$$

Для функций, достаточно близких к линейным в области практически возможных значений случайного аргумента, можно приближенно полагать математическое ожидание функции равным той же функции от математического ожидания случайного аргумента:

$$M[f^{(Y)}(z)] \approx f^{(m_y)}(z) \text{ или } \varphi(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi m_y D_x}} \exp\left(-\frac{z^2}{2m_y D_x}\right),$$

что является нормальным законом. Приближенное равенство выполняется тем точнее, чем ближе к линейной функция $f^{(Y)}(z)$ случайного аргумента Y в области его практически возможных значений: $m_y \pm 3\sigma_y$.

Расчеты показывают, что эту функцию можно считать приближенно линейной при условии, что $m_y - 3\sigma_y > 20$. Например, если случайная величина Y распределена по закону Пуассона с параметром a [см. (4.0.26)], то это условие будет выполняться при $a > 40$; если по биномиальному закону с параметрами n, p [см. (4.0.24)] (и малом параметре $p < 0{,}1$), то $np > 40$. Заметим, что в обоих случаях случайная величина Y (число случайных слагаемых) будет подчинена приближенно нормальному закону с параметрами $m_y = D_y = a$ (для закона Пуассона) и $m_y = np$; $D_y = npq$ (для биномиального закона).

8.64*. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ распределены одинаково по показательному закону с параметром λ. Случайная

величина $Y = U + 1$, где случайная величина U распределена по закону Пуассона с параметром a. Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$.

Решение. Закон распределения суммы $\sum_{i=1}^{n} X_i$ представляет собой закон Эрланга n-го порядка (см. задачу 8.38) с параметром λ:

$$f_n(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

По формуле полной вероятности плотность распределения случайной величины Z будет

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda z - a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z a)^k}{(k!)^2} \quad \text{при } z > 0.$$

Эту плотность можно выразить через модифицированную цилиндрическую функцию

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}:$$

$$\varphi(z) = \lambda e^{-\lambda z - a} I_0\left(2\sqrt{\lambda z a}\right) \quad \text{при } z > 0.$$

Далее на основании решения задачи 8.66

$$M[Z] = m_x m_y = (a+1)/\lambda; \quad D[Z] = D_x m_y + m_x^2 D_y =$$
$$= (a+1)/\lambda^2 + a/\lambda^2 = (2a+1)/\lambda^2.$$

8.65. Рассматривается система случайных величин X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, которая связана с дискретной случайной величиной Y следующим образом:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leqslant Y; \\ 0, & \text{если } i > Y; \end{cases}$$

Известна функция распределения $F(y)$ случайной величины Y. Найти закон распределения каждой случайной величины X_i и числовые характеристики системы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Решение. Ряд распределения случайной величины Y имеет вид

$$Y: \left|\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline P\{Y < i\} & P\{Y \geqslant i\} \end{array}\right|.$$

Так как $P\{Y < i\} = F(i)$, то ряд распределения имеет вид

$$Y: \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline F(i) & 1-F(i) \end{array} \right|,$$

откуда $m_{x_i} = 1 - F(i)$; $D_{x_i} = F(i)[1 - F(i)]$.

Найдем корреляционные моменты случайных величин X_i и X_j, для чего определим $M[X_i X_j]$. Произведение $X_i X_j$ при $i < j$ может принимать только два значения: 1, если $X_j = 1$, и 0, если $X_j = 0$. Следовательно, $M[X_i X_j] = m_{x_j} = 1 - F(j)$ $(i < j)$, откуда

$$K_{ij} = M[X_i X_j] - m_{x_i} m_{x_j} = 1 - F(j) - [1 - F(i)][1 - F(j)] = F(i)[1 - F(j)] \ (i < j),$$ а коэффициент корреляции

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}} = \frac{F(i)[1-F(j)]}{\sqrt{F(i)F(j)[1-F(i)][1-F(j)]}} = \sqrt{\frac{F(i)[1-F(j)]}{F(j)[1-F(i)]}}.$$

8.66. Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p. Опыты прекращаются, как только событие A появилось n раз $(n > 1)$. Найти закон распределения и числовые характеристики числа X «неудачных» опытов, в которых событие A не произошло.

Решение. Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение k. Для этого нужно, чтобы общее число произведенных опытов было равно $n + k$ (k опытов кончились «неудачно», а n — «удачно»). Последний опыт по условию должен быть «удачным», а в предыдущих $n + k - 1$ опытах должны произвольным образом распределиться $n - 1$ «удачных» и k «неудачных» опытов. Вероятность этого

$$P\{X = k\} = C_{n+k-1}^{k} p^n q^k, \text{ где } q = 1 - p \ (k = 0, 1, \ldots).$$

Полученное распределение является естественным обобщением геометрического; назовем его *обобщенным геометрическим распределением* n-го порядка. Оно представляет собой композицию n геометрических распределений с одинаковым параметром p: $X = \sum_{s=1}^{n} X_s$, где каждая случайная величина X_s имеет геометрическое распределение

$$P\{X_s = k\} = pq^k \ (k = 0, 1, \ldots).$$

Действительно, общее число «неудачных» опытов складывается из: 1) числа «неудачных» опытов до первого появления события A; 2) числа «неудачных» опытов от первого до второго появления события A и т. д. Отсюда получаем числовые характеристики величины X: $m_x = nq/p$; $D_x = nq/p^2$.

8.67. Условия задачи те же, что и в задаче 8.66, но случайная величина Y представляет собой общее число опытов (как удачных, так и не удачных), произведенных до n-кратного появления события A. Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины Y.

Решение. $Y = X + n$, где X — случайная величина, фигурирующая в предыдущей задаче. Отсюда

$$P\{Y=k\}=P\{X=k-n\}=C_{k-1}^{k-n}p^n q^{k-n}=$$
$$=C_{k-1}^{n-1}p^n q^{k-n}\quad (k=n, n+1,\ldots).$$

Числовые характеристики величины Y:

$$m_y = m_x + n = nq/p + n = n/p;\quad D_y = D_x = nq/p^2.$$

8.68. Имеется случайная величина Y, распределенная по показательному закону с параметром λ: $f(y)=\lambda e^{-\lambda y}$ $(y>0)$. Случайная величина X при заданном значении случайной величины $Y=y$ распределена по закону Пуассона с параметром y:

$$P\{X=k\mid Y=y\}=\frac{y^k}{k!}e^{-y}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Найти безусловный закон распределения случайной величины X.

Решение. Полная вероятность события $X=k$

$$P\{X=k\}=\int_0^\infty \frac{y^k}{k!}e^{-y}\lambda e^{-\lambda y}\,dy=\frac{\lambda}{k!}\int_0^\infty y^k e^{-(1+\lambda)y}\,dy=$$
$$=\frac{\lambda}{k!}k!(1+\lambda)^{-(k+1)}=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^{k+1}}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Если ввести обозначения $\lambda/(1+\lambda)=p$; $1/(1+\lambda)=q=1-p$, получим $P\{X=k\}=pq^k$ $(k=0,1,\ 2,\ldots)$, т. е. случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p=\lambda/(1+\lambda)$.

8.69. На космическом корабле установлен счетчик Гейгера для определения числа космических частиц, попадающих в него за некоторый интервал времени T. Поток космических частиц — пуассоновский с интенсивностью λ; каждая частица регистрируется счетчиком с вероятностью p. Счетчик включается на случайное время T, распределенное по показательному закону с параметром μ. Случайная величина X — число зарегистрированных частиц. Найти закон распределения и характеристики m_x, D_x случайной величины X.

Решение. Предположим, что $T=t$ и найдем условную вероятность того, что $X=m$ $(m=0,1,\ 2,\ldots)$.

$$P\{X=m\mid t\}=\frac{(\lambda pt)^m}{m!}e^{-\lambda pt}.$$

Тогда полная вероятность события $\{X=m\}$

$$P\{X=m\}=\int_0^\infty \frac{(\lambda pt)^m}{m!}e^{-\lambda pt}\mu e^{-\mu t}\,dt=$$

$$=\frac{\mu}{m!}(\lambda p)^m\int_0^\infty t^m e^{-(\lambda p+\mu)t}\,dt=\mu\frac{(\lambda p)^m}{(\lambda p+\mu)^{m+1}}=\frac{\mu}{\lambda p+\mu}\left(\frac{\lambda p}{\lambda p+\mu}\right)^m$$
$$(m=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Это есть геометрическое распределение с параметром $\mu/(\lambda p+\mu)$ (см. предыдущую задачу), поэтому [см. формулы (4.0.30), (4.0.31)]:

$$m_x=\left(\frac{\lambda p}{\lambda p+\mu}\right)\Big/\left(\frac{\mu}{\lambda p+\mu}\right)=\frac{\lambda p}{\mu};\quad D_x=\left(\frac{\lambda p}{\lambda p+\mu}\right)\Big/\left(\frac{\mu}{\lambda p+\mu}\right)^2=$$

$$=\frac{\lambda p(\lambda p+\mu)}{\mu^2}=\left(\frac{\lambda p}{\mu}\right)^2+\frac{\lambda p}{\mu}=m_x(m_x+1).$$

8.70. Решить задачу 8.69 при условии, что счетчик включается на случайное время T с плотностью $f(t)$ $(t>0)$.

Решение. Так же, как и в предыдущей задаче, условный закон распределения величины X при $T=t$ будет

$$P\{X=m\,|\,t\}=\frac{(\lambda pt)^m}{m!}e^{-\lambda pt}\quad(m=0,\ 1,\ 2\ldots).$$

Безусловный закон распределения

$$P\{X=m\}=\int\limits_0^\infty\frac{(\lambda pt)^m}{m!}e^{-\lambda pt}f(t)\,dt\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Находим числовые характеристики случайной величины X. Условное математическое ожидание $m_{x\,|\,t}=\lambda pt$; безусловное математическое ожидание $m_x=\int\limits_0^\infty\lambda ptf(t)\,dt=\lambda p\int\limits_0^\infty tf(t)dt=\lambda pm_t$, где $m_t=M[T]$. Аналогично находим второй начальный момент случайной величины X (заметим, что так можно находить только начальные безусловные моменты, а не центральные):

$$\alpha_2[X\,|\,t]=\lambda pt+(\lambda pt)^2;$$

$$\alpha_2[X]=\lambda p\int\limits_0^\infty tf(t)\,dt+(\lambda p)^2\int\limits_0^\infty t^2f(t)\,dt=$$

$$=\lambda pm_t+(\lambda p)^2\alpha_2[T]=\lambda pm_t+(\lambda p)^2(D_t+m_t^2),$$

где D_t — дисперсия случайной величины T. Отсюда

$$D_x=\alpha_2[X]-m_x^2=\lambda pm_t+(\lambda p)^2D_t.$$

8.71. Решить предыдущую задачу для конкретного случая, когда $f(t)$ есть закон Эрланга $(k+1)$-го порядка с параметром μ:

$$f(t)=f_{k+1}(t)=\frac{\mu(\mu t)^k}{k!}e^{-\mu t}\quad(t>0).$$

Решение. $P(X=m)=\int\limits_0^\infty\frac{(\lambda pt)^m}{m!}e^{-\lambda pt}\frac{\mu(\mu t)^k}{k!}e^{-\mu t}\,dt=$

$$=\frac{\mu(\lambda p)^m\mu^k}{m!\,k!}\int\limits_0^\infty t^{m+k}e^{-(\lambda p+\mu)t}\,dt=\frac{\mu(\lambda p)^m\mu^k(m+k)!}{m!\,k!\,(\lambda p+\mu)^{m+k+1}}=$$

$$= C_{m+k}^{m}\left(\frac{\mu}{\lambda p+\mu}\right)^{k+1}\left(\frac{\lambda p}{\lambda p+\mu}\right)^{m}.$$

Итак, величина X имеет обобщенное геометрическое распределение $(k+1)$-го порядка (см. задачу 8.66) с параметром

$$p_1 = \frac{\mu}{\mu p+\mu}.$$

Математическое ожидание случайной величины T, распределенной по закону Эрланга $(k+1)$-го порядка, будет $m_t = (k+1)/\mu$, а дисперсия $D_t = (k+1)/\mu^2$. Следовательно, по формулам, полученным в предыдущей задаче,

$$m_x = \frac{\lambda p}{\mu}(k+1); \quad D_x = \frac{\lambda p}{\mu}(k+1)\left(1+\frac{\lambda p}{\mu}\right),$$

что, как и в задаче 8.66, можно представить в виде

$$m_x = \frac{(k+1)}{p_1} q_1; \quad D_x = \frac{(k+1)}{p_1^2} q_1, \text{ где } q_1 = 1 - p_1.$$

8.72. При измерении физических величин результат измерения неизбежно округляется в соответствии с минимальной ценой деления прибора. При этом непрерывная случайная величина превращается в дискретную, возможные значения которой отделены друг от друга интервалами, равными цене деления. В связи с этим возникает следующая задача. Непрерывная случайная величина X, распределенная по закону с плотностью $f(x)$, округляется до ближайшего целого числа; получается дискретная случайная величина $Y = Ц(X)$, где под $Ц(X)$ подразумевается целое число, ближайшее к X. Найти ряд распределения случайной величины Y и ее числовые характеристики.

Р е ш е н и е. График функции $Ц(X)$ представлен на рис. 8.72. Правило округления в случае, когда расстояния от значения x до двух соседних целых значений равны, несущественно, так как для непрерывной случайной величины вероятность попадания в любую точку равна нулю.

Вероятность того, что случайная величина Y примет целое значение k, равна

$$\mathrm{P}\{Y=k\} = \int_{k-0,5}^{k+0,5} f(x)\,dx \quad (k=0;\ \pm 1;\ \pm 2,\ldots),$$

откуда

$$m_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \int_{k-0,5}^{k+0,5} f(x)\,dx; \quad D_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \int_{k-0,5}^{k+0,5} f(x)\,dx - m_y^{2\,*)}.$$

* Если единица измерения (цена деления прибора) мала по сравнению с диапазоном возможных значений случайной величины X, то $m_y \approx m_x$; $D_y \approx D_x$.

8.73. Случайные величины X и Y независимы и распределены по законам Пуассона с параметрами a и b. Найти закон распределения их разности $Z = X - Y$ и модуля их разности $U = |X - Y| = |Z|$.

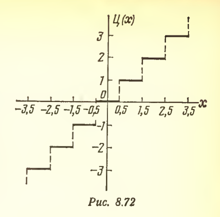


Рис. 8.72

Решение. Случайная величина Z может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Вероятность того, что Z примет значение $k > 0$, равна сумме вероятностей того, что X и Y примут два значения, различающиеся на k (причем X больше или равно Y):

$$P\{Z=k\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \frac{a^{m+k}}{(m+k)!} e^{-(a+b)} \quad (k \geqslant 0).$$

Вероятность того, что Z примет отрицательное значение $-k$, будет

$$P\{Z=-k\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \frac{b^{(m+k)}}{(m+k)!} e^{-(a+b)} \quad (k > 0).$$

Для случайной величины U

$$P\{U=0\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ab)^m}{(m!)^2} e^{-(b+b)}; \quad P\{U=k\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ab)^m (a^k + b^k)}{m!\,(m+k)!} e^{-(a+b)}$$

$$(k > 0).$$

Эти вероятности могут быть записаны с помощью модифицированных цилиндрических функций 1-го рода:

$$I_k(x) = I_{-k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2m} \quad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots)^{*)}.$$

При этом

$$P\{Z=k\} = I_k\left(2\sqrt{ab}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{k/2} e^{-(a+b)} \, (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots);$$

$$P\{U=0\} = I_0\left(2\sqrt{ab}\right) e^{-(a+b)};$$

$$P\{U=k\} = I_k\left(2\sqrt{ab}\right)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{k/2} + \left(\frac{a}{b}\right)^{-k/2}\right] e^{-(a+b)} \quad (k > 0).$$

8.74. Известна совместная плотность $f(x, y)$ системы случайных величин (X, Y). Найти плотность $g(z)$ разности $Z = X - Y$.

* Таблицы цилиндрических функций 1-го рода (функций Бесселя) можно найти, например, в книге: Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. — М.—Л.: ОНТИ, 1935.

Решение. Для системы $(X, -Y)$ плотность распределения есть $f(x, -y)$, поэтому из равенства $X - Y = X + (-Y)$ находим

$$g(z) = G'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x - z)\, dx.$$

Если случайные величины (X, Y) независимы, то

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x - z)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y - z) f_2(y)\, dy.$$

8.75. Найти плотность распределения разности двух независимых показательно распределенных случайных величин с параметрами λ и μ: $Z = X - Y$; $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$; $f_2(y) = \mu\, e^{-\mu y}$ $(y > 0)$.

Решение. $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x - z)\, dx$; $f_1(x)$ отлична от нуля при $x > 0$; $f_2(x - z)$ отлична от нуля при $x - z > 0$.

а) $z > 0$; $\quad g(z) = \int_{z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(x-z)}\, dx = \dfrac{\lambda\mu e^{-\lambda z}}{\lambda + \mu}$;

б) $z < 0$; $\quad g(z) = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(x-z)}\, dx = \dfrac{\lambda\mu e^{\mu z}}{\lambda + \mu}$.

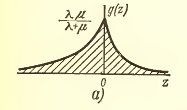
Следовательно,

$$g(z) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda z}(\lambda + \mu)^{-1} & \text{при } z > 0; \\ \lambda\mu e^{\mu z}(\lambda + \mu)^{-1} & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Параметры этого закона:

$$m_z = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - \lambda}{\lambda\mu}; \quad D_z = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(\lambda\mu)^2}.$$

Кривая распределения будет иметь вид, изображенный на рис. 8.75, *а*. При $\lambda = \mu$ получаем $g(z) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |z|}$ (рис. 8.75, *б*). Такое распределение называется распределением Лапласа.



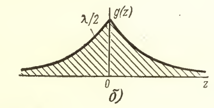


Рис. 8.75

8.76. *Композиция законов распределения двух неотрицательных случайных величин.* Имеются две неотрицательные случайные величины X и Y с плотностями $f_1(x)$ $(x > 0)$ и $f_2(y)$ $(y > 0)$. Составить композицию их законов распределения.

Решение. Пусть $Z = X + Y$; найдем плотность $g(z)$ случайной величины Z. По общей формуле (8.0.5)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(z - x)\, dx.$$

Учитывая, что $f_1(x) = 0$ при $x < 0$, а $f_2(z - x) = 0$ при $x > z$, получаем

$$g(z) = \int_0^z f_1(x)\, f_2(z - x)\, dx. \tag{8.76}$$

8.77. Имеются две независимые случайные величины X и Y, распределенные по одному и тому же нормальному закону с параметрами $m_x = m_y = 0$; σ_x; σ_y. Найти плотность распределения суммы их модулей $Z = |X| + |Y|$.

Решение. Обозначим $U = |X|$; $V = |Y|$. Их плотности $f_1(u)$ и $f_2(v)$ равны соответственно:

$$f_1(u) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\dfrac{u^2}{2\sigma_x^2}\right) & \text{при } u > 0; \\ 0 & \text{при } u \leqslant 0; \end{cases}$$

$$f_2(v) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \exp\left(-\dfrac{v^2}{2\sigma_y^2}\right) & \text{при } v > 0; \\ 0 & \text{при } v \leqslant 0. \end{cases}$$

Учитывая формулу (8.76) для композиции законов распределения неотрицательных случайных величин, имеем

$$g(z) = \int_0^z f_1(u)\, f_2(z - u)\, du \qquad (z > 0)$$

или

$$g(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x \sigma_y} \int_0^z \exp - \left(\frac{u^2}{2\sigma_x^2} + \frac{z^2}{2\sigma_y^2} - \frac{zu}{\sigma_y^2} + \frac{u^2}{2\sigma_y^2} \right) du. \tag{8.77}$$

Этот интеграл выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$, для чего нужно в показателе степени выражения (8.77) выделить полный квадрат. После преобразований получаем

$$g(z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \exp\left(\frac{-z^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right) \left[\Phi\left(\frac{z\sigma_y}{\sigma_x \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + \Phi\left(\frac{z\sigma_x}{\sigma_y \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}\right) \right].$$

8.78. По радиоканалу передается ряд сообщений. Продолжительность одного сообщения X — случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром λ (рис. 8.78). Интервал L между сообщениями—случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром μ. Длины отдельных сообщений и интервалов между ними не коррелированы. Найти вероятность того, что за время t будет передано не менее m сообщений ($m > 1$).

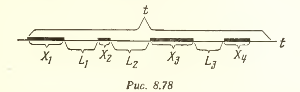


Рис. 8.78

Решение. Общая продолжительность T m сообщений плюс перерывы между ними представляет собой случайную величину, распределенную по обобщенному закону Эрланга порядка $2m - 1$ с параметрами

$$\underbrace{\lambda, \lambda, \ldots, \lambda}_{m \text{ раз}}; \quad \underbrace{\mu, \mu, \ldots, \mu}_{(m-1) \text{ раз}}.$$

Вероятность того, что за время t будет передано не менее m сообщений есть не что иное, как функция распределения случайной величины T:

$$P \{\text{не менее } m \text{ сообщений за время } t\} = P\{T < t\} = G(t).$$

Случайная величина T представляет собой сумму двух независимых случайных величин: $T = T_1 + T_2$, где T_1 — распределена по закону Эрланга m-го порядка с параметром λ:

$$g_1(t) = \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0);$$

T_2 — по закону Эрланга $(m - 1)$-го порядка с параметром μ:

$$g_2(t) = \frac{(\mu t)^{m-2}}{(m-2)!} e^{-\mu t} \quad (t > 0).$$

Следовательно, для случая $\lambda > \mu$

$$g(t) = \int_0^\infty g_1(\tau)\, g_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{(\lambda\tau)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda\tau} \times$$

$$\times \frac{[\mu(t-\tau)]^{m-2}}{(m-2)!} e^{-\mu(t-\tau)}\, d\tau = \frac{\lambda^{m-1}\mu^{m-2}}{(m-1)!\,(m-2)!} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{m-2} C_{m-2}^{i}\, t^{m-2-i} (-1)^i \frac{(m-1+i)!}{(\lambda-\mu)^{m+i}} \times$$

$$\times\left[1-\sum_{k=0}^{m-1+i}\frac{[(\lambda-\mu)t]^k}{k!}\,e^{-(\lambda-\mu)t}\right]e^{-\mu t}\quad (t>0).$$

Для случая $\mu>\lambda$

$$g(t)=\int_0^t g_1(t-\tau)\,g_2(\tau)\,d\tau=\frac{\lambda^{m-1}\,\mu^{m-2}}{(m-1)!\,(m-2)!}\sum_{i=1}^{m-1}C_{m-1}^{i}\,t^{m-1-i}(-1)^i\times$$

$$\times\frac{(m+i)!}{(\mu-\lambda)^{m+1+i}}\left[1-\sum_{k=0}^{m-1+i}\frac{[(\mu-\lambda)t]^k}{k!}\,e^{-(\mu-\lambda)t}\right]e^{-\lambda t}\quad (t>0).$$

Для случая $\lambda=\mu$

$$g(t)=\lambda\frac{(\lambda t)^{2m-2}}{(2m-2)!}\,e^{-\lambda t}\quad (t>0).$$

8.79. Маятник совершает свободные незатухающие колебания, причем угол φ (рис. 8.79) изменяется в зависимости от времени t по гармоническому закону: $\varphi=a\sin(\omega t+\Theta)$, где a — амплитуда, ω — частота, Θ — фаза колебания. В некоторый момент $t=0$, совершенно не связанный с положением маятника, производится его фотографирование. Найти закон распределения угла Φ, который в момент съемки будет составлять ось маятника с вертикалью. Найти математическое ожидание и дисперсию угла Φ.

Рис. 8.79

Решение. $\Phi=a\sin\Theta$, где фаза Θ распределена равномерно в интервале $(0;\,2\pi)$; на этом участке функция $\varphi=a\sin\vartheta$ немонотонна. Очевидно, решение задачи не изменится, если считать величину Θ распределенной равномерно в интервале $(-\pi/2;\,\pi/2)$, где функция φ монотонна. Плотность распределения угла Φ будет

$$g(\varphi)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi}{a}\right)^2}}\,\frac{1}{a}=\frac{1}{\pi\sqrt{a^3-\varphi^2}}\quad \text{при } |\varphi|<a.$$

Так как закон $g(\varphi)$ симметричен, то его математическое ожидание $m_\varphi=0$. Дисперсия угла Φ

$$D_\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{a^2-\varphi^2}}=\frac{a^2}{2}.$$

8.80. Рассматривается n независимых случайных величин T_i $(i=1,2,\dots,n)$, каждая из которых распределена равномерно на участке $(0;\,c)$. Найти закон распределения числа Y случайных величин (точек) T_i, попадающих на участок $(a,\,b)\subset(0,\,c)$. Каково будет предельное распределение случайной величины Y в случае, когда $n\to\infty$, $c\to\infty$, а среднее число точек на участке $(a,\,b)$ остается постоянным?

Решение. Введем в рассмотрение случайную величину Y_i — индикатор события $T_i \in (a, b)$:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } T_i \in (a, b); \\ 0, & \text{если } T_i \notin (a, b). \end{cases}$$

Очевидно,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Обозначим

$$P\{Y_i = 1\} = p = \frac{b-a}{c}; \quad P\{Y_i = 0\} = 1 - p = \frac{c-b+a}{c}.$$

Рассматривая n значений $T_1, \ldots, T_n$ как n независимых опытов, в каждом из которых может произойти или нет событие $T_i \in (a, b)$, видим, что случайная величина Y имеет биномиальное распределение с параметрами n и p и с математическим ожиданием $M[Y] = np$:

$$P\{Y = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ (k = 0, \ldots, n).$$

Рассмотрим случай, когда $c \to \infty$, $n \to \infty$, $n/c = \lambda = \text{const}$. При этом $p \to 0$, но среднее число точек, попадающих на участок (a, b), постоянно: $M[Y] = \lambda(b-a) = \text{const}$. Известно (см. раздел 4.0), что в этом случае предельное распределение случайной величины Y будет пуассоновским с параметром $d = \lambda(b-a)$:

$$P\{Y = k\} = \frac{d^k}{k!} e^{-d} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким же распределением обладает число событий стационарного пуассоновского потока с интенсивностью λ, попадающих на участок (a, b).

Отсюда следует вывод: стационарный поток событий с интенсивностью λ можно рассматривать как предельный случай совокупности n независимых случайных точек на участке $(0, c)$, каждая из которых имеет на этом участке равномерное распределение, при условии, что $n \to \infty$, $c \to \infty$, но $n/c = \lambda = \text{const}$. Такая модель простейшего (стационарного пуассоновского) потока понадобится нам в дальнейшем.

ГЛАВА 9

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

9.0. Функция $X(t)$ называется *случайной функцией*, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной. Примеры случайных функций: $V(t)$ — напряжение электропитания ЭВМ в зависимости от времени t; $T(h)$ — температура воздуха в данном пункте в данный момент в зависимости от высоты h над землей; $Q(t)$ — число отказов ЭВМ, происшедших за время от 0 до t.

Понятие случайной функции является обобщением понятия случайной величины. Так как случайную величину X можно рассматривать как функцию

элементарного события ω (см. раздел 4.0): $X = \varphi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, где Ω — пространство элементарных событий, то случайную функцию $X(t)$ можно представить в виде

$$X(t) = \varphi(t, \omega) \quad (\omega \in \Omega, \ t \in T),$$

где t — не случайный аргумент, T — область определения функции $X(t)$.

Реализацией случайной функции $X(t)$ называется конкретный вид, который она принимает в результате опыта (когда осуществилось элементарное событие ω). Например, записывая с помощью какого-либо прибора напряжение питания ЭВМ в зависимости от времени на участке $(0, \tau)$, мы получим реализацию $v(t)$ случайной функции $V(t)$ (рис. 9.0.1).

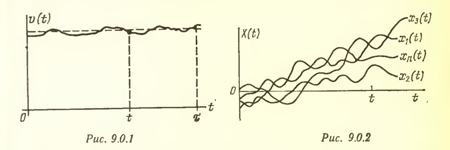


Рис. 9.0.1 *Рис. 9.0.2*

Ряд проведенных опытов, исход каждого из которых — случайная функция $X(t)$, дает совокупность реализаций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ этой случайной функции. Реализации неизбежно отличаются друг от друга из-за случайных причин (рис. 9.0.2). Для фиксированного момента времени t случайная функция $X(t)$ превращается в обычную случайную величину. Эта случайная величина называется *сечением* случайной функции.

Если рассмотреть не одно сечение случайной функции, а ряд сечений в ряде точек $t_1, t_2, \ldots, t_m$, то получится m-мерный случайный вектор, в каком-то приближении описывающий ее (рис. 9.0.3). На практике, если значения случайной функции регистрируются с каким-то интервалом при значениях аргумента $t_1, t_2, \ldots, t_n$, мы имеем дело именно с n-мерным случайным вектором.

Случайную функцию $X(t)$, аргументом которой является время, обычно называют *случайным процессом*. Случайный процесс, протекающий в физической системе S, состоит в том, что с течением времени t система S случайным образом меняет свое состояние. Если состояние системы S в момент t описывается одной скалярной случайной величиной $X(t)$, то мы имеем дело со *скалярной случайной функцией* (скалярным случайным процессом) $X(t)$. Если состояние системы S в момент t описывается несколькими случайными величинами $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_k(t)$, то мы имеем дело с *векторной случайной функцией* $V(t)$ (векторным случайным процессом) с k составляющими: $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_k(t)$.

Случайные процессы делятся на классы по ряду признаков. Случайный процесс, протекающий в системе S, называется *процессом с дискретным временем*, если переходы системы S из одного состояния в другое возможны только в определенные, заранее известные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ Пример процесса с дискретным временем: ЭВМ, которая меняет свои состояния в определенные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$, задаваемые тактом работы ЭВМ; техническое устройство, осматриваемое в моменты $t_1, t_2, \ldots$ и переводимое в результате осмотра из одной категории в другую.

Случайный процесс с дискретным временем называется также *случайной последовательностью*. Если состояние системы S описывается одной случайной величиной X, то случайный процесс представляет собой последовательность случайных величин: $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n), \ldots$

Случайный процесс, протекающий в системе S, называется *процессом с непрерывным временем*, если переходы из состояния в состояние могут происходить в любые, случайные моменты времени, непрерывно заполняющие ось $0t$

(или ее участок). Примеры случайного процесса с непрерывным временем — изменение напряжения электропитания ЭВМ $V(t)$ (см. рис. 9.0.1) или функционирование технического устройства, которое в случайные моменты времени выходит из строя и восстанавливается.

Случайный процесс, протекающий в системе S, называется *процессом с дискретными состояниями*, если число возможных состояний системы S конечно или счетно. Пример: техническое устройство состоит из двух узлов; возможные состояния системы: s_1 — оба узла исправны; s_2 — неисправен первый узел, исправен второй; s_3 — исправен первый узел, неисправен второй; s_4 — неисправны оба узла. Другой пример: передача сообщения по радио; случайный процесс $X(t)$ — количество неправильно переданных символов до момента t. Этот случайный процесс принимает только счетное множество состояний $\{0, 1, ..., n, ...\}$ и «подскакивает» на единицу в момент приема очередного неправильно переданного символа (рис. 9.0.4).

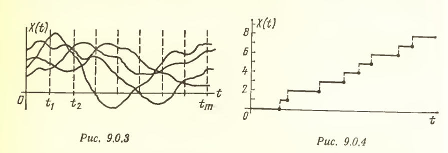


Рис. 9.0.3

Рис. 9.0.4

Случайный процесс, протекающий в системе S, называется *процессом с непрерывными состояниями*, если множество возможных состояний системы S несчетно. Пример: процесс вывода космического корабля в заданное положение относительно Земли. Другой пример — напряжение электропитания ЭВМ $V(t)$.

По вышеуказанным признакам случайные процессы делятся на следующие.

1а. Процессы с дискретными состояниями и дискретным временем.

1б. Процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

2а. Процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем.

2б. Процессы с непрерывными состояниями и непрерывным временем.

Примеры процесса типа 1а. Некто купил m билетов выигрышного займа, которые могут выигрывать и погашаться в известные моменты времени (тиражи) t_1, t_2, ...; случайный процесс $X(t)$ — количество билетов, выигрывших до момента t (включая t). Другой пример — состояние оперативной памяти ЭВМ; все возможные состояния оперативной памяти могут быть перечислены и изменения состояний оперативной памяти могут происходить в дискретные моменты времени в соответствии с тактом работы ЭВМ.

Пример процесса типа 1б. Прибор может находиться в четырех состояниях: s_0 — не включен и исправен; s_1 — включен и исправен; s_2 — не включен и неисправен; s_3 — включен и неисправен. Многочисленные примеры процессов типа 1б встретятся нам в гл. 10 и 11.

Пример процесса типа 2а. В моменты t_1, t_2, ... наблюдаются значения $X(t_1)$, $X(t_2)$, ... непрерывной случайной величины X. Последовательность значений этой величины — процесс $X(t)$ с непрерывными состояниями и дискретным временем. Например, если температура воздуха T измеряется дважды в сутки, то последовательность зарегистрированных значений T представляет собой случайный процесс с непрерывными состояниями и дискретным временем.

Пример процесса типа 2б — процесс $V(t)$ изменения напряжения в электросети питания ЭВМ в любой момент времени t или уровня помех при передаче сообщения.

Рассмотрим ряд характеристик скалярной случайной функции $X(t)$.

Одномерным законом распределения случайной функции $X(t)$ называется закон распределения сечения $X(t)$ этой случайной функции для любого значе-

ния аргумента t. Если случайная величина $X(t)$ непрерывна, то этот закон представляет собой плотность распределения сечения $X(t)$ и обозначается $f(x, t)$. Если случайная величина $X(t)$ дискретна, то одномерный закон распределения случайной функции $X(t)$ представляет собой ряд вероятностей $P(x_i, t)$ того, что в момент t случайная величина $X(t)$ приняла значение x_i. Для смешанной случайной величины $X(t)$ одномерный закон распределения задается функцией распределения $F(x, t) = P\{X(t) < x\}$. Так как функция распределения является наиболее общей формой закона распределения, пригодной для любых случайных величин, можно и для одномерного закона распределения пользоваться общей записью $F(x, t)$.

Двумерным законом распределения случайной функции $X(t)$ называется совместный закон распределения двух ее сечений [$X(t_1)$ и $X(t_2)$ для любых значений t_1 и t_2], представляющий собой функцию четырех аргументов: x_1, x_2, t_1, t_2. Соответственно можно рассмотреть n-мерный закон распределения, зависящий от $2n$ аргументов.

Случайная функция $X(t)$ называется *нормальной*, если совместное распределение любого числа n ее сечений, взятых в произвольные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$, есть n-мерный нормальный закон.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t представляет собой математическое ожидание соответствующего сечения случайной функции:

$$m_x(t) = M[X(t)]. \tag{9.0.1}$$

Корреляционной (или «автокорреляционной») *функцией* случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_x(t, t')$, которая при каждой паре значений аргументов t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции:

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\, \overset{\circ}{X}(t')], \tag{9.0.2}$$

где $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ — центрированная случайная функция.

При $t' = t$ корреляционная функция превращается в дисперсию случайной функции:

$$K_x(t, t) = D_x(t) = D[X(t)] = [\sigma_x(t)]^2. \tag{9.0.3}$$

Основные свойства корреляционной функции:

1) $K_x(t, t') = K_x(t', t)$, т. е. функция $K_x(t, t')$ не меняется при замене t на t' (симметричность);

2) $|K_x(t, t')| \leqslant \sigma_x(t)\, \sigma_x(t')$;

3) функция $K_x(t, t')$ — положительно определенная, т. е. $\int\limits_{(B)}\int\limits_{(B)} K_x(t, t')\, \varphi(t) \times \varphi(t')\, dt dt' \geqslant 0$, где $\varphi(t)$ — любая функция, (B) — любая область интегрирования, одинаковая для обоих аргументов.

Для нормальной случайной функции характеристики $m_x(t)$, $K_x(t, t')$ являются исчерпывающими и определяют собой закон распределения любого числа сечений.

Нормированной корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется функция

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t)\, \sigma_x(t')} = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)\, D_x(t')}}, \tag{9.0.4}$$

т. е. коэффициент корреляции сечений $X(t)$ и $X(t')$; при $t = t'$ $r_x(t, t') = 1$.

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любых значений аргумента $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots$ случайные величины приращения функции $X(t)$

$$U_1 = X(t_2) - X(t_1);\; U_2 = X(t_3) - X(t_2);\; \ldots;\; U_k = X(t_{k+1}) - X(t_k) \tag{9.0.5}$$

независимы.

Нормальный случайный процесс с независимыми приращениями называется *винеровским случайным процессом*, если его математическое ожидание равно нулю, а дисперсия приращения пропорциональна длине отрезка, на котором оно достигается:

$$m_x(t)=0;\quad D[U_k]=a(t_{k+1}-t_k), \tag{9.0.6}$$

где $a>0$ — постоянный коэффициент.

При прибавлении к случайной функции $X(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ к ее математическому ожиданию прибавляется то же неслучайное слагаемое, а корреляционная функция не меняется.

При умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее математическое ожидание умножается на тот же множитель $\varphi(t)$, а корреляционная функция — на $\varphi(t)\varphi(t')$.

Если случайную функцию $X(t)$ подвергают некоторому преобразованию A_t, то получается другая случайная функция $Y(t)=A_t\{X(t)\}$.

Преобразование $L_t^{(0)}$ называется *линейным однородным*, если

$$1)\ L_t^{(0)}\left\{\sum_{k=1}^{n}X_k(t)\right\}=\sum_{k=1}^{n}L_t^{(0)}\{X_k(t)\}$$

(т. е. преобразование к сумме может применяться почленно);

$$2)\ L_t^{(0)}\{cX(t)\}=cL_t^{(0)}\{X(t)\}$$

(т. е. множитель c, не зависящий от аргумента t, по которому производится преобразование, можно выносить за знак преобразования).

Преобразование L_t называется *линейным неоднородным*, если

$$L_t\{X(t)\}=L_t^{(0)}\{X(t)\}+\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — не случайная функция.

Если случайная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ линейным преобразованием $Y(t)=L_t\{X(t)\}$, то ее математическое ожидание $m_y(t)$ получается из $m_x(t)$ *тем же линейным преобразованием*:

$$m_y(t)=L_t\{X(t)\}, \tag{9.0.7}$$

а для нахождения корреляционной функции $K_x(t,t')$ нужно *дважды* подвергнуть функцию $K_x(t,t')$ соответствующему *линейному однородному преобразованию*: один раз по t, другой раз по t':

$$K_y(t,t')=L_t^{(0)}\{L_{t'}^{(0)}\{K_x(t,t')\}\}. \tag{9.0.8}$$

Взаимной корреляционной функцией $R_{xy}(t,t')$ двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называется функция

$$R_{xy}(t,t')=M[\mathring{X}(t)\mathring{Y}(t')]. \tag{9.0.9}$$

Из определения взаимной корреляционной функции вытекает, что

$$R_{xy}(t,t')=R_{yx}(t',t).$$

Нормированной взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$, $Y(t)$ называется функция

$$r_{xy}(t,t')=\frac{R_{xy}(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_y(t')}=\frac{R_{xy}(t,t')}{\sqrt{D_x(t)D_y(t')}}. \tag{9.0.10}$$

Случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ называются *некоррелированными*, если $R_{xy}(t,t')\equiv 0$.

Если $Z(t)=X(t)+Y(t)$, то $m_z(t)=m_x(t)+m_y(t)$,

$$K_z(t,t')=K_x(t,t')+K_y(t,t')+R_{xy}(t,t')+R_{xy}(t',t).$$

Если случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированны, то

$$K_z(t,t')=K_x(t,t')+K_y(t,t'). \tag{9.0.11}$$

Если

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{n} X_k(t), \tag{9.0.12}$$

где $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ — некоррелированные случайные функции, то

$$m_z(t)=\sum_{k=1}^{n} m_{x_k}(t);\; K_z(t, t')=\sum_{k=1}^{n} K_{x_k}(t, t').$$

При выполнении различных преобразований со случайными функциями часто бывает удобно записывать их в комплексном виде. *Комплексной случайной функцией* называется случайная функция вида

$$Z(t)=X(t)+iY(t), \tag{9.0.13}$$

где $X(t)$, $Y(t)$ — действительные случайные функции, i — мнимая единица.

Математическое ожидание, корреляционная функция и дисперсия комплексной случайной функции определяются следующим образом:

$$m_z(t)=m_x(t)+im_y(t);\; K_z(t, t')=M\left[\overset{\circ}{X}(t)\,\overline{\overset{\circ}{X}(t')}\right], \tag{9.0.14}$$

где чертой вверху обозначена комплексная сопряженная величина, а

$$D_z(t)=K_z(t, t)=M\left[\left|\overset{\circ}{X}(t)\right|^2\right]. \tag{9.0.15}$$

При переходе к комплексным случайным величинам и функциям необходимо определять дисперсию как математическое ожидание квадрата модуля, а корреляционный момент — как математическое ожидание произведения центрированной одной случайной величины на комплексную сопряженную центрированной другой*).

Каноническим разложением случайной функции $X(t)$ называется ее представление в виде

$$X(t)=m_x(t)+\sum_{k=1}^{m} V_k\,\varphi_k(t)^{**)}, \tag{9.0.16}$$

где V_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ — центрированные, некоррелированные случайные величины, с дисперсиями D_k $(k=1, 2, \ldots, m)$; $\varphi_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ — неслучайные функции. Случайные величины V_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ называются *коэффициентами*, а функции $\varphi_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ — *координатными функциями* канонического разложения.

Если случайная функция $X(t)$ допускает каноническое разложение (9.0.16) в действительной форме, то корреляционная функция $K_x(t, t')$ выражается суммой:

$$K_x(t, t')=\sum_{k=1}^{m} D_k\,\varphi_k(t)\,\varphi_k(t'), \tag{9.0.17}$$

которая называется *каноническим разложением корреляционной функции*.

Если случайная функция $X(t)$ допускает каноническое разложение (9.0.16) в комплексной форме, то каноническое разложение корреляционной функции имеет вид

---

*) В дальнейшем мы каждый раз будем оговаривать комплексный характер случайной функции; если он не оговорен, будем считать случайную функцию действительной.

**) В частности, сумма может распространяться на бесконечное (счетное) число слагаемых.

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^{m} D_k \varphi_k(t) \overline{\varphi_k(t')}, \qquad (9.0.18)$$

где чертой вверху обозначена комплексная сопряженная величина.

Из возможности канонического разложения вида (9.0.17) или (9.0.18) корреляционной функции вытекает представимость случайной функции $X(t)$ в виде канонического разложения (9.0.16), где случайные величины V_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) имеют дисперсии D_k ($k = 1, 2, \ldots, m$).

При линейном преобразовании случайной функции $X(t)$, заданной каноническим разложением (9.0.16), получается случайная функция $Y(t) = L_t\{X(t)\}$ в виде канонического разложения

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{k=1}^{m} V_k \psi_k(t), \qquad (9.0.19)$$

где

$$m_y(t) = L_t\{m_x(t)\}; \quad \psi_k(t) = L_t^{(0)}\{\varphi_k(t)\}, \qquad (9.0.20)$$

т. е. при *линейном преобразовании случайной функции, заданной каноническим разложением, ее математическое ожидание подвергается тому же линейному преобразованию, а координатные функции* — соответствующему *линейному однородному преобразованию.*

Стационарной случайной функцией $X(t)$*) называется случайная функция, математическое ожидание которой постоянно, $m_x = \text{const}$, а корреляционная функция зависит только от разности между ее аргументами: $K_x(t, t') = k_x(\tau)$ где $\tau = t' - t$.

Из симметричности корреляционной функции $K_x(t, t')$ следует, что $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$, т. е. *корреляционная функция стационарной случайной функции есть четная функция аргумента* τ.

Дисперсия стационарной случайной функции постоянна:

$$D_x = K_x(t, t) = k_x(0) = \text{const}. \qquad (9.0.21)$$

Корреляционная функция стационарной случайной функции обладает свойством

$$|k_x(\tau)| \leqslant D_x. \qquad (9.0.22)$$

Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции равна

$$\rho_x(\tau) = k_x(\tau)/D_x = k_x(\tau)/k_x(0). \qquad (9.0.23)$$

Каноническое разложение стационарной случайной функции имеет вид

$$X(t) = m_x + \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \qquad (9.0.24)$$

где U_k, V_k ($k = 0, 1, \ldots$) — центрированные, некоррелированные случайные величины с попарно равными дисперсиями $D[U_k] = D[V_k] = D_k$.

Разложение (9.0.24) называется *спектральным*. Спектральному разложению стационарной случайной функции соответствует разложение в ряд ее корреляционной функции:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \qquad (9.0.25)$$

откуда

$$D_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_k. \qquad (9.0.26)$$

---

*) Точнее, стационарный в широком смысле.

Спектральное разложение (9.0.24) стационарной случайной функции полагая $\omega_0 = 0$, можно переписать в комплексной форме:

$$X(t) = m_x + \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}, \qquad (9.0.27)$$

где

$$\omega_{-k} = -\omega_k; \quad W_0 = U_0; \quad W_k = \frac{U_k - iV_k}{2}, \quad W_{-k} = \frac{U_k + iV_k}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называется предел отношения дисперсии, приходящейся на данный интервал частот к длине этого интервала, когда последняя стремится к нулю. Спектральная плотность $S_x(\omega)$ и корреляционная функция $k_x(\tau)$ связаны преобразованиями Фурье. В действительной форме эта связь имеет вид

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \qquad k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega; \qquad (9.0.28)$$

из последнего соотношения вытекает, что

$$D_x = k_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega. \qquad (9.0.29)$$

В комплексной форме преобразования Фурье, связывающие спектральную плотность $S_x^*(\omega)$ и корреляционную функцию $k_x(\tau)$, имеют вид

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega. \qquad (9.0.30)$$

В приложении 7 дана таблица соответствий некоторых корреляционных функций и спектральных плотностей.

Как $S_x(\omega)$, так и $S_x^*(\omega)$ — действительные, неотрицательные функции; $S_x^*(\omega)$ — четная функция, определенная на интервале $(-\infty\ +\infty)$; $S_x(\omega)$ определена на интервале $(0, +\infty)$ и на этом интервале $S_x^*(\omega) = 0{,}5\, S_x(\omega)$.

Нормированной спектральной плотностью $s_x(\omega)$ [или в комплексной форме $s_x^*(\omega)$] называется спектральная плотность, деленная на дисперсию случайной функции $X(t)$:

$$s_x(\omega) = S_x(\omega)/D_x; \quad s_x^*(\omega) = S_x^*(\omega)/D_x. \qquad (9.0.31)$$

Если взаимная корреляционная функция $R_{x,y}(t, t')$ двух стационарных случайных функций $X(t)$ и $Y(t')$ есть функция только $\tau = t' - t$, то такие случайные функции называются *стационарно связанными*. В этом случае между взаимной корреляционной функцией $R_{xy}(\tau)$ и взаимной спектральной плотностью $S_{xy}^*(\omega)$ существуют соотношения:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{xy}^*(\omega)\, d\omega; \quad S_{xy}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{xy}(\tau)\, d\tau. \qquad (9.0.32)$$

Если нормальные стационарные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ стационарно связаны, то случайная функция $Z(t) = X(t)\,Y(t)$ будет стационарной с характеристиками:

$$m_z = m_x m_y + R_{xy}(0), \tag{9.0.33}$$

$$S_z^*(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega - v)\, S_y^*(v)\, dv + m_x m_y \left[S_{xy}^*(\omega) + S_{yx}^*(\omega)\right] + $$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{xy}^*(\omega - v)\, S_{yx}^*(v)\, dv + m_x^2 S_y^*(\omega) + m_y^2 S_x^*(\omega). \tag{9.0.34}$$

В частном случае, если $Z(t) = X^2(t)$, то

$$m_z = m_x^2 + D_x = m_x^2 + k_x(0), \tag{9.0.35}$$

$$S_z^*(\omega) = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega - v)\, S_x^*(v)\, dv + 4 m_x^2\, S_x^*(\omega). \tag{9.0.36}$$

Белым шумом (или белым шумом в широком смысле) называется случайная функция $X(t)$, любые два различных (сколь угодно близких) сечения которой некоррелированны и корреляционная функция которой пропорциональна дельта-функции:

$$K_x(t, t') = G(t)\,\delta(t - t'). \tag{9.0.37}$$

Величина $G(t)$ называется *интенсивностью белого шума*. Определения и свойства дельта-функции даны в приложении 6.

Стационарным белым шумом называется белый шум с постоянной интенсивностью $G(t) = G = \text{const}$.

Корреляционная функция стационарного белого шума имеет вид

$$k_c(\tau) = G\,\delta(\tau), \tag{9.0.38}$$

откуда его спектральная плотность постоянна и равна

$$S_x^*(\omega) = G/2\pi. \tag{9.0.39}$$

Дисперсия стационарного белого шума $D_x = G\delta(0)$, т. е. бесконечна.

Если на вход стационарной линейной системы L поступает стационарная случайная функция $X(t)$, то спустя некоторое время, достаточное для затухания переходного процесса, случайная функция $Y(t)$ на выходе линейной системы также будет стационарной. Спектральные плотности входного и выходного сигналов связаны соотношением

$$S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega)\, |\Phi(i\omega)|^2, \tag{9.0.40}$$

где $\Phi(i\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика линейной системы.

Говорят, что стационарная функция $X(t)$ *обладает эргодическим свойством*, если ее характеристики $[m_x, k_x(\tau)]$ могут быть определены как соответствующие средние по времени для одной реализации достаточно большой продолжительности. Достаточным условием эргодичности стационарной случайной функции (по математическому ожиданию) является стремление к нулю ее корреляционной функции при $\tau \to \infty$:

$$\lim_{\tau \to \infty} k_x(\tau) = 0. \tag{9.0.41}$$

Для того чтобы случайная функция $X(t)$ была эргодична по дисперсии D_x, достаточно, чтобы случайная функция $Y(t) = X^2(t)$ обладала аналогичным свойством, т. е. при $\tau \to \infty$ $\lim\limits_{\tau \to \infty} k_y(\tau) = 0$*).

---

*) Для того чтобы случайная функция была эргодична по корреляционной функции, нужно, чтобы аналогичным свойством обладала функция $Z(t, \tau) = X(t)\,X(t + \tau)$.

Выбросом случайной функции $X(t)$ за уровень a называется пересечение реализацией этой функции (снизу вверх) прямой, параллельной оси Ot и отстоящей от нее на расстояние a (см. рис. 9.0.5, где выбросы отмечены крестиками). Число выбросов X за время T есть дискретная случайная величина; если выбросы редки, то ее можно считать распределенной по закону Пуассона.

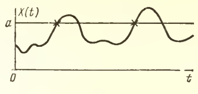


Рис. 9.0.5

Для нормальной стационарной случайной функции $X(t)$ среднее число выбросов за уровень a в единицу времени равно

$$\lambda_a = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(a+m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \qquad (9.0.42)$$

где σ_y — среднее квадратическое отклонение производной случайной функции

$$Y(t) = \frac{d}{dt} X(t). \qquad (9.0.43)$$

Таково же и среднее число пересечений заданного уровня сверху вниз.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Рассматривая неслучайную функцию времени $\varphi(t)$ как частный вид случайной функции $X(t) = \varphi(t)$, найти ее характеристики: математическое ожидание $m_x(t)$, дисперсию $D_x(t)$ и корреляционную функцию $K_x(t, t')$. Является ли случайная функция $X(t)$ стационарной?

Ответ. $m_x(t) = \varphi(t)$; $D_x(t) = 0$; $K_x(t, t') = 0$.

В общем случае случайная функция $X(t)$ нестационарна, так как при $\varphi(t) \neq \text{const}$ имеем $m_x(t) \neq \text{const}$.

9.2. В условиях предыдущей задачи $\varphi(t) = a = \text{const}$, где a не случайная величина : $X(t) = a$. Стационарна ли случайная функция $X(t)$? Если стационарна, то обладает ли она эргодическим свойством?

Ответ. Случайная функция $X(t)$ стационарна, так как $m_x(t) = a = \text{const}$, $D_x(t) = 0$, $K_x(t,t') = k_x(\tau) = 0$, и обладает эргодическим свойством.

9.3. Случайная функция $X(t)$ в каждом сечении представляет собой непрерывную случайную величину с одномерной плотностью распределения $f(x, t)$. Написать выражения для математического ожидания $m_x(t)$ и дисперсии $D_x(t)$ случайной функции $X(t)$.

Ответ. $m_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x, t)\, dx$; $D_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(x, t) dx$.

9.4. Случайная функция $X(t)$ представляет собой случайную величину $X(t) = V$, где V — непрерывная случайная величина с плот-

ностью $\varphi(v)$. 1) Написать выражение одномерного закона (плотности) распределения $f(x, t)$ случайной функции $X(t)$; 2) найти математическое ожидание $m_x(t)$ и дисперсию $D_x(t)$ случайной функции $X(t)$; 3) написать выражение двумерной функции распределения $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ двух сечений $X(t_1)$, $X(t_2)$ случайной функции $X(t)$; 4) найти ее корреляционную функцию $K_x(t, t')$ и спектральную плотность $S_x^*(\omega)$.

Решение. 1) $f(x, t) = \varphi(x)$;

2) $m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx = m_v$; $D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_v)^2 \varphi(x)\,dx$;

3) $F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) < x_1, \quad X(t_2) < x_2\} =$
$= P\{V < x_1, \ Y < x_2\}$.

Если $x_1 < x_2$, то из $V < x_1$ следует $V < x_2$ и $P\{V < x_1, V < x_2\} = \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x)\,dx$. Следовательно,

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x)\,dx = F(x_1) \text{ при } x_1 < x_2; \\ \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x)\,dx = F(x_2) \text{ при } x_2 < x_1, \end{cases}$$

где $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx$ — функция распределения величины V;

4) $K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t')] = M[\overset{\circ}{V}\overset{\circ}{V}] = D_v$;
$D_x(t) = K_x(t, t') = D_v$.

Так как $m_x(t) = \text{const}$ и $K_x(t, t') = \text{const}$, то случайная функция $X(t)$ стационарна. Так как среднее по времени для каждой реализации равно значению, принятому случайной величиной V в этой реализации, и различно для разных реализаций, то случайная функция $X(t)$ *неэргодична*; ее спектральная плотность

$$S_x^*(\omega) = \frac{D_v}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\,d\omega = D_v\,\delta(\omega),$$

где $\delta(\omega)$ — дельта-функция. В этом можно непосредственно убедиться, так как

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} D_v\,\delta(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega = D_v\,e^{i0\tau} = D_v.$$

9.5. Случайная функция $X(t)$ задана в виде $X(t) = Vt + b$, где V — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами m_v, σ_v; b — не случайная величина. Найти одномерную плотность распределения $f(x, t)$ сечения случайной функции $X(t)$ и ее характеристики: $m_x(t)$, $D_x(t)$, $K_x(t, t')$.

Ответ. $f(x, t)$ — нормальный закон с параметрами $m_v t + b$; $|t|\,\sigma_v$:

$$f(x, t) = \frac{1}{|t|\,\sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{[x - (m_v t + b)]^2}{2t^2 \sigma_v^2};$$

$$m_x(t) = m_v t + b;\quad D_x(t) = t^2 \sigma_v^2;\quad K_x(t, t') = \sigma_v^2 t t'.$$

9.6. Показать, что любая функция двух аргументов вида

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i(t) \varphi_i(t'), \tag{9.6}$$

где D_i — неотрицательные числа; $\varphi_i(t)$ — любые действительные функции ($i = 1, 2, \ldots, n$), обладает всеми свойствами корреляционной функции.

Решение. Достаточно показать, что существует случайная функция $X(t)$, имеющая корреляционную функцию (9.6). Рассмотрим действительную случайную функцию $X(t)$, заданных в виде канонического разложения

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i(t),$$

где $D[V_i] = D_i$. Корреляционная функция этой случайной функции имеет вид

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i(t) \varphi_i(t'),$$

что и требовалось доказать.

9.7. Даны характеристики нормального случайного процесса $X(t)$: $m_x(t)$; $D_x(t)$; $K_x(t, t')$. Известно, что в момент времени t случайный процесс находился в состоянии x $(X(t) = x)$. Найти условную вероятность $p_{\alpha\beta}$ того, что в момент времени $t' > t$ случайный процесс $X(t')$ будет принадлежать некоторой области (α, β):

$$p_{\alpha\beta} = P\{X(t') \in (\alpha, \beta) \mid X(t) = x\}.$$

Решение. Обозначим $X(t) = X_1$, $X(t') = X_2$. Система случайных величин X_1, X_2 имеет нормальное распределение $f(x_1, x_2)$ с характеристиками

$$m_{x_1} = m_x(t);\quad m_{x_2} = m_x(t');$$
$$\sigma_{x_1}^2 = D_x(t);\quad \sigma_{x_2}^2 = D_x(t');\quad r_{1,2} = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}}.$$

Условный закон распределения

$$f(x_2 \mid x_1) = f(x_1, x_2)\,(f_1(x_1))^{-1},\ \text{где}\ f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2.$$

Этот закон тоже будет нормальным с характеристиками:

$$m_{x_2 \mid x_1} = m_2 + r_{1,2} \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}} (x_1 - m_1);\quad \sigma_{x_2 \mid x_1} = \sigma_{x_2} \sqrt{1 - r_{1,2}^2}.$$

Отсюда

$$p_{\alpha\beta}=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x_2\,|\,x_1=x)\,dx_2=\Phi\left(\frac{\beta-\left[m_2+r_{1,2}\dfrac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}}(x-m_1)\right]}{\sigma_{x_2}\sqrt{1-r_{1,2}^2}}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{\alpha-\left[m_2+r_{1,2}\dfrac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}}(x-m_1)\right]}{\sigma_{x_2}\sqrt{1-r_{1,2}^2}}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

9.8. Найти одно- и двумерный закон распределения и характеристики случайной функции $X(t)$, заданной своим каноническим разложением

$$X(t)=m_x(t)+\sum_{i=1}^{n} V_i\,\varphi_i(t),$$

где V_i $(i=1,2,\ldots,n)$ — взаимно-некоррелированные нормально распределенные случайные величины с характеристиками $m_i=0$, D_i.

Решение. Одномерный закон распределения $f(x_1,\ t)$ — нормальный с характеристиками

$$m_{x_1}(t)=m_x(t);\quad D_{x_1}(t)=\sum_{i=1}^{n} D_i\,\varphi_i^2(t).$$

Корреляционная функция

$$K_x(t,t')=\mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} V_i\varphi_i(t)\sum_{j=1}^{n} V_j\varphi_j(t')\right]=\sum_{i=1}^{n} D_i\,\varphi_i(t)\,\varphi_i(t').$$

Двумерный закон распределения $f(x_1,x_2;\ t,\ t')$ — нормальный с характеристиками $m_{x_1}(t)$, $m_{x_2}(t')$; $D_{x_1}(t)$; $D_{x_2}(t')$; $K_x(t,\ t')$. Случайная функция $X(t)$ нормальна, поэтому двумерный закон распределения является исчерпывающей характеристикой для любого числа сечений этой функции.

9.9. Задана случайная функция

$$X(t)=V_1 e^{-\alpha_1 t}+V_2 e^{-\alpha_2 t},$$

где V_1 и V_2 — некоррелированные случайные величины с характеристиками: $m_{v_1}=m_{v_2}=0$, D_{v_1}, D_{v_2}. Найти характеристики случайной функции $X(t)$.

Решение. Случайная функция $X(t)$ представлена каноническим разложением без свободного члена, следовательно, $m_x(t)=0$;

$$K_x(t,t')=D_{v_1}e^{-\alpha_1(t+t')}+D_{v_2}e^{-\alpha_2(t+t')};$$

$$D_x(t)=D_{n_1}e^{-\alpha_1 2t}+D_{v_2}e^{-\alpha_2 2t}.$$

9.10. Случайная функция $X(t)$ задана своим каноническим разложением

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n} V_i e^{-\alpha_i t}+a,$$

где V_i — центрированные случайные величины с дисперсиями D_{v_i} $(i = 1, 2, ..., n)$; $M[V_i, V_j] = 0$ при $i \neq j$; a — не случайная величина. Найти характеристики случайной функции $X(t)$.

Ответ.

$$m_x(t) = a; \quad K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{n} D_{v_i} e^{-\alpha_i (t+t')};$$

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^{n} D_{v_i} e^{-2\alpha_i t}.$$

9.11. Случайная функция $X(t)$ задана каноническим разложением

$$X(t) = t + V_1 \cos \omega t + V_2 \sin \omega t,$$

где V_1 и V_2 — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и с дисперсиями $D_1 = D_2 = 2$. Определить, является ли стационарной случайная функция $X(t)$.

Решение. $m_x(t) = t$; $K_x(t, t') = 2(\cos \omega t \cos \omega t' + \sin \omega t \times \sin \omega t') = 2 \cos \omega (t - t')$.

Корреляционная функция случайной функции $X(t)$ удовлетворяет условию стационарности, однако математическое ожидание $m_x(t)$ зависит от времени. Случайная функция $X(t)$ нестационарна, но центрированная случайная функция $\mathring{X}(t)$ стационарна.

9.12. Заданы две случайные функции:

$X(t) = V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \sin \omega_1 t$; $Y(t) = U_1 \cos \omega_2 t + U_2 \sin \omega_2 t$.

Математические ожидания всех случайных величин V_1, V_2, U_1 и U_2 равны нулю, дисперсии $D_{v_1} = D_{v_2} = 1$; $D_{u_1} = D_{u_2} = 4$; нормированная корреляционная матрица системы (V_1, V_2, U_1, U_2) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ & 1 & 0 & -0{,}5 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Определить взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t, t')$ и найти значение этой функции при $t = 0$, $t' = 1$.

$$\text{Решение. } R_{xy}(t, t') = M[\mathring{X}(t) \mathring{Y}(t')] = M[(V_1 \cos \omega_1 t +$$

$$+ V_2 \sin \omega_1 t)(U_1 \cos \omega_2 t' + U_2 \sin \omega_2 t')] = \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t' M[V_1 U_1] +$$

$$+ \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t' M[V_2 U_2] + \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t' M[V_2 U_1] + \sin \omega_1 t \times$$

$$\times \sin \omega_2 t' M[V_2 U_2] = \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t' - \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t' = \cos(\omega_1 t + \omega_2 t');$$

$$R_{xy}(0; 1) = \cos \omega_2; \quad R_{yx}(0; 1) = \cos \omega_1;$$

$$R_{yx}(t, t') = R_{xy}(t', t) = \cos(\omega_1 t' + \omega_2 t).$$

9.13. *Пуассоновский процесс*. Рассматривается на оси $0t$ простейший поток событий с интенсивностью λ (точки на оси $0t$ — см. рис. 9.13,*а*) и связанная с ним случайная функция $X(t)$ — число событий, появившихся за время $(0, t)$. В момент появления очередного события

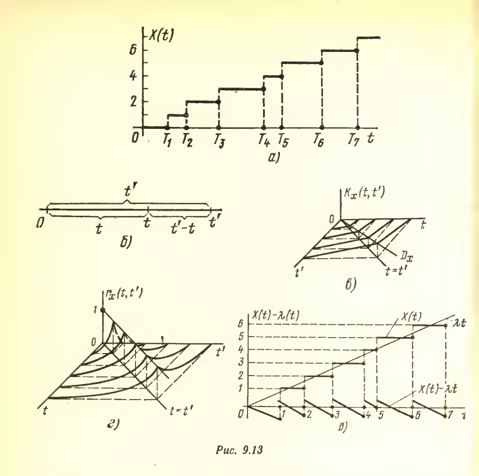


Рис. 9.13

случайная функция $X(t)$ скачком увеличивается на единицу (рис. 9.13, *а*)*). Случайная функция $X(t)$ называется *пуассоновским процессом*.

Найти одномерный закон распределения пуассоновского процесса, его характеристики: $m_x(t)$, $D_x(t)$, $K_x(t,t')$, $r_x(t,t')$, а также характеристики случайного процесса $Z(t) = X(t) - \lambda t$.

Решение. Закон распределения сечения $X(t)$ есть закон Пуассона с параметром $a = \lambda t$, значит, вероятность того, что случайная величина $X(t)$ примет значение m, выражается формулой $P_m = (\lambda t)^m (m!)^{-1} e^{-\lambda t}$ $(m = 0,1,2,\ldots)$. Математическое ожидание и дисперсия случайной функции $X(t)$: $m_x(t) = D_x(t) = \lambda t$.

Найдем корреляционную функцию $K_x(t, t')$. Пусть $t' > t$. Рассмотрим интервал времени $(0, t')$ (см. рис. 9.13, *б*). Разобьем этот интер-

---

*) Условимся считать функцию $X(t)$ непрерывной слева.

вал на два участка: от 0 до t и от t до t'. Число событий на всем интервале $(0, t')$ равно сумме чисел событий на интервалах $(0, t)$ и (t, t')*): $X(t') = X(t) + Y(t' - t)$, где $Y(t' - t)$ — число событий, наступивших на интервале (t, t'); вследствие стационарности потока случайная функция $Y(t' - t)$ имеет то же распределение, что и $X(t)$; кроме того, согласно свойствам пуассоновского потока событий случайные величины $X(t)$ и $Y(t' - t)$ некоррелированны.

Имеем

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t')] = M[\overset{\circ}{X}(t)\,(\overset{\circ}{X}(t) + \overset{\circ}{Y}(t' - t))] = \\ = M(\overset{\circ}{X}(t))^2] = D_x(t) = \lambda t.$$

Аналогично при $t > t'$ получаем $K_x(t, t') = \lambda t'$. Таким образом, $K_x(t, t') = \min\{\lambda t, \lambda t'\} = \lambda \min\{t, t'\}$, где $\min\{t, t'\}$ — минимальная из величин t, t' (при $t = t'$ в качестве минимальной можно взять любую из величин t, t').

Пользуясь символом единичной функции $1(x)$ (см. приложение 6), можно записать корреляционную функцию в виде

$$K_x(t, t') = \lambda\, t\, 1(t' - t) + \lambda\, t'\, 1(t - t').$$

На рис. 9.13, *в* показана поверхность $K_x(t, t')$. В квадранте $t > 0$ и $t' > 0$ поверхность $K_x(t, t')$ состоит из двух плоскостей, проходящих соответственно через оси $0t$ и $0t'$ и пересекающихся по линии $0D_x$, аппликаты точек которой равны дисперсии λt.

Нормированная корреляционная функция

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)\, D_x(t')}} = \sqrt{\frac{t}{t'}}\, 1(t' - t) + \sqrt{\frac{t'}{t}}\, 1(t - t').$$

Поверхность $r_x(t, t')$ показана на рис. 9.13, *г*.

Пуассоновский процесс является процессом с независимыми приращениями, так как его приращение на любом участке есть число событий, появившихся на этом участке, а для простейшего потока числа событий, попадающие на неперекрывающиеся участки, независимы.

Процесс $Z(t) = X(t) - \lambda t$ (см. рис. 9.13, *д*) есть неоднородное линейное преобразование случайного процесса $X(t)$.
Следовательно, $m_z(t) = m_x(t) - \lambda t = 0$; $D_z(t) = D_x(t) = \lambda t$;

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') = \lambda \min(t, t'),$$

так как соответствующее линейное однородное преобразование не меняет корреляционной функции процесса $X(t)$.

9.14. Случайный процесс $X(t)$ возникает следующим образом. На оси времени $0t$ имеется стационарный пуассоновский (простейший) поток событий с интенсивностью λ. Случайная функция $X(t)$ попеременно принимает значения $+1$ и -1; при наступлении каждого события она скачком меняет свое значение с $+1$ на -1 или наоборот (рис. 9.14, *а*). В начальный момент случайная функция $X(t)$ с вероят-

*) Возможностью появления события в точности в момент t пренебрегаем, так как вероятность этого равна нулю.

ностью 1/2 равна $+1$, а с вероятностью 1/2 равна -1. Найти характеристики $m_x(t)$, $D_x(t)$ и $K_x(t, t')$ случайной функции $X(t)$.

Решение. Сечение случайной функции $X(t)$ имеет закон распределения, представленный рядом

$$X(t) = \left| \begin{array}{c|c} -1 & +1 \\ \hline 0,5 & 0,5 \end{array} \right|.$$

Действительно, так как моменты перемен знака никак не связаны со значением случайной функции, нет никаких оснований считать какое-либо из значений $+1$, -1 вероятнее другого. Отсюда $m_x(t) = -0,5 + 0,5 = 0$; $D_x(t) = (-1)^2/2 + 1^2/2 = 1$.

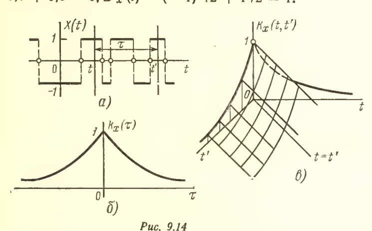


Рис. 9.14

Чтобы найти корреляционную функцию $K_x(t, t')$, рассмотрим какие-то два сечения случайной функции: $X(t)$ и $X(t')$ $(t' > t)$ — и найдем математическое ожидание их произведения:

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')] = M[X(t)X(t')].$$

Произведение $X(t)X(t')$ равно -1, если между точками t и t' произошло нечетное число событий (перемен знака), и равно $+1$, если произошло четное число перемен знака (включая нуль). Вероятность того, что за время $\tau = t' - t$ произойдет четное число перемен знака, равна

$$p_{\text{чет}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2m}}{(2m)!} e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda\tau} \frac{e^{\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}}{2};$$

аналогично вероятность того, что за время τ произойдет нечетное число перемен знака, равна

$$p_{\text{неч}} = e^{-\lambda\tau} \frac{e^{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}}{2}.$$

Отсюда

$$K_x(t, t') = (+1)\, p_{\text{чет}} + (-1)\, p_{\text{неч}} = e^{-2\lambda\tau},$$

где $\tau = t' - t$. Аналогично при $t' < t$

$$K_x(t', t) = e^{-2\lambda(-\tau)}, \text{ где } \tau = t' - t.$$

Объединяя эти формулы, получаем $K_x(t, t') = k_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$. График этой функции показан на рис. 9.14, *б*. Поверхность $K_x(t, t') = e^{-2\lambda|t'-t|}$ показана на рис. 9.14, *в*.

Случайная функция $X(t)$ стационарна. Ее спектральная плотность

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi}\,\frac{2\lambda}{(2\lambda)^2 + \omega^2}.$$

9.15. На оси $0t$ имеется простейший (стационарный пуассоновский) поток событий с интенсивностью λ. Случайный процесс $X(t)$ возникает следующим образом: в момент появления i-го события в потоке ($i = 1, 2, \ldots$) он принимает случайное значение V_i и сохраняет его до следующего события в потоке (рис. 9.15). В начальный момент $X(0) = V_0$. Случайные величины $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots$ независимы и имеют одно и то же распределение с плотностью $\varphi(x)$. Найти характеристики процесса $m_x(t)$, $D_x(t)$, $K_x(t, t')$. Является ли процесс стационарным?

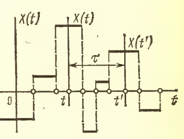


Рис. 9.15

Р е ш е н и е. Любое сечение случайной функции $X(t)$ распределено по закону $\varphi(x)$; отсюда

$$m_x(t) = M[V_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\, dx = m_v;$$

$$D_x(t) = D_v = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_v)^2\, \varphi(x)\, dx.$$

Корреляционную функцию $K_x(t, t')$ находим с помощью того же приема, что и в задаче 9.14. Рассмотрим два сечения $X(t)$ и $X(t')$ ($t' > t$), разделенные интервалом $\tau = t' - t$. Имеем

$$K_x(t, t') = M[\mathring{X}(t)\, \mathring{X}(t')].$$

Если между точками t, t' не появилось ни одного события, то $\mathring{X}(t) = \mathring{X}(t')$ и $K_x(t, t') = M[(\mathring{X}(t))^2] = D_x(t) = D_v$. Если между точками t, t' появилось хотя бы одно событие, то $M[\mathring{X}(t)\, \mathring{X}(t')] = 0$. Отсюда

$$K_x(t, t') = e^{-\lambda\tau} D_v + [1 - e^{-\lambda\tau}] \cdot 0 = D_v e^{-\lambda\tau}.$$

Аналогично при $t' < t$

$$K_x(t, t') = D_v e^{-\lambda(-\tau)},$$

откуда видно, что процесс стационарен. Его корреляционная функция $k_x(\tau) = D_v e^{-\lambda|\tau|}$ не зависит от вида закона распределения $\varphi(x)$, а зависит только от его дисперсии D_v.

9.16. *Процесс с независимыми сечениями.* Рассматривается случайный процесс $X(t)$, описанный в предыдущей задаче 9.15, в предельном случае, когда интенсивность λ потока событий неограниченно увеличивается. Исследовать поведение характеристик этого процесса при $\lambda \to \infty$.

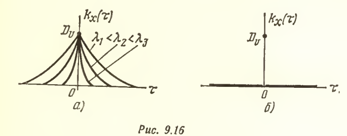


Рис. 9.16

Решение. При увеличении λ корреляционная функция $k_x(\tau) = D_v e^{-\lambda|\tau|}$ будет «стягиваться» к началу координат (рис. 9.16, *а*). В пределе получим корреляционную функцию вида

$$\tilde{k}_x(\tau) = \lim_{\lambda\to\infty} k_x(\tau) = \lim_{\lambda\to\infty} D_v e^{-\lambda|\tau|} = D_v \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda|\tau|},$$

т. е. функцию, равную нулю всюду, кроме $\tau = 0$, а при $\tau = 0$, равную D_v (рис. 9.16, *б*). Записать это можно так:

$$\tilde{k}_x(\tau) = \begin{cases} D_v & \text{при } \tau = 0; \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0. \end{cases}$$

Так как по условию задачи 9.15 все сечения случайного процесса $X(t)$ независимы, мы получили модель случайного процесса, для которого *любые два сколь угодно близкие сечения независимы.* Такой процесс можно назвать «процессом с независимыми сечениями». Получающийся в пределе при $\lambda \to \infty$ случайный процесс с независимыми сечениями $\tilde{X}(t)$ не имеет ни одной точки непрерывности.

9.17. *Белый шум.* Рассмотреть предельный случай для случайного процесса $X(t)$, приведенного в задаче 9.15, при условии, что интенсивность потока λ неограниченно увеличивается ($\lambda \to \infty$) и одновременно с этим стремится к бесконечности и дисперсия D_v каждого сечения ($D_v \to \infty$), причем $D_v/\lambda = c = \text{const}$. Найти характеристики случайного процесса $Z(t)$, получаемого при таком предельном переходе, и показать, что случайная функция $Z(t)$ представляет собой стационарный белый шум.

Решение. Поведение случайного процесса $X(t)$ при $\lambda \to \infty$ уже исследовано в задаче 9.16; теперь учтем еще условие $D_v \to \infty$, $D_v/\lambda = c$. Рассмотрим спектральную плотность $S_x(\omega)$ для случайного процесса $X(t)$ задачи 9.15:

$$S_x(\omega)=\frac{D_v}{\pi}\,\frac{\lambda}{\lambda^2+\omega^2}=\frac{D_v}{\pi\lambda}\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\omega^2}.$$

Из условия $D_v/\lambda = c$ имеем $D_v/(\pi\lambda) = c/\pi = a = \text{const}$. Корреляционная функция $k_x(\tau) = a\pi\lambda\, e^{-\lambda|\tau|}$.

Для случайного процесса $Z(t)$, который получится при $\lambda \to \infty$, $D_v \to \infty$, $D_v/\lambda = c$, получим

$$k_z(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty} k_x(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty} a\pi\lambda e^{-\lambda|\tau|}=a\pi\lim_{\lambda\to\infty}\lambda e^{-\lambda|\tau|}=a\pi\delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция (см. приложение 6);

$$S_z(\omega)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{a\lambda^2}{\lambda^2+\omega^2}=a.$$

Таким образом, мы убедились, что случайный процесс $Z(t)$ представляет собой стационарный белый шум, и построили модель возникновения такого шума. Белый шум можно представить как предельный случай последовательности коротких независимых одинаково распределенных импульсов с большой дисперсией. Такие процессы встречаются на практике при рассмотрении различных естественных помех, «теплового» шума в электронных устройствах, «дробового» эффекта и т. п.

9.18. Рассматривается случайный процесс $X(t)$, описанный в задаче 9.15, при условии, что закон распределения каждой случайной величины V_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — нормальный с математическим ожиданием $m_v = 0$ и дисперсией D_v. Найти характеристики $m_x(t)$, $D_x(t)$ и $K_x(t, t')$ случайного процесса $X(t)$. Будет ли этот процесс стационарным? Будет ли он нормальным?

Р е ш е н и е. Любое сечение случайной функции $X(t)$ распределено по нормальному закону с параметрами m_v, $\sigma_v = \sqrt{D_v}$. Как следует из решения задачи 9.15, корреляционная функция $k_x(\tau) = D_v e^{-\lambda|\tau|}$. Процесс стационарен. Но является ли он нормальным? Нет, несмотря на то, что одномерный закон распределения нормален. Совместное распределение двух сечений случайного процесса $X(t)$ уже не является нормальным, так как эти сечения с отличной от нуля вероятностью совпадают, чего не может быть для двух случайных величин, совместное распределение которых нормально.

9.19. *Модель электронного потока в радиолампе.* Поток электронов, направляющихся от катода к аноду радиолампы, представляет собой простейший поток с интенсивностью λ. При поглощении электрона анодом напряжение последнего возрастает скачком на единицу и затем начинает убывать по экспоненциальному закону с параметром α, зависящим от характеристик электронной схемы (рис. 9.19,*а*). Скачок напряжения от прихода очередного электрона суммируется с остаточным напряжением на аноде. Найти характеристики случайного процесса $X(t)$ — напряжения на аноде.

Р е ш е н и е. Электроны поступают на анод в случайные моменты времени $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots$, образующие простейший поток событий. Напряжение в момент t от воздействия i-го электрона, поступившего в момент T_i, будет

$$W_i(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<T_i,\\ e^{-\alpha(t-T_i)} & \text{при } t\geqslant T_i\end{cases}=1(t-T_i)\,e^{-\alpha(t-T_i)},$$

где $1(t)$ — единичная функция; $T_i>0$, $t>0$. Рассмотрим случайную величину Y — число электронов, поступивших на анод к моменту t. Эта величина имеет распределение Пуассона с параметром λt. Представим напряжение $X(t)$ как сумму случайного числа случайных слагаемых:

$$X(t)=\sum_{i=1}^{Y} e^{-\alpha(t-T_i)}\,1(t-T_i). \tag{9.19.1}$$

Ранее (см. задачу 8.80) было показано, что пуассоновский поток событий на интервале $(0,t)$ можно с достаточной точностью представить как совокупность точек на этом интервале, координата каждой из которых $\Theta_i\in(0,t)$ распределена равномерно на этом интервале (см.

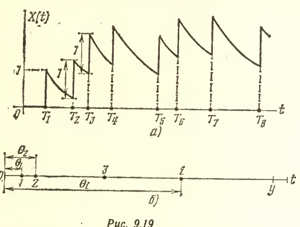


Рис. 9.19

рис. 9.19, *б*) и не зависит от координат других точек. Следовательно, выражение (9.19.1) можно переписать в виде

$$X(t)=\sum_{i=1}^{Y} e^{-\alpha(t-\Theta_i)}, \tag{9.19.2}$$

где случайные величины Θ_i независимы и распределены равномерно в интервале $(0,t)$.

Обозначим $X_i(t)=e^{-\alpha(t-\Theta_i)}=e^{-\alpha t}e^{\alpha\Theta_i}$, тогда

$$X(t)=\sum_{i=1}^{Y} X_i(t)=e^{-\alpha t}\sum_{i=1}^{Y} e^{\alpha\Theta_i}, \tag{9.19.3}$$

где $X_i(t)$ представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины, а случайная величина Y также не зависит от случайных величин $X_i(t)$. В соответствии с решением задачи 7.64 запишем выражение для $m_x(t)$ и $D_x(t)$:

$$m_x(t) = m_y(t)\, m_{x_i}(t); \qquad (9.19.4)$$

$$D_x(t) = m_y(t)\, D_{x_i}(t) + D_y(t)\, m_{x_i}^2(t). \qquad (9.19.5)$$

Так как случайная величина Y имеет распределение Пуассона с параметром λt, то $m_y(t) = D_y(t) = \lambda t$. Найдем $m_{x_i}(t)$:

$$m_{x_i}(t) = \mathrm{M}[X_i(t)] = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-x)}\,dx = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha t}.$$

Определим второй начальный момент случайной величины $X_i(t)$:

$$\mathrm{M}[X_i^2(t)] = \frac{1}{t}\int_0^t [\mathrm{e}^{-\alpha(t-x)}]^2\,dx = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\alpha t}}{2\alpha t}.$$

Следовательно,

$$m_x(t) = \lambda\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha}; \qquad (9.19.6)$$

$$D_x(t) = \lambda t\,[D_{x_i}(t) + m_{x_i}^2(t)] = \lambda t\mathrm{M}[X_i^2(t)] = \lambda\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2\alpha t}}{2\alpha}. \qquad (9.19.7)$$

Заметим, что при $t \to \infty$ математическое ожидание и дисперсия процесса $X(t)$ не будут зависеть от времени: $\lim\limits_{t\to\infty} m_x(t) = m_x = \lambda/\alpha$; $\lim\limits_{t\to\infty} D_x(t) = D_x = \lambda/(2\alpha)$.

Чтобы найти закон распределения сечения случайного процесса $X(t)$ при $m_x = \lambda/\alpha > 20$, проведем следующие рассуждения. При рассмотрении конечного, но достаточно большого интервала $(0, t)$ и гипотезе, что на этом интервале произошло достаточно большое число Y излучений электронов, процесс $X(t)$ [см. формулу (9.19.2)] представляет собой сумму независимых одинаково распределенных случайных величин, которая будет распределена приблизительно нормально, так как в этом случае практически выполняются условия центральной предельной теоремы (см. гл. 8). Следовательно, сечение случайного процесса будет распределено нормально с характеристиками: $m_x = \lambda/\alpha$; $D_x = \lambda/(2\alpha)$. Стационарный режим практически наступит через время $\tau_c = 3/\alpha$.

Для нахождения корреляционной функции рассмотрим два сечения исследуемого случайного процесса в моменты времени t и t' $(t' > t)$. В силу принятых допущений можно утверждать, что напряжение $X(t')$ на аноде лампы в момент времени t' будет равно напряжению $X(t)$ в момент времени t, умноженному на экспоненту $\mathrm{e}^{-\alpha(t'-t)}$, плюс напряжение $Y(t'-t)$, которое будет иметь место в результате поступления на анод электронов в интервале времени (t, t'):

$$X(t') = X(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t'-t)} + Y(t'-t). \qquad (9.19.8)$$

Очевидно, что случайные процессы $X(t)$ и $Y(t'-t)$ независимы, так как они порождены электронами, поступившими на анод в различные, непересекающиеся интервалы времени $(0, t)$ и (t, t') соответственно.

То же самое можно сказать и о центрированных случайных процессах $\overset{\circ}{X}(t)$ и $\overset{\circ}{Y}(t'-t)$. Следовательно,

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}\left[\overset{\circ}{X}(t)\left\{\overset{\circ}{X}(t)\,e^{-\alpha(t'-t)} + \overset{\circ}{Y}(t'-t)\right\}\right] =$$
$$= \mathrm{M}\left[(\overset{\circ}{X}(t))^2\right] e^{-\alpha(t'-t)} \quad \text{при } t' > t;$$
$$K_x(t, t') = \mathrm{M}\left[(\overset{\circ}{X}(t'))^2\right] e^{-\alpha(t-t')} \text{ при } t > t'.$$

Объединяя последние два выражения, получаем

$$K_x(t, t') = D_x(\min(t, t'))\,[1 - e^{2\alpha \min(t,\, t')}]\, e^{-\alpha|t'-t|}.$$

Рассмотрим предельное поведение случайного процесса при $t \to \infty$, $t' \to \infty$, но при конечном значении их разности $\tau = t' - t$. В этом случае

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} = \frac{\lambda}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}.$$

Таким образом, исследованный в этой задаче случайный процесс $X(t)$ при $t \to \infty$ и $\lambda/\alpha > 20$ является стационарным и практически нормальным случайным процессом.

Рассмотренная задача является более общим случаем задачи 9.13. Действительно, при $\alpha \to 0$ напряжение на аноде лампы будет представлять собой пуассоновский процесс, так как с появлением каждого нового электрона напряжение только возрастает на единицу и не убывает с течением времени. Следовательно, для любых конечных t, t' должны иметь место равенства:

$$\lim_{\alpha\to 0} m_x(t) = \lim_{\alpha\to 0} \lambda \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} D_x(t) = \lim_{\alpha\to 0} \lambda \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} = \lambda t;$$

$$\lim_{\alpha\to 0} K_x(t, t') = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\lambda}{2\alpha}\,[1 - e^{-2\alpha \min(t,\, t')}]\, e^{-\alpha|t'-t|} = \lambda \min(t, t'),$$

в справедливости которых предлагается читателю убедиться самостоятельно.

9.20. *Процесс функционирования линейного детектора*. В условиях задачи 9.19 положим, что электроны поступают на анод «пачками», моменты поступлений пачек образуют простейший поток с интенсивностью λ. При этом число электронов в i-й пачке представляет собой случайную величину W_i, которая не зависит от того, какое число электронов было в других пачках, и имеет закон распределения $F(w)$ с характеристиками m_w, D_w. Эта задача эквивалентна задаче определения напряжения на выходе линейного детектора, когда на его вход в случайные моменты времени, определяемые пуассоновским потоком, подаются положительные импульсы случайной величины (наибольшего напряжения) W_i, а в период между импульсами напряжение убывает по экспоненциальному закону (рис. 9.20). Найти характеристики процесса.

Решение. Исследуемый процесс можно представить формулой, аналогичной (9.19.2):

$$X(t) = \sum_{i=1}^{Y} W_i e^{-\alpha (t-\Theta_i)}, \tag{9.20}$$

где случайные величины Y, W_i, Θ_i взаимно независимы.

Обозначим $X_i(t) = W_i e^{-\lambda(t-\Theta_i)}$, тогда

$$M[X_i(t)] = m_w \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t}; \quad M[X_i^2(t)] = (D_w + m_w^2)\frac{1-e^{-2\alpha t}}{2\alpha t}.$$

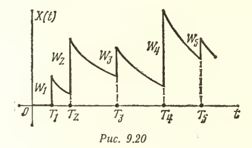


Рис. 9.20

Следовательно,

$$m_x(t) = \lambda m_w \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}; \quad D_x(t) = \lambda (D_w + m_w^2)\frac{1-e^{-2\alpha t}}{2\alpha}.$$

При $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} m_x(t) = m_x = \frac{\lambda m_w}{\alpha}; \quad \lim_{t\to\infty} D_x(t) = D_x = \frac{\lambda (D_w + m_w^2)}{2\alpha};$$

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}.$$

Рассмотрим предельное поведение процесса $X(t)$, когда неограниченно возрастают: интенсивность пуассоновского потока, порождающего импульсы ($\lambda \to \infty$); дисперсия амплитуды каждого импульса ($D_w \to \infty$) и параметр α ($\alpha \to \infty$). Неограниченное увеличение величины α означает, что напряжение импульса очень быстро падает, т. е. в пределе при $\alpha \to \infty$ площадь импульса будет стремиться к нулю. При этом скорость возрастания величин λ и D_w пропорциональна скорости возрастания величины α: $\lambda = k_1 \alpha$; $D_w = k_2 \alpha$. Получаем (при $t \to \infty$):

$$\lim_{\lambda,\,\alpha\to\infty} m_x = \lim_{\lambda,\,\alpha\to\infty} \frac{\lambda}{\alpha} m_w = k_1 m_w;$$

$$\lim_{\lambda,\,\alpha,\,D_w\to\infty} D_x = \lim_{\lambda,\,\alpha,\,D_w\to\infty} \frac{\lambda (D_w + m_w^2)}{2\alpha} \to \infty;$$

$$\lim_{\lambda,\,\alpha,\,D_w\to\infty} k_x(\tau) = \lim_{\lambda,\,\alpha,\,D_w\to\infty} \frac{k_1 k_2}{2} \alpha e^{-\alpha|\tau|} = k_1 k_2 \delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Таким образом, в пределе мы имеем белый шум, который получается в результате бесконечно частой последовательности импульсов, имеющих конечное математическое ожидание амплитуды импульса и бесконечную дисперсию этой амплитуды, а также бесконечно малую длительность самого импульса.

9.21. *Дробовой эффект.* Рассмотрим случайный процесс $X(t)$, порождаемый процессом Пуассона, как и в задаче 9.13. С появлением i-го события пуассоновского потока в момент T_i в электрической цепи возникает неотрицательный импульс напряжения W_i со случайным значением (амплитудой), которое в дальнейшем изменяется по одному и тому же закону $\varphi(\eta)$, где величина η отсчитывается от момента T_i (рис. 9.21) ($\varphi(0) \geqslant \varphi(\eta)$). Случайные величины W_i взаимно независимы и имеют одну и ту же функцию распределения $F(w)$. Напряжение в электрической цепи представляет собой суммарное воздействие всех импульсов с учетом их изменения во времени.

Рассматриваемый случайный процесс называется дробовым эффектом. Исследованные в задачах 9.19 и 9.20 случайные процессы являются частными случаями дробового эффекта. Требуется найти характеристики дробового эффекта.

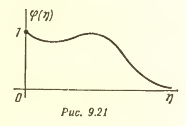


Рис. 9.21

Р е ш е н и е. В соответствии с решением задачи 9.20 дробовой эффект на участке $(0, t)$ можно представить аналогично (9.20) в виде

$$X(t) = \sum_{i=1}^{Y} W_i \varphi(t - \Theta_i), \tag{9.21}$$

где Y, W_i, Θ_i — взаимно независимые случайные величины, при этом, как и в задаче 9.20, случайная величина Y подчинена закону Пуассона с параметром λt, а случайная величина Θ_i распределена равномерно в интервале $(0, t)$.

Обозначим $X_i(t) = W_i \varphi(t - \Theta_i)$, тогда $\mathrm{M}[X_i(t)] = m_w t^{-1} \Phi(t)$, где $m_w = \mathrm{M}[W_i]$; $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(t - x)\,dx$ — площадь импульса (площадь, ограниченная кривой $\varphi(\eta)$ и осями координат);

$$\mathrm{M}[X_i^2(t)] = (D_w + m_w^2)\, t^{-1} \tilde{\Phi}(t),$$

где $D_w = D[W_i] = \int_0^t (w - m_w)^2\, dF(w)$; $\tilde{\Phi}(t) = \int_0^t [\varphi(t - x)]^2\, dx$.

Следовательно, $m_x(t) = \lambda\, m_w\, \Phi(t)$; $D_x(t) = \lambda\,(D_w + m_w^2)\,\tilde{\Phi}(t)$. При $t \to \infty$ и существовании несобственных интегралов

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \int_0^\infty \varphi(t-x)\,dx = \Phi; \quad \lim_{t\to\infty} \tilde{\Phi}(t) = \int_0^\infty \varphi^2(t-x)\,dx = \tilde{\Phi};$$

$$m_x = \lambda m_w \Phi; \; D_x = \lambda(D_w + m_w^2)\tilde{\Phi}.$$

Существование приведенных несобственных интегралов на практике всегда имеет место, так как площадь импульса с начальной амплитудой, равной единице, и площадь, определяемая квадратом соответствующей функции, на практике — конечные величины.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены при выводе формулы (9.19.8), получаем при $t' > t$, что $X(t') = X(t) \times \varphi(t' - t) + Y(t' - t)$. Следовательно,

$$K_x(t, t') = \begin{cases} D_x(t)\,\varphi(t'-t) & \text{при } t' > t; \\ D_x(t')\,\varphi(t-t') & \text{при } t > t'. \end{cases}$$

Объединяя эти оба выражения, находим

$$K_x(t,\; t') = D_x(\min(t,\; t'))\,\varphi(|t' - t|).$$

При $t,\; t' \to \infty$ получим $k_x(\tau) = D_x\,\varphi(|\tau|)$ $(\tau = t' - t)$. Таким образом, мы видим, что при $t, t' \to \infty$ дробовой эффект представляет собой стационарный случайный процесс.

Рассмотрим предельный случай, когда интенсивность потока импульсов λ бесконечно возрастает, дисперсия импульса D_w тоже бесконечно возрастает, а площадь импульса с единичной амплитудой Φ стремится к нулю, так что величина $\tilde{\Phi}$ тоже стремится к нулю. При этом выполняются условия:

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \Phi\to 0}} \lambda m_w \Phi = m; \quad \lim_{\substack{\lambda,\, D_w\to\infty \\ \Phi\to 0}} \lambda(D_w + m_w^2)\tilde{\Phi} = D.$$

В этом случае дробовой эффект переходит в белый шум с характеристиками $m_x = m$; $k_x(\tau) = D\,\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

9.22. *Импульсный дробовой эффект*. Рассматривается дробовой эффект, порождаемый импульсами, имеющими прямоугольную форму; при этом амплитуда W_i и длительность $\varkappa_i$ импульса, поступающего в момент T_i — независимые случайные величины с характеристиками m_w; D_w; $m_\varkappa$ и $D_\varkappa$ соответственно (рис. 9.22). Найти математическое ожидание и дисперсию такого случайного процесса $X(t)$.

Решение. Рассматриваемый импульсный дробовой эффект на участке $(0,\; t)$ можно представить в виде

$$X(t) = \sum_{i=1}^{Y} W_i\,\varphi(t,\, \Theta_i,\, \varkappa_i) = \sum_{i=1}^{Y} X_i(t),$$

где $\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)$ — импульс, начало которого приходится на момент времени Θ_i, высота равна единице, а длительность $\varkappa_i$ (случайные величины Θ_i и $\varkappa_i$ — независимы): $\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i) = 1(t - \Theta_i)\,1(\Theta_i + \varkappa_i - t)$. Случайная величина Θ_i распределена равномерно внутри интервала $(0, t)$.

Найдем $M[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)]$. Введем гипотезу, состоящую в том, что случайная величина $\varkappa_i$ приняла значение $\varkappa$. В предположении, что эта гипотеза имела место, найдем условное математическое ожидание при достаточно больших значениях t:

$$M_\varkappa[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa)] = \frac{1}{t}\int_0^t 1(t-y)\,1(y+\varkappa-t)\,dy.$$

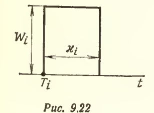


Рис. 9.22

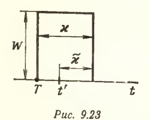


Рис. 9.23

Подынтегральная функция представляет собой прямоугольный импульс с высотой, равной единице, и длительностью, равной $\varkappa$, а интеграл от этой функции будет равен площади этого импульса. Следовательно,

$$M_\varkappa[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa)] = \varkappa/t,$$

откуда

$$M[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)] = M[\varkappa_i/t] = m_\varkappa/t.$$

Аналогично

$$M_\varkappa[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)^2] = \frac{1}{t}\int_0^t [1(t-y)\,1(y+\varkappa-t)]^2\,dy = \frac{\varkappa}{t};$$

$$M[\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)^2] = \frac{m_\varkappa}{t}.$$

Следовательно,

$$M[X_i(t)] = M[W_i\,\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i)] = m_w m_\varkappa/t; \quad M[X_i^2(t)] =$$
$$= M[(W_i\varphi(t, \Theta_i, \varkappa_i))^2] = (D_w + m_w^2)\,m_\varkappa/t; \;\; M[X(t)] = m_x =$$
$$= M[Y]\,M[X_i(t)] = \lambda t m_w m_\varkappa/t = \lambda m_w m_\varkappa; \qquad (4.22.1)$$
$$D[X(t)] = D_x = M[Y]\,M[X_i^2(t)] = \lambda(D_w + m_w^2)\,m_\varkappa. \quad (4.22.2)$$

В пределе при неограниченном увеличении интенсивности простейшего потока λ, дисперсии амплитуды импульса D_w, неограниченном уменьшении математического ожидания $m_\varkappa$ и дисперсии $D_\varkappa$ длительности импульса и сохранении постоянной величины $D_\varkappa = \lambda(D_w +$

$+m_w^2)m_\varkappa = \text{const}$ импульсный дробовой эффект превращается в белый шум с характеристиками m_x; $k_x(\tau) = D_x \delta(\tau)$.

9.23. *Процесс изменения количества однородных элементов.* Рассматривается процесс $X(t)$ — число функционирующих однородных элементов в момент времени t. При этом предполагается, что каждый элемент функционирует некоторое случайное время $\varkappa$, распределенное по показательному закону с параметром μ, одинаковому для всех элементов, после чего выходит из строя («погибает»). Начало функционирования (начало «жизни») каждого элемента является случайным и определяется простейшим потоком с интенсивностью λ. Например, $X(t)$ — число находящихся в эксплуатации ЭВМ, интенсивность λ — число производимых в единицу времени ЭВМ, $\varkappa$ — случайное время эксплуатации одной ЭВМ (среднее время эксплуатации ЭВМ равно $1/\mu$). Требуется найти характеристики случайного процесса $X(t)$.

Решение. Случайный процесс $X(t)$ представляет собой импульсный дробовой эффект, рассмотренный в предыдущей задаче, с той лишь разницей, что $W_i = 1$ для любых значений i ($m_w = 1$; $D_w = 0$), а случайная величина $\varkappa$ распределена по показательному закону с параметром μ. Следовательно, при достаточно больших t [см. формулы (4.22.1), (4.22.2)] $M[X(t)] = \lambda m_w m_\varkappa = \lambda/\mu$; $D[X(t)] = \lambda(D_w + m_m^2) m_w = \lambda\mu$.

Можно доказать, что одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ является законом Пуассона с найденными характеристиками.

При определении корреляционной функции рассматриваемого случайного процесса $X(t)$ используем свойство случайной величины $\varkappa$ — длительности импульса, распределенной по показательному закону, состоящее в том, что «остаток» времени длительности импульса $\tilde{\varkappa}$ (рис. 9.23), отсчитываемый не от его начала T, а от некоторого момента t_1 $(T < t_1 < T + \varkappa)$, будет также распределен по показательному закону с параметром μ (см. задачу 5.35).

Введем гипотезу, состоящую в том, что случайный процесс $X(t) = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Вероятность этой гипотезы обозначим $P_n(t) = P(X(t) = n)$. В предположении, что эта гипотеза имела место, запишем выражение для случайной функции $X_n(t')$ $(t' > t)$:

$$X_n(t') = \sum_{i=0}^{n} V_i + Y(t'-t),$$

где V_i — случайная величина, имеющая ряд распределения

$$V_i: \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 - e^{-\mu(t'-t)} & e^{-\mu(t'-t)} \end{array} \right| \quad (i \neq 0);$$

$V_0 = 0$; $Y(t'-t)$ — случайный процесс, порождаемый событиями, наступившими в пуассоновском потоке в интервале времени (t, t'). Величина $\sum_{i=0}^{n} V_i$ — есть число элементов, сохранившихся на момент времени t', если в момент времени t их было n.

Найдем условное математическое ожидание произведения $X(t) \times X(t')$ при условии, что $X(t) = n$:

$$M[nX_n(t')] = nM[X_n(t')] = nM\left[\sum_{i=1}^{n} V_i + Y(t - t')\right] =$$

$$= n\{ne^{-\mu(t'-t)} + M[Y(t'-t)]\} = n^2 e^{-\mu(t'-t)} + n\lambda m_\varkappa,$$

где $m_\varkappa = 1/\mu$. Следовательно, безусловное математическое ожидание произведения $X(t)\, X(t')$ будет

$$M[X(t)\, X(t')] = \sum_{n=0}^{\infty} M[nX_n(t')]\, P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\mu(t'-t)} P_n(t) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} n\lambda m_\varkappa P_n(t) = M[X^2(t)]\, e^{-\mu(t'-t)} + m_x^2.$$

Отсюда

$$K_x(t, t') = D_x e^{-\mu(t'-t)} \text{ при } t' > t$$

или

$$K_x(t, t') = D_x e^{-\mu(t-t')} \text{ при } t > t'.$$

Объединяя эти две формулы, получаем ($\tau = t' - t$)

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\mu|\tau|} = \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu|\tau|}.$$

При $\lambda/\mu > 20$ процесс накопления однородных элементов можно считать практически нормальным с характеристиками $m_x = \lambda/\mu$ и $k_x(\tau) = \lambda\, \mu^{-1} e^{-\mu|\tau|}$.

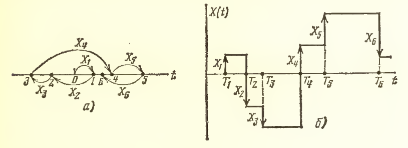


Рис. 9.24

9.24. *Одномерное случайное блуждание частицы.* Рассмотрим на оси Ox частицу, которая скачками меняет свое положение (блуждает) под действием случайных соударений с другими частицами (рис. 9.24. *а*). В начальный момент частица находится в начале координат, в момент T_1 первого соударения она перескакивает в точку X_1, в момент T_2 второго соударения она скачком изменяет свою абсциссу на величину X_2, в момент T_3 — на величину X_3 и т. д. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_i \ldots$ независимы и имеют одно и то же распределение

с $m_x = 0$ и $D_x = D$. Моменты соударений $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots$ образуют простейший поток событий с интенсивностью λ.

Рассматривается случайный процесс $X(t)$ — абсцисса блуждающей точки в функции времени (рис. 9.24, *б*). (Значения $X(t)$ могут быть как положительными, так и отрицательными.) Процесс $X(t)$ представляет собой упрощенную модель броуновского движения частицы. Найти характеристики случайного процесса $X(t)$.

Р е ш е н и е. Число событий на участке $(0, t)$ представляет собой случайную величину Y, распределенную по закону Пуассона с параметром λt. Значение процесса $X(t)$ в момент времени t определяется формулой $X(t) = \sum_{i=1}^{Y} X_i$, т. е. представляет собой сумму случайного числа случайных слагаемых; при этом все случайные величины X_i и Y независимы. Так же как в задаче 9.20, имеем

$$m_x(t) = \mathrm{M}[Y]\,\mathrm{M}[X_i] = 0, \text{ так как } \mathrm{M}[Y] = \lambda t;\ \mathrm{M}[X_i] = m_x = 0;$$

$$D_x(t) = \mathrm{M}[Y]\,D[X_i] + D[Y]\,\mathrm{M}[X_i]^2 = \lambda t D, \text{ так как } D[X_i] = D.$$

Аналогично решению, приведенному в задаче 9.20, при достаточно большом t сечение случайной функции $X(t)$ будет подчинено практически нормальному закону с найденными параметрами.

Найдем корреляционную функцию процесса $X(t)$, для чего рассмотрим два его сечения: $X(t)$ и $X(t')$ $(t' > t)$. Очевидно, что $X(t') = X(t) + Y(t' - t)$, здесь как и в задаче 9.20, случайный процесс $Y(t' - t) = \sum_{i=1}^{Z} X_i$, где Z — число событий, наступавших в потоке на интервале времени $t' - t$. Выше было показано, что случайные процессы $X(t)$, $X(t')$ и $Y(t - t')$ имеют нулевое математическое ожидание. Следовательно, при $t' > t$

$$K_x(t, t') = \mathrm{M}[X(t)\,X(t')] = \mathrm{M}[X(t)\{X(t) + Y(t' - t)\}] =$$
$$= \mathrm{M}[X^2(t)] + \mathrm{M}[X(t)\,Y(t' - t)] = D_x(t) + \mathrm{M}[X(t)]\,\mathrm{M}[Y(t' - t)] = D_x(t).$$

При $t' < t$ получим $K_x(t, t') = D_x(t')$. Таким образом,

$$K_x(t, t') = D\lambda \min(t, t').$$

Рассмотренный случайный процесс $X(t)$ является процессом с независимыми приращениями.

П р и м е ч а н и е. Процесс одномерного случайного блуждания частицы имеет те же характеристики, что и процесс $Y(t) = X(t) - \lambda t$, где $X(t)$ — процесс Пуассона, несмотря на то, что их реализации значительно отличаются (сравните рис. 9.13, *д* и рис. 9.24, *б*).

9.25. *Винеровский процесс*. Рассматривается предельное поведение случайного процесса $X(t)$ — одномерного случайного блуждания частицы (см. задачу 9.24) при неограниченном увеличении интенсивности λ потока соударений и одновременном неограниченном уменьшении дисперсии D перемещения частицы; при этом соблюдается условие $\lambda D = \alpha = \mathrm{const}$. Показать, что в этом предельном случае на достаточ-

но удаленных от начала участках времени процесс является винеровским.

Решение. Условие $m_x(t) = 0$ вытекает из условий предыдущей задачи; независимость приращений и нормальность процесса при $t \to \infty$ показаны там же.

$$D[X(t_1) - X(t_2)] = M[(X(t_1) - X(t_2))^2], \quad \text{так как} \quad m_x = 0;$$

$$M[(X(t_1) - X(t_2))^2] = M[X^2(t_1) + X^2(t_2) - 2X(t_1)X(t_2)] =$$

$$= D[X(t_1)] + D[X(t_2)] - 2K_x(t, t_2).$$

В предыдущей задаче было показано, что $D[X(t)] = \lambda Dt$; $K_x(t_1, t_2) = \lambda D \min\{t_1, t_2\}$. Отсюда при $t_2 > t_1$

$$D[X(t_1) - X(t_2)] = \lambda Dt_1 + \lambda Dt_2 - 2\lambda D \min\{t_1, t_2\} =$$

$$= \lambda Dt_1 + \lambda Dt_2 - 2\lambda Dt_1 = \alpha(t_2 - t_1),$$

откуда следует, что процесс является винеровским.

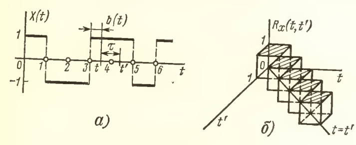


Рис. 9.26

9.26. Случайная функция $X(t)$ строится следующим образом. В точке $t = 0$ она случайным образом и с одинаковой вероятностью 1/2 принимает одно из значений $+1$ или -1 и остается постоянной до $t = 1$. В точке $t = 1$ она снова, с одинаковой вероятностью 1/2 и независимо от того, какое значение она имела на предыдущем участке, принимает одно из значений $+1$ или -1 и сохраняет его до следующей целочисленной точки $t = 2$, и так далее. Вообще, функция $X(t)$ постоянна на любом участке от n до $n + 1$, где n — натуральное число, а на границе каждого нового участка независимо от предыдущих принимает одно из значений $+1$ или -1 с вероятностью 1/2 (одна из возможных реализаций случайной функции $X(t)$ показана на рис. 9.26, *а*). Найти характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию. Определить, является ли случайная функция $X(t)$ стационарной.

Решение. $m_x(t) = m_x = (-1)\frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$; $D_x(t) =$

$$= D_x = (-1)^2 \frac{1}{2} + 1^2 \frac{1}{2} = 1.$$

Найдем корреляционную функцию $K_x(t, t')$. Если точки t и t' относятся к одному и тому же интервалу $(n, n+1)$, где n — целое, то $K_x(t, t') = D_x = 1$, в противном случае $K_x(t, t') = 0$. Этот результат можно записать в более компактной форме, если обозначить через $b(t)$ целую часть числа t (см. рис. 9.26, *а*). Тогда получаем ($\tau = t' - t$)

$$K_x(t, t') = \begin{cases} 1 \text{ при } |\tau| < 1 - b(\min\{t, t'\}); \\ 0 \text{ при } |\tau| > 1 - b(\min\{t, t'\}), \text{ где } \tau = t' - t. \end{cases}$$

Эта функция зависит не только от $\tau = t' - t$, но также и от того, где на оси $0t$ находится участок (t, t'); следовательно, случайная функция $X(t)$ стационарной не является.

Поверхность $K_x(t, t')$ выглядит как ряд кубов с ребром, равным единице, поставленных на плоскости $t0t'$ вдоль биссектрисы первого координатного угла, на которой $t = t'$, так что диагонали оснований совпадают с биссектрисой (рис. 9.26, *б*).

9.27. Случайная функция $X(t)$ формируется так же, как и в предыдущей задаче, с той разницей, что точки, в которых происходит «розыгрыш» нового значения случайной функции, не закреплены на оси $0t$, а занимают на ней случайное положение, сохраняя между собой постоянное расстояние, равное единице (рис. 9.27, *а*). Все положения начала отсчета относительно последовательности моментов «розыгрыша» одинаково вероятны. Найти характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию; определить, является ли случайная функция $X(t)$ стационарной.

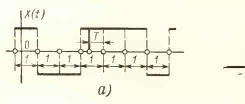


Рис. 9.27

Р е ш е н и е. Как и в предыдущем случае, $m_x(t) = m_x = 0$; $D_x(t) = D_x = 1$.

Найдем корреляционную функцию. Зафиксируем момент t (рис. 9.27, *а*). Этот момент случаен относительно точек, в которых случайная функция $X(t)$ принимает новые значения. Обозначим T промежуток времени, отделяющий точку t от ближайшей точки, в которой будет «разыгрываться» новое значение $X(t)$. Случайная величина T будет распределена равномерно на участке от 0 до 1. Пусть $t' > t$; $\tau = t' - t > 0$. Если $\tau < T$, то $K_x(t, t') = 1$, если $\tau > T$, то $K_x(t, t') = 0$. Поэтому при $0 < \tau < 1$

$$K_x(t, t') = \mathrm{P}(T > \tau) \cdot 1 + \mathrm{P}(T < \tau) \cdot 0 = \mathrm{P}(T > \tau) = 1 - \tau.$$

Аналогично при $\tau < 0$

$$K_x(t, t') = 1 + \tau \quad \text{при} -1 < \tau < 0.$$

Отсюда

$$K_x(t, t') = k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & \text{при } |\tau| < 1; \\ 0 & \text{при } |\tau| > 1. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 9.27, *б*. Так как $K_x(t,t') = k_x(\tau)$, то случайная функция $X(t)$ стационарна.

Корреляционную функцию (9.27) можно записать в более компактном виде с помощью единичной функции $\mathbf{1}(x)$:

$$k_x(\tau) = (1 - |\tau|)\,\mathbf{1}\,(1 - |\tau|).$$

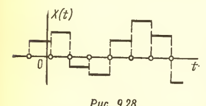


Рис. 9.28

9.28. Условия предыдущей задачи 9.27 изменены в том отношении, что в каждый из случайных моментов T_i, разделенных единичными интервалами, случайная функция $X(t)$ принимает (независимо от других) значение U_i, являющееся случайной величиной с математическим ожиданием m_u и дисперсией D_u, и сохраняет его до следующей точки. Одна из реализаций такой случайной функции показана на рис. 9.28. Найти характеристики этой случайной функции: математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию; определить, является ли случайная функция стационарной, а если стационарна, то какова ее спектральная плотность.

Решение. Рассуждая точно так же, как и в предыдущей задаче, находим

$$m_x(t) = \mathrm{M}[X(t)] = m_u; \quad D_x(t) = \mathrm{D}[X(t)] = D_u;$$

$$k_x(\tau) = \left.\begin{cases} D_u(1 - |\tau|) & \text{при } |\tau| < 1 \\ 0 & \text{при } |\tau| > 1 \end{cases}\right\} = D_u(1 - |\tau|)\,\mathbf{1}\,(1 - |\tau|).$$

Случайная функция $X(t)$ стационарна. Ее спектральная плотность $S_x^*(\omega) = D_u(1 - \cos\omega)/(\pi\omega^2)$.

9.29. Случайная функция $X(t)$ представляет собой ступенчатую знакопеременную функцию (рис. 9.29, *а*), которая через единичные интервалы принимает попеременно значения: $+1$ и -1. Положение ступенчатой функции относительно начала отсчета случайно; случайная величина T, характеризующая сдвиг первой точки перемены знака относительно начала координат, есть случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0;1). Найти характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

Решение. Рассмотрим сечение случайной функции $X(t)$; оно с равной вероятностью может попасть как на участок, где случайная функция равна $+1$, так и на участок, где она равна -1. Следовательно, ряд распределения любого сечения имеет вид

$$X(t): \left| \begin{array}{c|c} -1 & +1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right|,$$

откуда $m_x = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$; $D_x = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1)^2 \frac{1}{2} = 1$.

Найдем корреляционную функцию ($\tau = t' - t$; $t' > t$):

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau)] = M[X(t)X(t+\tau)].$$

Так как произведение $X(t)X(t+\tau)$ может принимать только два значения ($+1$ или -1), то $M[X(t)X(t+\tau)] = 1p_1 + (-1) \times \times (1 - p_1) = 2p_1 - 1$, где p_1 — вероятность того, что точки t и $t+\tau$ попадут на участки, в которых $X(t)$ и $X(t+\tau)$ имеют один и тот же знак.

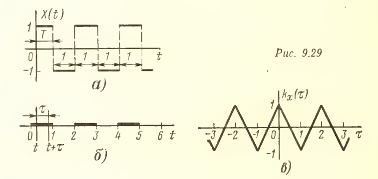


Рис. 9.29

В силу равномерности распределения сдвига T на рис. 9.29, *а* мы можем перенести начало отсчета в левый конец того участка, на котором находится точка t, и считать, что точка t равномерно распределена в интервале (0; 1) (рис. 9.29, *б*). При таком толковании p_1 есть вероятность того, что точка $(t+\tau)$ попадает в какой-либо из интервалов вида $(2n, 2n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ (эти интервалы отмечены жирными линиями на рис. 9.29, *б*); подсчитаем эту вероятность для разных значений τ.

При $0 < \tau < 1$ точка $(t+\tau)$ может попасть либо в интервал (0, 1), либо в интервал (1; 2), поэтому

$$p_1 = P\{t + \tau < 1\} = P\{t < 1 - \tau\} = 1 - \tau.$$

При $1 < \tau < 2$ точка $t + \tau$ может попасть либо в интервал (1; 2), либо в интервал (2; 3), поэтому

$$p_1 = P\{t + \tau > 2\} = P\{t > 2 - \tau\} = 1 - (2 - \tau) = \tau - 1.$$

Продолжая эти рассуждения, получаем

$$p_1 = \begin{cases} 1 - (\tau - 2n) & \text{при } 2n < \tau < 2n + 1; \\ (\tau - 2n) - 1 & \text{при } 2n + 1 < \tau < 2n + 2. \end{cases}$$

Отсюда видно, что p_1, а значит, и $K_x(t, t+\tau) = 2p_1 - 1$, зависит только от τ и является четной функцией τ. Следовательно,

$$K_x(t, t+\tau) = k_x(\tau) = \begin{cases} 4n + 1 - 2\tau & \text{при } 2n < \tau < 2n+1; \\ 2\tau - (4n+3) & \text{при } 2n+1 < \tau < 2n+2. \end{cases}$$

График корреляционной функции представлен на рис. 9.29, *в*.

9.30. Случайная функция $X(t)$ представляет собой последовательность равноотстоящих положительных импульсов напряжения, имеющих одинаковую ширину $\gamma < 1/2$. Начало каждого импульса отделено от начала каждого следующего единичным интервалом (рис. 9.30, *а*). Последовательность импульсов занимает относительно оси Ot слу-

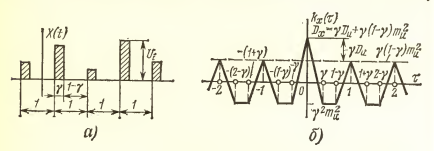


Рис. 9.30

чайное положение (см. условия предыдущей задачи). Напряжение i-го импульса U_i случайно ($i = 1, 2, \ldots$). Все случайные величины U_i распределены по одному и тому же закону с математическим ожиданием m_u и дисперсией D_u и независимы. Найти характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

Решение. По формуле полного математического ожидания $m_x = m_u\gamma + 0(1-\gamma) = m_u\gamma$. Дисперсию найдем через второй начальный момент: $\alpha_2[X(t)] = \alpha_2[U_i]\gamma + 0(1-\gamma) = (D_u + m_u^2)\gamma$, откуда

$$D_x = \alpha_2[X(t)] - m_x^2 = (D_u + m_u^2)\gamma - m_u^2\gamma = \gamma D_u + \gamma(1-\gamma)m_u^2.$$

В данном случае случайная функция $X(t)$ не центрирована. Ее корреляционную функцию будем искать через второй смешанный начальный момент:

$$K_x(t, t+\tau) = M[X(t)X(t+\tau)] - m_x^2.$$

Найдем $M[X(t)X(t+\tau)]$. Будем его вычислять по формуле полного математического ожидания. Как и в предыдущей задаче, представим ось Ot покрытой перемежающимися участками: зачерненные соответствуют импульсам, а светлые — промежуткам между ними. Обозначим T случайное значение левой границы участка $(T, T+\tau)$. Возможны три гипотезы:

H_1 — обе точки T и $T+\tau$ попали на участок одного и того же импульса;

H_2 — одна из точек T, $T+\tau$ попала на участок одного из импульсов, а другая — другого;

H_3 — хотя бы одна из точек $T, T+\tau$ попала вне участков каких-либо импульсов.

При первой гипотезе величины $X(T)$ и $X(T+\tau)$ совпадают и $M[X(T)X(T+\tau)] = M[U^2] = D_u + m_u^2$. При второй гипотезе величины $X(T)$ и $X(T+\tau)$ представляют собой независимые случайные величины с одинаковыми математическими ожиданиями m_u; по теореме умножения математических ожиданий $M[X(T)X(T+\tau)] = m_u^2$. При третьей гипотезе $M[X(T)X(T+\tau)] = 0$. Полное математическое ожидание

$$M[X(t)X(t+\tau)] = P\{H_1\}(D_u + m_u^2) + P\{H_2\}m_u^2.$$

Вероятности $P\{H_1\}$ и $P\{H_2\}$, а значит, и корреляционная функция зависят только от τ:

1) при $0<\tau<\gamma$

$$P\{H_1\} = \gamma - \tau; \quad P\{H_2\} = 0; \quad M[X(t)X(t+\tau)] = (\gamma-\tau)\times \times(D_u + m_u^2);$$

$$k_x(\tau) = (\gamma-\tau)(D_u+m_u^2) - \gamma^2 m_u^2;$$

2) при $\gamma<\tau<1-\gamma$

$$P\{H_1\} = 0; \quad P\{H_2\} = 0; \quad M[X(t)X(t+\tau)] = 0;$$

$$k_x(\tau) = 0 - \gamma^2 m_u^2 = -\gamma^2 m_u^2;$$

3) при $1-\gamma<\tau<1$

$$P\{H_1\} = 0; \quad P\{H_2\} = \gamma - (1-\tau); \quad M[X(t)X(t+\tau)] = [\gamma - (1-\tau)]m_u^2; \quad k_x(\tau) = (\gamma - 1 + \tau - \gamma^2)m_u^2.$$

Дальнейшие интервалы значений τ исследуются аналогично.

График функции $k_x(\tau)$ представлен на рис. 9.30, *б*. При $|\tau| > 1/2$ кривая $k_x(\tau)$ периодически повторяется, достигая в целых точках местных максимумов, равных $\gamma(1-\gamma)m_u^2$.

9.31*. Рассматривается стационарная случайная функция $X(t)$, представляющая собой пилообразное напряжение (рис. 9.31, *а*). Начало отсчета занимает по отношению к зубцам случайное положение, как в задаче 9.29. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайной функции $X(t)$.

Р е ш е н и е. Математическое ожидание m_x легко найти, если учесть, что распределение $X(t)$ при любом t — равномерное на интервале (0;1), отсюда $m_x = 1/2$.

Для отыскания корреляционной функции поступим следующим образом: свяжем последовательность зубцов жестко с осью $0t$, но зато будем случайным образом бросать на эту ось начало t отрезка $(t, t+\tau)$ (рис. 9.31, *б*). Так как зубцы периодичны, достаточно случайным образом бросать точку t на первый интервал (0; 1), распределяя ее с посто-

янной плотностью. При этом, как видно из рис. 9.31, *б*, $X(t) = t$, а значение $X(t+\tau)$ равно дробной части числа $t+\tau$, т. е. $X(t+\tau) = t+\tau-E(t+\tau)$, где $E(t+\tau)$ — целая часть числа $(t+\tau)$.

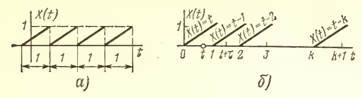


Рис. 9.31

Если целая часть числа τ равна n $(n \leqslant \tau < n+1)$, то

$$E(t+\tau) = \begin{cases} n & \text{при } t+\tau < n+1; \\ n+1 & \text{при } t+\tau \geqslant n+1. \end{cases}$$

и, значит,

$$X(t+\tau) = \begin{cases} t+\tau-n & \text{при } t < n+1-\tau; \\ t+\tau-(n+1) & \text{при } t \geqslant n+1-\tau. \end{cases}$$

По формуле для математического ожидания функции от случайной величины t имеем при $n \leqslant \tau < n+1$

$$M[X(t)\,X(t+\tau)] = \int_0^1 X(t)\,X(t+\tau)\cdot 1\cdot dt = \int_0^{n+1-\tau} t\,(t+\tau-n)\,dt + \int_{n+1-\tau}^{1} t\,(t+\tau-n-1)\,dt = \frac{1}{2}(n+1-\tau)^2 + \frac{1}{2}(\tau-n) - \frac{1}{6} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда следует, что корреляционная функция зависит только от τ и при $n \leqslant \tau \leqslant n+1$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$ имеет вид

$$K_x(t, t') = k_x(\tau) = M[X(t)\,X(t+\tau)] - m_x = 0{,}5\,(n+1-\tau)^2 + (\tau-n)/2 - 5/12.$$

Это периодическая функция с периодом 1, график которой состоит из периодически повторяющихся отрезков парабол, обращенных выпуклостью вниз. В интервале $0 \leqslant \tau < 1$ эта парабола имеет вид $k_x(\tau) = (1-\tau)^2/2 + \tau/2 - 5/12$ с вершиной в точке $(1/2; -1/24)$. Полагая $\tau = 0$, получаем $D_x = k_x(0) = 1/12$.

9.32. Рассматривается линейное преобразование n случайных процессов $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ вида

$$Y(t) = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\,X_i(t),$$

где $\varphi_j(t)$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$) — неслучайные функции времени.

Известны характеристики случайных процессов $X_i(t)$: $m_i(t)$, $D_i(t)$, $K_i(t, t')$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), а также взаимные корреляционные функции $R_{ij}(t, t') = \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}_i(t)\overset{\circ}{X}_j(t')]$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$). Найти характеристики случайного процесса $Y(t)$.

Решение.
$$m_y(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\, m_i(t);$$

$$K_y(t, t') = \mathrm{M}\left[\overset{\circ}{Y}(t)\overset{\circ}{Y}(t')\right] = \mathrm{M}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\overset{\circ}{X}_i(t) \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t')\overset{\circ}{X}_j(t')\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\varphi_i(t') K_i(t, t') + \sum_{i \neq j} \varphi_i(t)\varphi_j(t') R_{ij}(t, t') +$$

$$+ \sum_{i \neq j} \varphi_i(t')\varphi_j(t) R_{ij}(t', t);$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(t) D_i(t) + 2\sum_{i \neq j} \varphi_i(t)\varphi_j(t) R_{ij}(t, t).$$

Если случайные процессы $X_i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) некоррелированны ($R_{ij}(t, t') \equiv 0$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$), то

$$K_y(t, t') = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\varphi_j(t') K_i(t, t');$$

$$D_y = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(t) D_i(t).$$

9.33. Имеются две некоррелированные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ с характеристиками

$$m_x(t) = t^2; \quad K_x(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')};$$
$$m_y(t) = 1; \quad K_y(t, t') = e^{\alpha_2(t-t')^2}.$$

Найти характеристики случайной функции $Z(t) = X(t) + tY(t) + t^2$. Решить ту же задачу, если случайные функции $X(t)$, $Y(t)$ коррелированны и их взаимная корреляционная функция $R_{xy}(t, t') = a e^{-\alpha|t-t'|}$.

Решение. В случае, если $R_{xy}(t, t') \equiv 0$,

$$m_z = m_x(t) + t m_y(t) + t^2 = 2t^2 + t;$$

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + tt' K_y(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')} + tt' e^{\alpha_2(t-t')^2}.$$

В случае, когда $R_{xy}(t, t) = a\exp(-\alpha|t - t'|)$, $m_z(t)$ не меняется;

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + tt' K_y(t, t') + t' R_{xy}(t, t') + t R_{xy}(t', t) =$$
$$= e^{\alpha_1(t+t')} + tt' e^{\alpha_2(t-t')^2} + a(t + t') e^{-\alpha|t-t'|}.$$

9.34. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию суммы двух некоррелированных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ с характеристиками

$$m_x(t) = t;\ K_x(t, t') = tt';$$

$$m_y(t) = -t;\quad K_y(t, t') = tt' e^{\alpha(t+t')}.$$

Ответ. $$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) = 0;\quad K_z(t, t') =$$

$$= K_x(t, t') + K_y(t, t') = tt'[1 + e^{\alpha(t+t')}].$$

9.35. Имеется комплексная случайная функция $Z(t) = X(t) + iY(t)$, где i — мнимая единица; $X(t)$, $Y(t)$ — некоррелированные случайные функции с характеристиками

$$m_x(t) = t^2;\quad K_x(t, t') = e^{-\alpha_1(t-t')^2};$$

$$m_y(t) = 1;\quad K_y(t, t') = e^{2\alpha_2(t+t')}.$$

Найти характеристики случайной функции $Z(t)$:$m_z(t)$; $K_z(t, t')$ и $D_z(t)$.

Ответ. $m_z(t) = t^2 + i$; $K_z(t, t') = e^{-\alpha_1(t-t')^2} + e^{-2\alpha_2(t+t')}$;

$$D_z(t) = K_z(t, t) = 1 + e^{4\alpha_2 t}.$$

9.36. Комплексная случайная функция $Z(t)$ задана в виде $Z(t) = X(t) + i\,Y(t)$, где

$$X(t) = \sum_{k=1}^{3}(a_k + V_k)e^{-\alpha_k t};\quad Y(t) = \sum_{k=1}^{3}(b_k + U_k)e^{-\beta_k t}.$$

Математические ожидания всех случайных величин V_k и U_k ($k = 1, 2, 3$) равны нулю, а корреляционная матрица системы случайных величин $(V_1, V_2, V_3, U_1, U_2, U_3)$ имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 3 & 0 & 0 & 3 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 3 \end{matrix}\right\|.$$

Найти характеристики случайной функции $Z(t)$.

Ответ. $$m_z(t) = \sum_{k=1}^{3} a_k e^{-\alpha_k t} + i\sum_{k=1}^{3} b_k e^{-\beta_k t};$$

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + i\,[R_{xy}(t', t) - R_{xy}(t, t')],$$

где $$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^{3} k e^{-\alpha_k(t+t')};$$

$$K_y(t, t') = \sum_{k=1}^{3} k e^{-\beta_k(t+t')};\quad R_{xy}(t', t) = e^{-\alpha_1 t' - \beta_1 t} - e^{-\alpha_2 t' - \beta_2 t} +$$

$$+ 3e^{-\alpha_3 t' - \beta_3 t};\quad R_{xy}(t, t') = e^{-\alpha_1 t - \beta_1 t'} - e^{-\alpha_2 t - \beta_2 t'} + 3e^{-\alpha_3 t - \beta_3 t'}.$$

9.37. *Корреляционная функция произведения.* Рассматриваются две некоррелированные центрированные случайные функции $X(t)$, $Y(t)$ и их произведение $Z(t) = X(t)\,Y(t)$.

Доказать, что корреляционная функция произведения равна произведению корреляционных функций сомножителей: $K_z(t, t') = K_x(t, t')\,K_y(t, t')$.

Решение. $K_z(t,t') = M[\overset{\circ}{Z}(t)\,\overset{\circ}{Z}(t')]$; $\overset{\circ}{Z}(t) = Z(t) - m_z(t)$. Так как случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированны и центрированны, то $m_z(t) = m_x(t)\,m_y(t) = 0$; отсюда

$$\overset{\circ}{Z}(t) = \overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{Y}(t) = X(t)\,Y(t);$$

$$K_z(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{Y}(t)\,\overset{\circ}{X}(t')\,\overset{\circ}{Y}(t')] =$$

$$= M[\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t')]\,M[\overset{\circ}{Y}(t)\,\overset{\circ}{Y}(t')] = K_x(t,t')\,K_y(t,t').$$

В частности, при $t = t'$

$$D_z(t) = D_x(t)\,D_y(t).$$

9.38. Доказать, что корреляционная функция произведения независимых центрированных случайных функций $Z(t) = \prod_{i=1}^{n} X_i(t)$ равна произведению корреляционных функций сомножителей:

$$K_z(t, t') = \prod_{i=1}^{n} K_{x_i}(t, t').$$

Решение. Доказательство аналогично предыдущему, с той разницей, что для применения теоремы умножения математических ожиданий в этом случае недостаточно некоррелированности сомножителей, а независимости — достаточно.

9.39. Случайная функция $X(t)$ с характеристиками $m_x(t) = 0$, $K_x(t, t')$ подвергается линейному неоднородному преобразованию:

$$Y(t) = L_t^{(0)}\{X(t)\} + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — неслучайная функция. Найти взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t, t')$.

Решение. Имеем $\overset{\circ}{X}(t) = X(t)$; $\overset{\circ}{Y}(t) = L_t^{(0)}\{X(t)\} = L_t^{(0)}\{\overset{\circ}{X}(t)\}$, так как при центрировании случайной функции $Y(t)$ не случайное слагаемое $\varphi(t)$ «уничтожается»; отсюда

$$R_{xy}(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{Y}(t')] = M[\overset{\circ}{X}(t)\,L_{t'}^{(0)}\{\overset{\circ}{X}(t')\}] =$$

$$= L_{t'}^{(0)}\{M[\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t')]\} = L_{t'}^{(0)}\{K_x(t, t')\}.$$

9.40. *Характеристики производной случайного процесса.* Имеется случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t, t')$. Найти характеристики $m_y(t)$, $K_y(t, t')$ и $D_y(t)$ ее производной $Y(t) = dX(t)/dt$. Найти также взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t, t')$.

Решение. Случайная функция $Y(t)$ связана с $X(t)$ линейным однородным преобразованием. Применяя общие правила (9.0.7), (9.0.8), (9.0.9), получаем:

$$m_y(t)=\frac{dm_x(t)}{dt}; \quad K_y(t, t')=\frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}; \quad D_y(t)=[K_y(t, t')]_{t=t'}=$$

$$=\left[\frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}\right]_{t=t'}; \quad R_{xy}(t, t')=\mathrm{M}[\mathring{X}(t)\mathring{Y}(t')]=$$

$$=\mathrm{M}\left[\mathring{X}(t)\frac{d}{dt'}\mathring{X}(t')\right]=\frac{\partial}{\partial t'}K_x(t, t').$$

Заметим, что

$$R_{yx}(t, t')=\frac{\partial}{\partial t}K_x(t, t').$$

9.41. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики $m_x(t)=1$ и $K_x(t, t')=e^{\alpha(t+t')}$. Найти характеристики случайной функции $Y(t)=t\frac{d}{dt}X(t)+1$. Определить, являются ли стационарными случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$.

Решение. В силу линейности преобразования $t\frac{dX(t)}{dt}+1$

$$m_y(t)=t\frac{d}{dt}m_x(t)+1=1;$$

$$K_y(t, t')=tt'\frac{\partial^2}{\partial t \partial t'}K_x(t, t')=tt'\alpha^2 e^{\alpha(t+t')}.$$

Ни одна из случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ не является стационарной, так как их корреляционные функции зависят не только от $\tau=t'-t$, но от каждого из аргументов t, t'.

9.42. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики

$$m_x(t)=t^2-1; \quad K_x(t, t')=2e^{-\alpha(t'-t)^2}.$$

Определить характеристики случайных функций

$$Y(t)=tX(t)+t^2+1; \quad Z(t)=2t\frac{d}{dt}X(t)+(1-t)^2;$$

$$U(t)=\frac{d^2X(t)}{dt^2}+1.$$

Решение. $m_y(t)=tm_x(t)+t^2+1=t^3+t^2-t+1;$

$$K_y(t, t')=tt'e^{-\alpha(t'-t)^2};$$

$$m_z(t)=2t\frac{d}{dt}m_x(t)+(1-t)^2=1-2t+5t^2;$$

$$K_z(t)=4tt'\frac{\partial^2}{\partial t \partial t'}K_x(t, t')=16\alpha tt'e^{-\alpha(t-t')^2}[1-2\alpha(t-t')^2];$$

$$m_u(t)=\frac{d^2}{dt^2}m_x(t)+1=3;$$

$$K_u(t, t')=\frac{\partial^4}{\partial t^2(\partial t')^2}K_x(t, t').$$

При вычислении $K_z(t, t')$ мы уже нашли $\frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t')$, следовательно,

$$K_u(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} \{4\alpha e^{-\alpha(t-t')^2}[1 - 2\alpha(t-t')^2] =$$

$$= 8\alpha^2 e^{-\alpha(t-t')^2}[3 + 4\alpha^2(t'-t)^4 - 12\alpha(t-t')^2].$$

9.43. Случайная функция $X(t)$ задана выражением $X(t) = V\cos\omega t$, где V — случайная величина с характеристиками $m_v = 2$; $\sigma_v = 3$. Найти характеристики случайной функции $X(t)$: $m_x(t)$; $K_x(t, t')$; $D_x(t)$. Определить, является ли случайная функция $X(t)$ стационарной. Найти характеристики случайной функции $Y(t) = X(t) + \alpha \frac{d}{dt} X(t)$, где α — не случайная величина. Является ли стационарной случайная функция $Y(t)$?

Решение. $m_x(t) = m_v \cos\omega t = 2\cos\omega t$;

$$K_x(t, t') = D_v \cos\omega t \cos\omega t' = 9\cos\omega t\cos\omega t';$$

$$D_x(t) = 9(\cos\omega t)^2.$$

Случайную функцию $Y(t)$ можно представить в виде

$$Y(t) = V\cos\omega t + \alpha\frac{d}{dt}V\cos\omega t = V(\cos\omega t - \alpha\omega\sin\omega t);$$

отсюда $m_y(t) = m_v(\cos\omega t - \alpha\omega\sin\omega t) = 2(\cos\omega t - \alpha\omega\sin\omega t)$;

$K_y(t, t') = 9(\cos\omega t - \alpha\omega\sin\omega t)(\cos\omega t' - \alpha\omega\sin\omega t')$; $D_y(t) = 9(\cos\omega t - \alpha\omega\sin\omega t)^2$.

Случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ нестационарны.

9.44. На телефонную станцию поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Случайная функция $X(t)$ — число заявок, поступившее за время t (см. задачу 9.13). Найти характеристики ее производной $Y(t)$.

Решение. В обычном смысле разрывная случайная функция, которая представляет собой процесс Пуассона, недифференцируема, однако, пользуясь обобщенной дельта-функцией, можно записать характеристики производной. Преобразование $Y(t) = dX(t)/dt$, связывающее случайную функцию $Y(t)$ с $X(t)$, является линейным однородным. Поэтому на основе задачи 9.13

$$m_y(t) = \frac{d}{dt} m_x(t) = \frac{d}{dt} t\lambda = \lambda;$$

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t') = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t'}[\lambda t 1(t'-t) + \lambda t' 1(t-t')]\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[\lambda(t-t')\delta(t-t') + \lambda 1(t-t')],$$

но $(t-t')\delta(t-t') \equiv 0$, откуда

$$K_y(t, t') = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda 1(t-t')) = \lambda\delta(t-t') = \lambda\delta(\tau).$$

Таким образом, корреляционная функция случайной функции $Y(t)$ пропорциональна дельта-функции, т. е. функция $Y(t)$ представляет собой стационарный белый шум с интенсивностью $G = \lambda$ и средним уровнем $m_y=\lambda$. Спектральная плотность такого белого шума будет

$$S_y^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\delta(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{\lambda}{2\pi}\ .$$

9.45. Найти характеристики случайного процессе $Y(t)$, равного производной винеровского процесса $X(t)$ [см. задачу (9.25)]: $Y(t) = \frac{d}{dt} X(t)$.

Решение. Так как $m_x(t) = 0$, то $m_y(t) = 0$. Корреляционные функции винеровского и пуассоновского процессов равны (с точностью до постоянного множителя). Поэтому корреляционная функция производной винеровского процесса (см. решение предыдущей задачи) пропорциональна дельта-функции, сам процесс $Y(t)$ представляет собой стационарный белый шум.

9.46. Доказать, что производная процесса однородного случайного блуждания (броуновского движения) частицы (см. задачу 9.24) представляет собой стационарный белый шум.

Указание. Воспользоваться решением задачи 9.44.

9.47. *Характеристики интеграла от случайного процесса.* Имеется случайный процесс $X(t)$ и даны его характеристики: $m_x(t)$, $K_x(t, t')$. Найти характеристики $m_y(t)$, $K_y(t, t')$ интеграла этого случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(\tau)\, d\tau$, а также взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t, t')$.

Решение.
$$m_y(t) = \int\limits_0^t m_x(t)\, dt;$$

$$K_y(t, t') = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t'} K_x(\tau, \tau')\, d\tau d\tau';$$

$$D_y(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^t K_x(\tau, \tau')\, d\tau d\tau'; \quad R_{xy}(t, t') = \int\limits_0^{t'} K_x(t, \tau')\, d\tau'.$$

Заметим, что

$$R_{yx}(t, t') = \int\limits_0^t K_x(\tau, t')\, d\tau.$$

Можно доказать, что не существует отличной от нуля случайной функции $X(t)$, при которой $Y(t)$ стационарна.

9.48. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики: $m_x(t) = 0$; $K_x(t, t') = [1 - (t' - t)^2]^{-1}$. Найти характеристики случайной функции $Y(t) = \int_0^t X(t)\, dt$. Определить, стационарны ли случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$.

Решение. В силу линейности преобразования $\int_0^t X(t)\,dt$

$$m_y(t)=\int_0^t m_x(t)\,dt=0;\quad K_y(t,t')=\int_0^t dt\int_0^{t'} K_x(t,t')\,dt'=$$

$$=\int_0^t\left(\int_0^{t'}[1+(t'-t)^2]^{-1}\,dt'\right)dt=t\operatorname{arctg}t+t'\operatorname{arctg}t'-$$

$$-(t-t')\operatorname{arctg}(t-t')-\frac{1}{2}\ln\{(1+t^2)(1+t'^2)[1+(t-t')^2]^{-1}\}.$$

Случайная функция $X(t)$ стационарна: $K_x(t,t')=K_x(t-t')$; случайная функция $Y(t)=\int_0^t X(t)\,dt$ нестационарна. Действительно, дисперсия случайной функции равна $D_y(t)=K_y(t,t)=$ $=2t\operatorname{arctg}t-\ln(1+t^2)$, т. е. зависит от t.

9.49. Случайная функция $X(t)$ с характеристиками $m_x(t)=t^2+3$; $K_x(t,t')=5tt'$ подвергается линейному преобразованию вида

$$Y(t)=\int_0^t \tau X(\tau)\,d\tau+t^3.$$

Определить характеристики случайной функции $Y(t)$: $m_y(t)$; $K_y(t,t')$.

Решение. $m_y(t)=\int_0^t \tau(\tau^2+3)\,d\tau+t^3=\frac{t^4}{4}+\frac{3}{2}t^2+t^3.$

Однородная часть рассматриваемого линейного преобразования

$$L_t^{(0)}\{X(t)\}=\int_0^t \tau X(\tau)\,d\tau.$$

Следовательно,

$$K_y(t,t')=\int_0^t d\tau\int_0^{t'}\tau\tau' K_x(\tau,\tau')\,d\tau'=$$

$$=5\int_0^t\tau\tau\left(\int_0^{t'}\tau'\tau'\,d\tau'\right)d\tau=\frac{5}{9}t^3(t')^3.$$

9.50. Случайная функция $X(t)$, имеющая характеристики $m_x(t)=$ $=0$ и $K_x(t,t')=3e^{-(t+t')}$ подвергается линейному преобразованию вида

$$Y(t)=-t\frac{d}{dt}X(t)+\int_0^t \tau X(\tau)\,d\tau+\sin\omega t.$$

Найти корреляционный момент случайных величин $X(0)$ и $Y(1)$ (т. е. двух сечений случайных функций: $X(t)$ при $t = 0$ и $Y(t')$ при $t' = 1$).

Решение. На основании решения предыдущей задачи

$$R_{xy}(t, t') = L_t^{(y)} \{K_x(t, t')\},$$

где $L_t^{(y)}$ — однородная часть линейного преобразования, примененная к аргументу t'. В нашем случае

$$R_{xy}(t, t') = -3t' \frac{\partial e^{-(t+t')}}{\partial t'} + 3 \int_0^{t'} \tau' e^{-(t+\tau')} d\tau' =$$

$$= 3t' e^{-(t+t')} + 3e^{-t} [e^{-t'}(-t' - 1) + 1] = 3e^{-t}(1 - e^{-t'}).$$

Полагая $t = 0$, $t' = 1$, получаем

$$K_{X(0), Y(1)} = R_{xy}(0, 1) = 3(1 - e^{-1}) \approx 1{,}90.$$

9.51. Случайный входной сигнал $X(t)$ преобразуется с помощью реле в случайный выходной сигнал $Y(t)$, связанный с $X(t)$ нелинейной зависимостью $Y(t) = \operatorname{sign} X(t)$, т. е.

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } X(t) > 0; \\ 0 & \text{при } X(t) = 0; \\ -1 & \text{при } X(t) < 0. \end{cases}$$

Входной сигнал представляет собой случайную функцию $X(t)$, рассмотренную в задаче 9.15. Найти закон распределения сечения случайной функции $Y(t)$ и ее характеристики $m_y(t)$; $K_y(t, t')$.

Решение. Случайная функция $Y(t)$ может принимать только два значения: $+1$ и -1; значением 0 можно пренебречь, так как $P\{X(t) = 0\} = 0$. Вероятность того, что $X(t) > 0$, равна $p = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$. Ряд распределения случайной величины $Y(t)$ имеет вид

$$Y(t): \left| \begin{array}{c|c} -1 & +1 \\ \hline 1-p & p \end{array} \right|.$$

Отсюда $m_y = 2p - 1$; $D_y = 1 - (2p - 1)^2 = 4p(1 - p)$.

Пусть $\tau = t' - t$ и $t' > t$. Если за время τ в пуассоновском потоке не появилось ни одного события (а вероятность этого равна $e^{-\lambda\tau}$), то значения случайной функции $Y(t)$ и $Y(t')$ равны друг другу и условная корреляционная функция $K_y(t, t') = D_y = 4p(1 - p)$. Если же за время τ появилось хотя бы одно событие, то $Y(t)$ и $Y(t')$ между собой не коррелированы и условная корреляционная функция $K_y(t, t')$ равна нулю. Отсюда при $t' > t$

$$K_y(t, t') = e^{-\lambda\tau}\, 4p(1 - p),$$

а в общем случае (при любых t, t')

$$K_y(t, t') = k_y(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}\, 4p(1 - p).$$

9.52. Случайный входной сигнал $X(t)$, рассмотренный в задаче 9.15, преобразуется в случайный выходной сигнал $Y(t)$ с помощью реле с зоной нечувствительности:

$$Y(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} X(t) & \text{при } |X(t)| > \varepsilon; \\ 0 & \text{при } |X(t)| < \varepsilon, \end{cases}$$

где ε — зона нечувствительности реле.

Найти закон распределения сечения случайной функции $Y(t)$ и ее характеристики: математическое ожидание и корреляционную функцию.

Р е ш е н и е. Случайная величина $Y(t)$ при любом t может принимать одно из трех значений: -1, 0, 1 и имеет ряд распределения

$$X(t): \left| \begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & +1 \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \right|,$$

где
$$p_1 = \mathrm{P}\{X(t) < -\varepsilon\} = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x)\,dx;$$

$$p_2 = \mathrm{P}\{|X(t)| < \varepsilon\} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)\,dx; \quad p_3 = 1 - p_1 - p_2.$$

Отсюда $\qquad m_y = p_3 - p_1; \ D_y = p_1 + p_3 - (p_3 - p_1)^2.$

Рассуждая аналогично тому, как мы это делали в предыдущей задаче, определяем корреляционную функцию

$$k_y(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cdot [p_1 + p_3 - (p_3 - p_1)^2].$$

9.53. Случайная функция $X(t)$ преобразуется в случайную функцию $Y(t)$ с помощью нелинейного элемента, работа которого описывается формулой

$$Y(t) = \begin{cases} -b\varepsilon & \text{при } X(t) < -\varepsilon; \\ bX(t) & \text{при } |X(t)| < \varepsilon; \\ b\varepsilon & \text{при } X(t) > \varepsilon. \end{cases}$$

График зависимости $y(x)$ показан на рис. 9.53, *а*.

На вход такого элемента поступает случайная функция $X(t)$, рассмотренная в задаче 9.15. Найти одномерный закон распределения случайной функции $Y(t)$ и ее характеристики: математическое ожидание и корреляционную функцию.

Р е ш е н и е. Случайная величина $Y(t)$ — сечение случайной функции $Y(t)$ — имеет непрерывное распределение в открытом интервале $(-b\varepsilon, +b\varepsilon)$ и, кроме того, дискретные возможные значения $-b\varepsilon$ и $+b\varepsilon$ с отличной от нуля вероятностью; таким образом, сечение $Y(t)$ представляет собой смешанную случайную величину, функция распределения которой $F(y)$ непрерывна на участке $(-b\varepsilon, +b\varepsilon)$,

а на концах участка (в точках $b\varepsilon$ и $+b\varepsilon$) терпит разрыв. Скачки $F(y)$ в точках разрыва равны

$$P\{Y(t) = -b\varepsilon\} = P\{X(t) < \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x)\,dx = p_1;$$

$$P\{Y(t) = +b\varepsilon\} = P\{X(t) > \varepsilon\} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x)\,dx = p_2.$$

Найдем функцию распределения случайной величины $Y(t)$ в промежутке $(-b\varepsilon;\ +b\varepsilon)$:

$$F(y) = P\{X(t) < y\} = P\left\{X(t) < \frac{y}{b}\right\} = \int_{-\infty}^{y/b} \varphi(x)\,dx =$$

$$= p_1 + \int_{-\varepsilon}^{y/b} \varphi(x)\,dx \ (-b\varepsilon < y < b\varepsilon).$$

График функции распределения $F(y)$ показан на рис. 9.53, *б*.

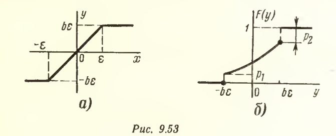


Рис. 9.53

Плотность распределения смешанной случайной величины $Y(t)$ в интервале $(-b\varepsilon,\ +b\varepsilon)$ равна производной от $F(y)$ на этом интервале:

$$f(y) = F'(y) = \frac{1}{b}\,\varphi(y/b) \text{ при } -b\varepsilon < y < +b\varepsilon.$$

Характеристики случайной функции $Y(t)$:

$$m_y(t) = m_y = -b\varepsilon p_1 + b\varepsilon p_2 + \frac{1}{b}\int_{-b\varepsilon}^{b\varepsilon} y\varphi\left(\frac{y}{b}\right) dy =$$

$$= b\varepsilon(p_2 - p_1) + b\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x\varphi(x)\,dx;$$

$$D_y(t) = \alpha_2[Y(t)] - m_x^2 = (\varepsilon b)^2(p_1 + p_2) +$$

$$+ \frac{1}{b}\int_{-b\varepsilon}^{b\varepsilon} y^2\varphi\left(\frac{y}{b}\right) dy - m_y^2 = D_y.$$

Аналогично предыдущим задачам $k_y(\tau) = D_y e^{-\lambda|\tau|}$.

9.54. Рассматривается случайная функция $X(t) = W \cos(\omega_1 t - \Theta)$, где W — центрированная случайная величина с дисперсией D_w; Θ — случайная величина, распределенная с постоянной плотностью в интервале $(0; 2\pi)$, а ω_1 — неслучайный параметр ($\omega_1 > 0$). Случайные величины W и Θ независимы. Найти характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание, корреляционную функцию. Определить, является ли случайная функция $X(t)$ стационарной и эргодической. Если она стационарна, то найти ее спектральную плотность $S_x(\omega)$.

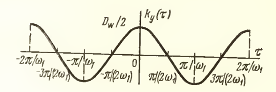


Рис. 9.54

Р е ш е н и е. Представим случайную функцию $X(t)$ в виде

$$X(t) = W \cos(\omega_1 t - \Theta) = W \cos\Theta \cos\omega_1 t + W \sin\Theta \sin\omega_1 t.$$

Обозначим $W\cos\Theta = U$; $W\sin\Theta = V$. Найдем сначала основные характеристики системы случайных величин U и V:

$$M[U] = M[W\cos\Theta] = M[W]\,M[\cos\Theta] = 0;$$

$$M[V] = M[W\sin\Theta] = M[W]\,M[\sin\Theta] = 0;$$

$$D[U] = M[(W\cos\Theta)^2] = M[W^2]\,M[\cos^2\Theta] = D_w M[\cos^2\Theta];$$

$$D[V] = M[(W\sin\Theta)^2] = M[W^2]\,M[\sin^2\Theta] = D_w M[\sin^2\Theta];$$

$$K_{uv} = M[W\cos\Theta W\sin\Theta] = D_w M[\sin\Theta\cos\Theta].$$

Так как значение Θ распределено равномерно в интервале $(0; 2\pi)$, то

$$M[\sin^2\Theta] = M[\cos^2\Theta] = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \frac{1}{2\pi}\,dx = \frac{1}{2};$$

$$M[\sin\Theta\cos\Theta] = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \frac{1}{2\pi}\,dx = 0.$$

Итак, $M[U] = M[V] = 0$; $D[U] = D[V] = D_w/2$; $K_{uv} = 0$. Следовательно, выражение

$$X(t) = W\cos(\omega_1 t - \Theta) = U\cos\omega_1 t + V\sin\omega_1 t$$

представляет собой спектральное разложение стационарной случайной функции: $m_x = 0$, а корреляционная функция имеет вид $k_x(\tau) = (D_w \cos\omega_1\tau)/2$. График этой функции показан на рис. 9.54.

Эргодической случайная функция $X(t)$ не является, так как характеристики, найденные по одной реализации, не совпадают с характеристиками, определенными по множеству реализаций. Действительно, каждая реализация случайной функции $X(t)$ есть гармоническое колебание, амплитуда которого представляет собой значение, случайно принятое величиной W. Среднее по времени для каждой такой реализации будет равно нулю и совпадает с математическим ожиданием случайной функции $X(t)$, но дисперсия и корреляционная функция, найденные как средние по времени для одной реализации, уже не будут совпадать с соответствующими характеристиками случайной функции $X(t)$. Например,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}W^2\frac{1}{2}[1+\cos 2(\omega_1 t-\Theta)]\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}W^2.$$

Найдем спектральную плотность случайной функции $X(t)$. Покажем, что она пропорциональна дельта-функции: $S_x(\omega)=D_w\delta(\omega-\omega_1)/2$ $(0<\omega<\infty)$. Действительно, при такой спектральной плотности корреляционная функция

$$k_x(\tau)=\int_0^\infty S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega=\int_0^\infty\frac{D_w}{2}\delta(\omega-\omega_1)\cos\omega\tau d\omega=\frac{D_w}{2}\cos\omega_1\tau,$$

что совпадает с корреляционной функцией для $X(t)$. А так как прямое и обратное преобразования Фурье определяют спектральную плотность и корреляционную функцию взаимно-однозначно, то написанное выше выражение для $S_x(\omega)$ дает спектральную плотность случайной функции $X(t)$.

Если воспользоваться не действительной, а комплексной формой преобразований Фурье, получим спектральную плотность $S_x^*(\omega)$ в виде

$$S_x^*(\omega)=D_w[\delta(\omega+\omega_1)+\delta(\omega-\omega_1)]/4\quad(-\infty<\omega<\infty).$$

Заметим, что аналогично можно было бы записать и $S_x(\omega)=D_w[\delta(\omega+\omega_1)+\delta(\omega-\omega_1)]/2$, но для положительных ω (так как $\omega_1>0$) $\delta(\omega+\omega_1)\equiv 0$.

9.55. Показать, что сумма элементарных случайных функций вида

$$X(t)=m_x+\sum_{i=0}^{\infty}W_i\cos(\omega_i t-\Theta_i),$$

где W_i — центрированные случайные величины с дисперсией D_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$; Θ_i — случайная величина, распределенная равномерно на участке $(0;\,2\pi)$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ (причем все случайные величины W_i, Θ_i независимы), представляет собой не что иное, как спектральное разложение (9.0.24) случайной функции $X(t)$.

Решение. В соответствии с решением предыдущей задачи

$$W_i\cos(\omega_i t-\Theta_i)=U_i\cos\omega_i t+V_i\sin\omega_i t,$$

где U_i и V_i — некоррелированные случайные величины, имеющие нулевые математические ожидания. Следовательно,

$$X(t) = m_x + \sum_{i=0}^{\infty} (U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t),$$

что и требовалось показать.

9.56. Рассматривается случайный процесс $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(t) + b$, где $X_i(t)$ — стационарные некоррелированные случайные процессы с характеристиками: m_i; $k_i(\tau)$; $S_i^*(\omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; a_i, b — действительные числа. Найти характеристики случайного процесса $Y(t)$.

Ответ.
$$m_y = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i + b; \quad k_y(\tau) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 k_i(\tau);$$

$$S_y^*(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 S_i^*(\omega).$$

Случайный процесс $Y(t)$ стационарен.

9.57. Рассматривается случайный процесс $Y(t) = \prod_{l=1}^{n} X_l(t)$, где $X_l(t)$ — независимые стационарные случайные процессы с характеристиками: $m_l = 0$; $k_l(\tau)$; $S_l^*(\omega)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$. Найти его характеристики.

Ответ.
$$m_y = \prod_{l=1}^{n} m_l; \quad k_y(\tau) = \prod_{l=1}^{n} k_l(\tau);$$

$$S_y^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{l=1}^{n} k_l(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Процесс $Y(t)$ стационарен.

9.58. Найти характеристики случайной функции $X(t)$, представленной своим спектральным разложением, приведенным в задаче 9.55.

Решение. Обозначим $W_i(\cos \omega_i t - \Theta) = X_i(t)$, тогда

$$X(t) = m_x + \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t).$$

В соответствии с решением задач 9.54 и 9.56 имеем

$$M[X(t)] = m_x; \quad k_x(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} k_{x_i}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos \omega_i \tau;$$

$$S_x^*(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{4} [\delta(\omega + \omega_i) + \delta(\omega - \omega_i)] \quad (-\infty < \omega < \infty).$$

Случайная функция $X(t)$ стационарна, но не эргодична.

9.59. Рассматривается произведение двух некоррелированных стационарных случайных функций: $Z(t) = X(t) Y(t)$, причем случай-

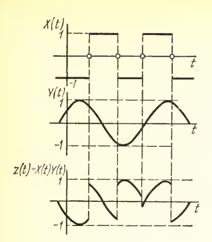


Рис. 9.59

ная функция $X(t)$ такая, как в задаче 9.14 (случайное чередование значений $+1$ и -1 с простейшим потоком перемен знаков), а случайная функция $Y(t)$ такая, как в задаче 9.54. Найти характеристики случайной функции $Z(t)$.

Р е ш е н и е. Имеем $m_x(t) = m_y(t) = 0$; $m_z(t) = 0$; $K_x(t, t') = e^{-2\lambda|\tau|}$; $K_y(t, t') = (D_w \cos\omega_1\tau)/2$ $(\tau = t' - t)$. На основании задачи 9.57

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') K_y(t, t') = (D_w e^{-2\lambda|\tau|} \cos\omega_1\tau)/2.$$

На рис. 9.59 показана одна из возможных реализаций случайной функции $Z(t)$, полученная перемножением соответствующих ординат реализаций случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$.

9.60*. *Признак положительной определенности.* Имеется функция $k_x(\tau)$, обладающая свойствами:

1) $k_x(-\tau) = k_x(\tau)$; 2) $k_x(0) > 0$; 3) $|k_x(\tau)| \leqslant k_x(0)$.

Требуется выяснить, может ли функция $k_x(\tau)$ быть корреляционной функцией стационарной случайной функции, т. е. обладает ли она свойством положительной определенности. Показать, что достаточным условием положительной определенности является условие, чтобы функция

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty k_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad (9.60.1)$$

была неотрицательна при любом значении ω:

$$S_x(\omega) \geqslant 0, \qquad (9.60.2)$$

т. е. чтобы, вычисляя спектральную плотность по формуле (9.60.1), мы ни при каких ω не получали отрицательных значений этой функции.

Р е ш е н и е. Предположим, что $S_x(\omega) \geqslant 0$, и докажем, что при этом функция $k_x(\tau) = k_x(t - t')$ будет положительно определенной. Имеем

$$k_x(\tau) = \int_0^\infty S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega = \int_0^\infty S_x(\omega)\cos\omega t\cos\omega t' d\omega +$$
$$+ \int_0^\infty S_x(\omega)\sin\omega t\sin\omega t' d\omega. \qquad (9.60.3)$$

Положительная определенность функции $k_x(t - t')$ состоит в том, что для любой функции $\varphi(t)$ и любой области интегрирования (B) должно выполняться условие

$$\int\limits_{(B)}\int\limits_{(B)} k_x(t-t')\,\varphi(t)\,\varphi(t')\,dt\,dt' \geqslant 0.$$

Проверим это неравенство по отношению к функции (9.60.3):

$$\int\limits_{(B)}\int\limits_{(B)}\left\{\int\limits_0^\infty S_x(\omega)\cos\omega t\cos\omega t'\;\varphi(t)\,\varphi(t')\,d\omega +\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty S_x(\omega)\sin\omega t\sin\omega t'\;\varphi(t)\,\varphi(t')\,d\omega\right\}dt\,dt' =$$

$$=\int\limits_0^\infty S_x(\omega)\left\{\int\limits_{(B)}\cos\omega t\varphi(t)\,dt\int\limits_{(B)}\cos\omega t'\;\varphi(t')\,dt' +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{(B)}\sin\omega t\varphi(t)\,dt\int\limits_{(B)}\sin\omega\, t'\varphi(t')dt'\right\}d\omega.$$

Обозначая

$$\int\limits_{(B)}\cos\omega t\varphi(t)\,dt = \psi_1(B,\ \omega);\quad \int\limits_{(B)}\sin\omega t\varphi(t)\,dt = \psi_2(B,\ \omega),$$

получаем

$$\int\limits_{(B)}\int\limits_{(B)} k_x(t-t')\,\varphi(t)\,\varphi(t')\,dt\,dt' = \int\limits_0^\infty S_x(\omega)\,([\psi_1(B,\ \omega)]^2 + [\psi_2(B,\ \omega)]^2)\,d\omega \geqslant 0,$$

так как по условию $S_x(\omega) \geqslant 0$.

Можно доказать, что условие (9.60.3) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы корреляционная функция была положительно определенной.

9.61*. Определить, обладает ли функция

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta|\tau|\right)\quad (\alpha > 0;\ \beta > 0)$$

свойствами корреляционной функции.

Решение. Нужно проверить выполнение следующих свойств:

$$1)\ k_x(0) > 0;\ 2)\ x_x(-\tau) = k_x(\tau);\ 3)\ |k_x(\tau)| \leqslant k_x(0);$$

$$4)\ S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau \geqslant 0 \text{ при любом } \omega.$$

Свойства «1» и «2» очевидны. Проверим остальные.

3) Функция $k_x(\tau)$ — четная, поэтому достаточно исследовать ее при $\tau \geqslant 0$:

$$k_x(\tau) = \frac{1}{2}\,e^{-(\alpha-\beta)\tau}\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right) - \frac{1}{2}\,e^{-(\alpha+\beta)\tau}\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right).$$

Так как $k_x(0) = 1$, нужно, чтобы это выражение по модулю не превосходило единицы. При $\alpha < \beta$ это условие не выполняется, так как при $\tau \to \infty$ выражение $e^{-(\alpha-\beta)\tau}$ неограниченно возрастает. В случае $\alpha = \beta$ получаем $k_x(\tau) \equiv 1$; при $\alpha > \beta$ имеем $-k_x(\tau) \leqslant 1$. Таким образом, свойство «3» выполняется только при $\alpha \geqslant \beta$.

$$4)\ S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-\beta+i\omega)\tau} d\tau + \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta+i\omega)\tau} d\tau\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left\{\frac{\beta+\alpha}{\alpha-\beta+i\omega} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+i\omega}\right\} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\pi\beta}\left\{\frac{1}{(\alpha-\beta)^2+\omega^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(\alpha+\beta)^2+\omega^2}\right\} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\pi} \cdot \frac{2}{[(\alpha-\beta)^2+\omega^2]\,[(\alpha+\beta)^2+\omega^2]}$$

при $\alpha \geqslant \beta$ (Re — действительная часть). При $\alpha = \beta$ имеем $S_x^*(\omega) = \delta(\omega)$.

Таким образом, функция $k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\left(\operatorname{ch}\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta|\tau|\right)$ при $\alpha \geqslant \beta$ обладает всеми свойствами корреляционной функции. Графики $k_x(\tau)$ и $S_x^*(\omega)$ при $\alpha > \beta$ показаны на рис. 9.61, *а* и *б*.

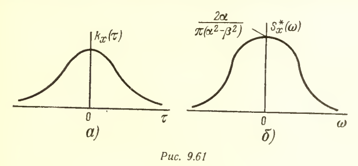


Рис. 9.61

9.62. Показать, что не существует никакой стационарной случайной функции $X(t)$, корреляционная функция которой $k_x(\tau)$ постоянна в каком-то интервале $(-\tau_1, \tau_1)$ и равна нулю вне его.

Решение. Предположим противное, т. е. что существует случайная функция $X(t)$, для которой корреляционная функция равна $b > 0$ при $|\tau| < \tau_1$ и равна 0 при $|\tau| > \tau_1$. Попробуем найти спектральную плотность случайной функции $X(t)$:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} k_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{\tau_1} b\cos\omega\tau\, d\tau = \frac{b}{\pi}\,\frac{\sin\omega\tau_1}{\omega}.$$

Из этого выражения видно, что функция $S_x(\omega)$ для некоторых значений ω отрицательна, что противоречит свойствам спектральной плот-

ности, и, следовательно, корреляционной функции указанного вида существовать не может.

9.63. Обладает ли функция $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau|$ свойствами корреляционной функции?

Ответ. Нет, так как не выполняются два условия: $k_x(0) > 0$ и $k_x(0) \geqslant |k_x(\tau)|$.

9.64. Стационарная случайная функция $X(t)$ имеет характеристики m_x и $k_x(\tau)$. Найти взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t, t')$ случайной функции $X(t)$ и случайной функции $Y(t) = 1 - X(t)$.

Решение. $R_{xy}(t, t') = M\left[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')\right] = M\left[-\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')\right] =$

$$= -K_x(t, t') = -k_x(\tau).$$

9.65. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики m_x; $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Найти ее спектральную плотность.

Решение.

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{D_x}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\, d\tau,$$

где Re — действительная часть. Имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\, d\tau = \int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha+i\omega}\, e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\, d(\alpha+i\omega)\tau =$$

$$= \left|\begin{array}{l}(\alpha+i\omega)\tau = y \\ \text{при } \tau = 0;\ y = 0 \\ \text{при } \tau = \infty;\ y = \infty\end{array}\right| = \frac{1}{\alpha+i\omega}\int_0^{\infty} e^{-y}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\alpha+i\omega};\ \operatorname{Re}\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\, d\tau = \operatorname{Re}\frac{1}{\alpha+i\omega} =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{1}{\alpha+i\omega}\,\frac{\alpha-i\omega}{\alpha-i\omega} = \operatorname{Re}\frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2} =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} - i\,\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Следовательно, $S_x^*(\omega) = \frac{D_x}{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$.

9.66. Найти спектральную плотность случайной функции $X(t)$, если ее корреляционная функция

$$k_x(\tau) = D_x\, e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau.$$

Ответ. $S_x^*(\omega) = \frac{D_x\,\alpha}{\pi}\,\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{[\alpha^2+(\beta-\omega)^2]\,[\alpha^2+(\beta+\omega)^2]}$.

Указание: представить $\cos \beta\tau = (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau})/2$ и воспользоваться решением задачи 9.65.

9.67. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции, у которой корреляционная функция

$$k_x(\tau) = D_x\, e^{-(\lambda\tau)^2}.$$

Решение. Имеем

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_x\, e^{-(\lambda\tau)^2}\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda\tau)^2 - i\omega\tau}\, d\tau.$$

Пользуясь известной формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Ax^2 \pm 2Bx - C}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left[-\frac{AC - B^2}{A}\right] \quad (A > 0)$$

и имея в виду, что $i^2 = -1$, получаем

$$S_x^*(\omega) = \frac{D_x}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^2}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}\right] = \frac{D_x}{4\lambda\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}\right].$$

График этой функции подобен кривой нормального закона.

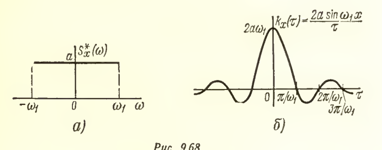


Рис. 9.68

9.68. Спектральная плотность стационарной случайной функции $X(t)$ на участке от $-\omega_1$ до $+\omega_1$ постоянна, а вне его равна нулю, т. е. имеет вид, показанный на рис. 9.68, *а*:

$$S_x^*(\omega) = \begin{cases} a & \text{при } |\omega| < \omega_1 \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_1 \end{cases} = a\,1\left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right).$$

Найти корреляционную функцию $k_x(\tau)$ случайной функции $X(t)$.

Решение. $k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega =$

$$= 2a \int_0^{\omega_1} \cos \omega\tau\, d\omega = \frac{2a \sin \omega_1 \tau}{\tau}; \; D_x = k_x(0) = 2a\omega_1.$$

График корреляционной функции показан на рис. 9.68, *б*.

9.69. *Производная стационарной случайной функции.* Имеется стационарная случайная функция с характеристиками $m_x(t) = m_x$; $K_x(t, t') = k_x(\tau)$, где $\tau = t' - t$. Найти характеристики ее производной $Y(t) = dX(t)/dt$ и показать, что она также стационарна.

Решение. Так как $Y(t)$ связана с $X(t)$ линейным однородным преобразованием, то

$$m_y(t) = \frac{d}{dt} m_x(t) = \frac{d}{dt} m_x = 0 = \text{const};$$

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} k_x(\tau) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t'} k_x(\tau)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d}{d\tau} k_x(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t'}\right).$$

Но $\partial\tau/\partial t' = 1$ и $\partial\tau/\partial t = -1$, поэтому

$$K_y(t, t') = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{d}{d\tau} k_x(\tau)\right] = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} k_x(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau).$$

Так как правая часть равенства зависит только от τ, то

$$K_y(t, t') = k_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau)$$

и случайная функция $Y(t)$ стационарна.

9.70. Стационарная случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию $k_x(\tau)$. Случайная функция $Y(t)$ получается из нее дифференцированием: $Y(t) = dX(t)/dt$. Найти корреляционную функцию $k_y(\tau)$, если:

$$\text{а) } k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}; \text{ б) } k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|); \text{ в) } k_x(\tau) =$$

$$= e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right) (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Решение. При решении задачи мы будем применять аппарат обобщенных функций, правила пользования которыми приведены в приложении 6.

$$\text{а) } k_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} e^{-\alpha|\tau|} = -\frac{d}{d\tau}\left[-\alpha e^{-\alpha|\tau|} \frac{d|\tau|}{d\tau}\right] =$$

$$= \alpha\left[-\alpha e^{-\alpha|\tau|}\left(\frac{d|\tau|}{d\tau}\right)^2 + \frac{d^2|\tau|}{d\tau^2} e^{-\alpha|\tau|}\right] = \alpha e^{-\alpha|\tau|}[2\delta(\tau) -$$

$$- \alpha(\text{sign}\,\tau)^2].$$

Наличие слагаемого $2\delta(\tau)$ показывает, что в составе случайной функции $Y(t)$ есть белый шум. Далее запишем ответы, предоставив читателю убедиться в их справедливости:

$$\text{б) } k_y(\tau) = \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|);$$

$$\text{в) } k_y(\tau) = (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

9.71. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции с корреляционной функцией

$$k_y(\tau) = \alpha\, e^{-\alpha|\tau|}\, [2\delta(\tau) - \alpha\, (\operatorname{sign}\tau)^2].$$

Решение. $S_y^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_y(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\, e^{-\alpha|\tau|}\, 2\delta(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 (\operatorname{sign}\tau)^2\, e^{-\alpha|\tau|}\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Так как

$$(\operatorname{sign}\tau)^2 = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \neq 0; \\ 0 & \text{при } \tau = 0 \end{cases}$$

и так как подынтегральная функция второго интеграла в точке $\tau = 0$ не имеет особенностей, то во втором интеграле можно пренебречь точкой $\tau = 0$. Получим

$$S_y^*(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{2\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\omega^2}{\alpha^2\ 4\omega^2}.$$

График спектральной плотности $S_y^*(\omega)$ представлен на рис. 9.71.

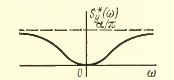


Рис. 9.71

Спектральную плотность $S_y^*(\omega)$ можно было получить проще следующими рассуждениями. Представим случайную функцию $Y(t)$ как производную случайной функции $X(t)$ из задачи 9.70 (п. «а»). Имеем

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|};\quad S_x^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2};$$

амплитудно-частотная характеристика оператора дифференцирования равна $\Phi(i\omega) = i\omega$, следовательно,

$$S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega)\, |\Phi(i\omega)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\, |i\omega|^2 = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

9.72. Имеется стационарная случайная функция $X(t)$ с корреляционной функцией $k_x(\tau) = (\sin\tau)/\tau$. Найти корреляционную функцию, дисперсию и спектральную плотность ее производной: $Y(t) = dX(t)/dt$.

Решение. Согласно решению задачи 9.40

$$k_y(\tau) = -\frac{d^2 k_x(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right).$$

Разлагая $(\sin\tau)/\tau$ в ряд Маклорена, имеем

$$\frac{\sin\tau}{\tau} = 1 - \frac{\tau^2}{3!} + \frac{\tau^4}{5!} - \frac{\tau^6}{7!} + \ldots;$$

$$k_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau) = \frac{1}{3} - \frac{\tau^2}{2!\,5} + \frac{\tau^4}{4!\,7} - \ldots$$

Отсюда $D_y = k_y(0) = 1/3$.

Спектральная плотность $S_x^*(\omega) = 2 \cdot 1\,(1 - |\omega|)$ (см. п. 14 приложения 6). Следовательно, $S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega)\,\omega^2 = 2\omega^2 1\,(1 - |\omega|)$.

9.73. Случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\left(\mathrm{ch}\,\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{sh}\,\beta|\tau|\right) \quad (\alpha \geqslant \beta > 0).$$

Случайная функция $Y(t) = dX(t)/dt$. Найти ее корреляционную функцию $k_y(\tau)$ и спектральную плотность $S_y^*(\omega)$.

Решение. При нахождении $k_y(\tau)$ применяем свойства обобщенных функций (см. [2]):

$$k_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\left[-e^{-\alpha|\tau|}\alpha\frac{d|\tau|}{d\tau}\left(\mathrm{ch}\,\beta\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{sh}\,\beta|\tau|\right) + e^{-\alpha|\tau|}\left(\beta\,\mathrm{sh}\,\beta\tau + \alpha\,\mathrm{ch}\,\beta|\tau|\frac{d|\tau|}{d\tau}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta}\,e^{-\alpha|\tau|}\,\mathrm{sh}\,\beta\tau\right) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{e^{\alpha|\tau|}}\left[\mathrm{ch}\,\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{sh}\,\beta|\tau|\right];$$

$$S_y^*(\omega) = \frac{2\alpha\omega^2}{\pi}\,\frac{\alpha^2 - \beta^2}{[(\alpha - \beta)^2 + \omega^2]\,[(\alpha + \beta)^2 + \omega^2]}.$$

Так как предел $\lim\limits_{\tau \to 0} k_y(\tau)$ существует (он равен $k_y(0) = \alpha^2 - \beta^2$), то случайная функция $X(t)$ дифференцируема.

9.74. Показать, что взаимная корреляционная функция $R_{xy}(t, t')$ стационарной случайной функции $X(t)$ и ее производной $Y(t) = dX(t)/dt$ удовлетворяет условию $R_{xy}(t, t') = -R_{xy}(t', t)$, т. е. при перемене местами аргументов меняет знак.

Решение. Пусть $K_x(t, t') = k_x(\tau)$, где $\tau = t' - t$.

$$R_{xy}(t, t') = M\left[\mathring{X}(t)\frac{d}{dt'}\mathring{X}(t')\right] = \frac{\partial}{\partial t'} M[\mathring{X}(t)\,\mathring{X}(t')] = \frac{\partial}{\partial t'} k_x(\tau).$$

Но $\tau = t' - t$, следовательно,

$$R_{xy}(t, t') = \frac{d}{d\tau} k_x(\tau)\,\frac{\partial\tau}{\partial t'} = \frac{d}{d\tau} k_x(\tau).$$

С другой стороны,

$$R_{xy}(t', t) = \frac{\partial}{\partial t} K_x(t, t') = \frac{d}{d\tau} k_x(\tau)\,\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{d}{d\tau} k_x(\tau) = -R_{xy}(t, t'),$$

что и требовалось показать.

Таким образом, взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции и ее производной зависит только от $\tau = t' - t$:

$$R_{xy}(\tau) = -\frac{d}{d\tau} k_x(\tau),$$

т. е. функция $X(t)$ и ее производная «стационарно коррелированы».

9.75. Доказать, что любая стационарная случайная функция $X(t)$ и значение ее производной $Y(t) = dX(t)/dt$ в той же точке t не коррелированы, а если случайная функция $X(t)$ распределена нормально, то и независимы.

Решение. В предыдущей задаче было показано, что $R_{xy}(\tau) = -\frac{d}{d\tau} k_x(\tau)$. При $t' = t$, $\tau = 0$

$$R_{xy}(0) = -\frac{d}{d\tau} k_x(0) = -\frac{d}{d\tau} D_x = 0.$$

Таким образом, стационарная случайная функция в любой точке не коррелирована со своей производной в той же точке.

Для нормально распределенных случайных функций из некоррелированности $X(t)$ и ее производной в той же точке вытекает и их независимость.

9.76. Найти характеристики случайной функции $Y(t) = X(t) \times \frac{dX(t)}{dt}$, если нормальная случайная функция $X(t)$ стационарна и имеет характеристики

$$m_x; \quad k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau\right).$$

Решение. $Y(t) = \frac{1}{2}\frac{d[X(t)]^2}{dt}$. Обозначим $X^2(t) = Z(t)$. В соответствии с (9.0.35) и (9.0.36) имеем

$$m_z = m_x^2 + k_x(0) = m_x^2 + D;$$

$$S_z^*(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega - v) S_x^*(v)\,dv + 4m_x^2 S_x^*(\omega) =$$

$$= \frac{D\alpha}{\pi}(\alpha^2 + \beta^2)\frac{\omega^2(\omega^2 + 20\alpha^2 + 4\beta^2)}{[(\omega^2 + 4\alpha^2 + 4\beta^2)^2 - 16\beta^2\omega^2](\omega^2 + 4\alpha^2)} +$$

$$+ 4m_x^2\frac{D\alpha}{\pi}\frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} = S_{x^2}^*(\omega).$$

Корреляционную функцию $k_z(\tau)$ можно найти из выражения

$$k_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z^*(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega.$$

9.77. *Квадратичное детектирование стационарной случайной функции.* Квадратичным детектированием случайной функции $X(t)$ называется нелинейное преобразование вида $Z(t) = a^2X^2(t)$, где a — постоянная; $X(t)$ — случайная функция. Найти характеристики случайной функции на выходе квадратичного детектора с параметром $a = 2$, если на его вход подается нормальная стационарная случайная функция с характеристиками $m_x = 3$; $k_x(\tau) = 4e^{-3|\tau|}$.

Решение. Обозначим $X_1(t) = aX(t)$. Характеристики случайной функции $X_1(t)$: $m_{x_1} = am_x = 6$; $k_{x_1}(\tau) = a^2k_x(\tau) = 16e^{-3|\tau|}$.

Тогда $Z(t) = X_1^2(t)$. Полагаем $D_1 = 16$; $\alpha_1 = 3$. По формуле (9.0.35) находим $m_z = m_{x_1} + k_{x_1}(0) = 6 + 16 = 22$. По формуле (9.0.36)

$$S_z^*(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} S_{x_1}^*(\omega - v)\, S_{x_1}^*(v)\, dv + 4m_{x_1}^2 S_{x_1}^*(\omega) =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_1\alpha_1}{\pi}\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - v)^2}\frac{D_1\pi_1}{\pi}\frac{1}{\pi_1^2 + v^2}\, dv + 4m_{x_1}\frac{D_1\alpha_1}{\pi}\frac{1}{\alpha_1^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{4D_1^2\alpha_1}{\pi}\frac{1}{(2\alpha_1)^2 + \omega^2} + \frac{4D_1\alpha_1 m_{x_1}^2}{\pi(\alpha_1^2 + \omega^2)}.$$

Следовательно (см. п. 6 приложения 7),

$$k_z(\tau) = k_1(\tau) + k_2(\tau) = \widetilde{D}_1 e^{-\widetilde{\alpha}_1|\tau|} + \widetilde{D}_2 e^{-\widetilde{\alpha}_2|\tau|},$$

где $\widetilde{D}_1 = 2D_1^2 = 2\cdot 16^2 = 512$; $\widetilde{\alpha}_1 = 2\alpha_1 = 6$; $\widetilde{D}_2 = 4D_1m_{x_1}^2 = 4 \times$ $\times\ 16\cdot 6^2 = 2\,304$; $\widetilde{\alpha}_2 = 3$.

Таким образом, сигнал на выходе квадратичного детектора можно представить как сумму двух некоррелированных стационарных случайных процессов $Z(t) = X_1(t) + X_2(t)$ с указанными выше характеристиками. Особо обратим внимание на то, что случайный процесс $Z(t)$ не является нормальным.

9.78. Нормальная случайная функция $X(t)$ имеет характеристики m_x; $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Найти характеристики случайной функции $W(t) = X(t)\frac{dX(t)}{dt}$.

Решение.
$$W(t) = X(t)\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}X^2(t);$$

$$S_w^*(\omega) = 0{,}5\omega^2 S_{x^2}^*(\omega).$$

Так как операция дифференцирования является линейной, то $m_w(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}m_{x^2}(t)$. Но, в соответствии с решением предыдущей задачи, $m_{x^2}(t) = \text{const}$, следовательно, $m_w(t) = 0$. В предыдущей задаче была найдена спектральная плотность $S_{x^2}(\omega)$, следовательно,

$$S_w^*(\omega) = \frac{1}{2}\omega^2 S_{x^2}^*(\omega) = \frac{D_x^2\, 2\alpha}{\pi}\frac{\omega^2}{\omega^2 + (2\alpha)^2} + \frac{2D_x m_x^2\alpha\omega^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}$$

и в соответствии с п. 18 приложения 7 имеем

$$k_w(\tau) = \frac{D_x^2\, 2\alpha}{\pi} e^{-2\alpha|\tau|}[2\delta(\tau) - 2\alpha(\operatorname{sign}\tau)^2] +$$

$$+ \frac{2D_x m_x^2\alpha}{\pi} e^{-\alpha|\tau|}[2\delta(\tau) - \alpha(\operatorname{sign}\tau)^2].$$

По виду корреляционной функции $k_w(\tau)$ заключаем, что случайная функция $W(t)$ содержит белый шум.

9.79. Угол перемещения радиолокатора в горизонтальной плоскости представляет собой нормальный случайный процесс $X(t)$ с матема-

тическим ожиданием $m_x = 0$ и корреляционной функцией $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$, где $D_x = 4$ град²; $\alpha = 10^{-3}$ 1/с; $\beta = 0,1$ 1/с. В начальный момент $t = 0$ угол перемещения равен нулю: $X(0) = 0$. Найти вероятность p того, что в момент $t' = 0,2$ с угол перемещения будет меньше 1°.

Решение. Обозначим $X(0) = X_0$; $X(t_1) = X_1$. Условный закон распределения случайной величины X_1 при условии, что случайная величина $X_0 = x_0$, найдем из выражения $f(x_1|x_0) = f(x_1, x_0)/f(x_1)$, где $f(x_1, x_0)$ — нормальный закон распределения системы двух случайных величин с характеристиками: $m_1 = m_0 = 0$;

$$D_1 = D_0 = D_x = 4 \text{ град}^2; \quad k_{x_1, x_0} = k_x(0, 2) = D_x e^{-\alpha|0,2|} \cos \beta \cdot 0,2 = 3,68 \text{ град}^2; \quad r_{x_1, x_0} = k_{x_1, x_0}/\sqrt{D_{x_1} D_{x_0}} = 0,921.$$

Условный закон распределения $f(x_1|x_0 = 0)$ будет нормальным с характеристиками

$$m_{x_1|x_0} = 0; \quad \sigma_{x_1|x_0} = \sigma_2 \sqrt{1 - r^2_{x_1, x_0}} = 0,776.$$

Тогда $$p = \int_{-1}^{1} f(x_1|x_0| = 0)\, dx = \Phi\left(\frac{1}{0,776\sqrt{2}}\right) = 0,81.$$

9.80. На вход колебательного звена системы автоматического регулирования, передаточная функция которой имеет вид

$$\Phi(p) = k/(Tp^2 + \xi p + k) \quad (\xi > 0),$$

подается белый шум со спектральной плотностью $S_x^*(\omega) = N$. Определить дисперсию выходного сигнала (речь идет о достаточно удаленных участках времени, после окончания переходных процессов).

Решение. $S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega)|\Phi(i\omega)|^2 = Nk/(|T(i\omega)^2 + \xi i\omega + k|^2)$, откуда $D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y^*(\omega)\, d\omega = \pi kN/\xi$.

Заметим, что дисперсия выходного сигнала не зависит от постоянной времени колебательного звена T, а зависит лишь от коэффициента усиления k, коэффициента демпфирования ξ и мощности сигнала N.

9.81. Передаточная функция системы, на которую подается сигнал $X(t)$, имеет вид

$$\Phi(p) = (1 + T_1 p)/(T_1^2 p^2 + p + k),$$

где $k = 25\ \frac{1}{\text{с}}$; $T_1 = 0,05$ с.

Спектральная плотность входного сигнала

$$S_x^*(\omega) = 2T\delta_x/[1 + (T\omega)^2],$$

где $T = 1$ с; $\delta_x = 4$ град²/с². Найти дисперсию выходного сигнала.

Решение.

$$S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega)\,|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{2\delta_x(-T_1^2(i\omega)^2 + 1)}{|TT_1(i\omega)^3 + (T + T_1)(i\omega)^2 + (1 + kT)\, i\omega + k|^2},$$

$$D_y=\int_0^{\infty} S_y^*(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b_0(i\omega)^4+b_1(i\omega)^2+b_2}{|a_0(i\omega)^3+a_1(i\omega)^2+a_2 i\omega+a_3|^2}\,d\omega=$$

$$=\frac{-a_2 b_0+a_0 b_1-a_0 a_1 b_2/a_3}{2a_0(a_0 a_3-a_1 a_2)};$$

в нашем случае $b_0 = 0$; $b_1 = -T_1^2$; $b_2 = 1$; $a_0 = TT_1$; $a_1 = T + T_1$; $a_2 = 1 + kT$; $a_3 = k$. Тогда

$$D_y=4\pi T\delta_x\frac{b_1-a_1 b_2/a_3}{2(a_0 a_3-a_1 a_2)}\approx 0{,}0428 \text{ град}^2.$$

9.82. Выходной сигнал $Y(t)$ связан с входным сигналом $X(t)$ дифференциальным уравнением

$$a_1\frac{dX(t)}{dt}+a_0 X(t)=b_1\frac{dY(t)}{dt}+b_0 Y(t). \qquad (9.82)$$

Стационарная случайная функция $X(t)$ — нормальная с характеристиками m_x и $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Найти характеристики выходного сигнала $Y(t)$.

Решение. Так как случайная функция $X(t)$ подвергается стационарному линейному преобразованию, то в установившемся режиме случайная функция $Y(t)$ будет стационарной. Величину m_y можно найти из уравнения

$$a_1\frac{dm_x}{dt}+a_0 m_x=b_1\frac{dm_y}{dt}+b_0 m_y.$$

Так как $m_x = \text{const}$ и $m_y = \text{const}$, то $a_0 m_x = b_0 m_y$, откуда $m_y = a_0 m_x/b_0$. Уравнение (9.82) можно записать в операторной форме:

$$(a_1 p + a_0)\,X(t) = (b_1 p + b_0)\,Y(t),$$

откуда

$$Y(t)=\frac{a_1 p+a_0}{b_1 p+b_0}X(t)=\Phi(p)\,X(t),$$

где $\Phi(p)$ — передаточная функция.

$$S_y^*(\omega)=S_x^*(\omega)\,|\Phi(i\omega)|^2=S_x^*(\omega)\left|\frac{a_1 i\omega+a_0}{b_1 i\omega+b_0}\right|^2=$$

$$=\frac{D_x\alpha}{\pi}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\,\frac{a_0^2+a_1^2\omega^2}{b_0^2+b_1^2\omega^2}=\frac{D_x\alpha}{\pi b_1^2}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\,\frac{a_0^2+a_1^2\omega^2}{b_0^2/b_1^2+\omega^2}.$$

Выражение для $S_x^*(\omega)$ можно записать в виде

$$S_y^*(\omega)=\frac{D_x\alpha}{\pi b_1^2}\,\frac{a_0^2+a_1^2\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)(b_0^2/b_1^2+\omega^2)}=\frac{D_x\alpha}{\pi b_1^2}\left(\frac{a}{b^2+\omega^2}+\frac{c}{d^2+\omega^2}\right),$$

где

$$a=a_1^2-c;\quad c=\frac{a_0^2-a_1^2 b_0^2/b_1^2}{\alpha^2-b_0^2/b_1^2};\quad b=\alpha;\quad d=b_0/b_1.$$

Обозначим $D_1 = D_x \alpha a/b$; $D_2 = D_x \alpha c/(b_1^2 d)$. Тогда (см. п. 6 приложения 7) $k_y(\tau) = D_1 e^{-b|\tau|} + D_2 e^{-d|\tau|}$. Дисперсия выходного сигнала $D_y = k_y(0) = D_1 + D_2$.

9.83. Для уменьшения уровня шума $X(t)$ применяется RC-фильтр (рис. 9.83). На вход фильтра подается стационарный белый шум со спектральной плотностью $S_x^*(\omega) = 10^{-5}$ В²·с. Определить наименьшую постоянную времени фильтра $T = RC$, при которой с вероятностью $p = 0{,}05$ сигнал на выходе фильтра не будет превосходить по модулю 100 мВ, если $m_x = 0$.

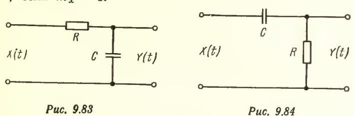


Рис. 9.83 *Рис. 9.84*

Решение. Передаточная функция RC-фильтра имеет вид $\Phi(p) = 1/(1 + Tp)$. Следовательно,

$$S_y^*(\omega) = \left|\frac{1}{1+T\omega}\right|^2 S_x^*(\omega) = \frac{1}{1+T^2\omega^2}\cdot 10^{-5} = \frac{D_y\alpha}{\pi}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2},$$

где $\alpha = 1/T$ 1/с; $D_y = \pi\alpha\cdot 10^{-5}$ В². Отсюда (см. п. 5 приложения 7) $k_y(\tau) = D_y e^{-\alpha|\tau|}$.

Так как входной нормальный сигнал подвергается линейному преобразованию, то и выходной сигнал будет нормальным с характеристиками $m_y = 0$; $D_y = (\pi/T)\,10^{-5}$ В². По условию задачи $p = 1 - 2\Phi(100/\sigma_y) = 0{,}05$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа (приложение 5). Имеем $\Phi(100/\sigma_y) = 0{,}475$; $100/\sigma_y = 1{,}96$; $\sigma_y = 100/1{,}96 = 51{,}1$ мВ; $\sigma_y^2 = D_y = 26{,}1\cdot 10^{-4}$ В².

Искомая наименьшая постоянная времени фильтра $T = (\pi/D_y) \times 10^{-5} = 0{,}012$ с.

9.84. На вход RC-фильтра, изображенного на рис. 9.84, подается нормальная стационарная случайная функция $X(t)$ с характеристиками m_x; $k_x(\tau) = D_y \cos\beta\tau$. Найти характеристики выходного сигнала $Y(t)$.

Решение. Передаточная функция фильтра имеет вид $\Phi(p) = Tp\,(1 + Tp)^{-1}$, где $T = RC$. Следовательно, $m_y = 0$ (постоянная составляющая не проходит через конденсатор C). Спектральная плотность выходного сигнала (см. п. 3 приложения 7) имеет вид

$$S_y^*(\omega) = \left|\frac{Ti\omega}{1+Ti\omega}\right|^2 S_x^*(\omega) = \frac{(T\omega)^2}{1+(T\omega)^2} D_x[\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta)].$$

Дисперсию выходного сигнала D_y найдем из выражения (см. приложение 6)

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y^*(\omega)\,d\omega = D_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(T\omega)^2}{1+(T\omega)^2}[\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta)]\,d\omega =$$

$$= D_x \frac{2(T\beta)^2}{1+(T\beta)^2},$$

Одномерный закон распределения выходного сигнала — нормальный с параметрами $m_y = 0$ и D_y.

9.85. На вход автоматического регулятора подается напряжение $X(t)$, которое представляет собой нормальный стационарный случайный процесс с характеристиками $m_x = 220$ В; $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$, где $D_x = \sigma_x^2 = 16$ В^2; $\alpha = 200$ 1/c. Регулятор напряжения работает нормально, если напряжение $X(t)$ не меньше 208 В и не больше 232 В, в противном случае — он автоматически отключается и включается вновь при возвращении входного напряжения $X(t)$ в указанный диапазон. Определить вероятность p того, что регулятор будет работать в произвольно выбранный момент времени t, закон распределения длительности нормальной работы T_1 и среднюю длительность отключения регулятора $\bar{t}_2$.

Решение. В соответствии с решением задачи 9.70 (пункт «б»)

$$k_y(\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}[D_x e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)] =$$
$$= D_x \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1-\alpha|\tau|), \quad \sigma_y = \alpha\sigma_x.$$

Среднее число выбросов за уровень a (вверх) будет

$$\lambda_a = \frac{1}{2\pi}\left\{\exp\left[-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]\right\}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 10{,}3 \ \ 1/\text{c}.$$

Следовательно, общее среднее число выбросов за допустимый уровень в единицу времени будет $2\lambda_a = \lambda_1 = 20{,}6$ 1/c. С достаточной для практики точностью закон распределения случайной величины T_1 можно считать показательным с математическим ожиданием $\bar{t} = 1/\lambda_1 = 0{,}0486$ с. Вероятность того, что регулятор будет работать в произвольно выбранный момент времени, равна

$$p = \text{P}(208 < X(t) < 232) = \text{P}(|X(t) - m_x| < 12) = 2\Phi(3) =$$
$$= 0{,}9973.$$

С другой стороны, вероятность p можно найти из выражения $p = \bar{t}_1/(\bar{t}_1 + \bar{t}_2)$, откуда $\bar{t}_2 = \bar{t}_1(1-p)/p = 1{,}31 \cdot 10^{-4}$ с.

9.86. Радиоприбор может работать только в определенном диапазоне температур $t_0 \pm 30°$ С, где t_0 — номинальная средняя температура; при выходе температуры за эти границы прибор выходит из строя. Температура окружающей среды $X(t)$ есть стационарная случайная функция с математическим ожиданием $m_x = 0$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_x = 10°$ С, корреляционной функцией вида $k_x(\tau) = 100(\sin\tau)/\tau$ °C^2; распределение нормальное. Найти среднее число выбросов температуры за границы $t_0 \pm 30°$ С в течение времени $T = 50$ с. Считая число выбросов распределенным по закону Пуассона, найти вероятность того, что за время T прибор выйдет из строя.

Решение. Согласно решению задачи 9.72

$$k_y(\tau) = -\frac{\partial^2 k_x(\tau)}{\partial \tau^2} = -100\left\{-\frac{1}{3} + \frac{\tau}{2!\,5} - \ldots\right\}.$$

Полагая $\tau = 0$, находим $D_y = k_y(0) = 33{,}3$; $\sigma_y = 5{,}76°$ C. Среднее число выбросов вверх за границу $a = m_x + 30°$ C согласно формуле (9.0.42) равно

$$\lambda_a = \frac{1}{2\pi} e^{-a^2/200} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}00134 \ 1/\text{c}.$$

Таково же общее среднее число выбросов вниз, за границу $m_x - 30°$ C; общее среднее число выбросов за допустимые границы будет $2\lambda_a = 0{,}00269$.

Для случайной величины Y — числа выбросов, имеющей пуассоновское распределение с математическим ожиданием $2\lambda_a T = 0{,}00269 \times 50 = 0{,}1345$, вероятность того, что она примет значение, большее нуля (произойдет хотя бы один выброс), равна $1 - e^{-0{,}1345} = 0{,}125$.

ГЛАВА 10

ПОТОКИ СОБЫТИЙ. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

10.0. *Потоком событий* называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на телефонной станции; поток забитых шайб при игре в хоккей; поток сбоев ЭВМ; поток заявок на проведение регламентных работ в вычислительном центре и т. п.

Поток событий наглядно изображается рядом точек с абсциссами $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n, \ldots$ (рис. 10.0.1) с интервалами между ними: $T_1 = \Theta_2 - \Theta_1$, $T_2 = \Theta_3 - \Theta_2, \ldots, T_n = \Theta_{n+1} - \Theta_n$. При его вероятностном описании поток событий может быть представлен как последовательность случайных величин: Θ_1; $\Theta_2 = \Theta_1 + T_1$; $\Theta_3 = \Theta_1 + T_1 + T_2$; ...

Заметим, что термин «событие» в понятии «поток событий» совершенно отличен по смыслу от ранее введенного термина «случайное событие». В частности, не имеет смысла говорить о вероятностях «событий», образующих поток (например, о «вероятности вызова» на телефонной станции: ясно, что рано или поздно вызов придет, и не один). С «потоком событий» можно связывать различные случайные события, например:

$A =$ {в течение времени от t_0 до $t_0 + \tau$ придет хотя бы один вызов}

или

$B =$ {в течение того же времени придут ровно два вызова}.

Вероятности таких событий можно вычислять.

Заметим также, что на рисунке в виде ряда точек мы можем изобразить не сам поток событий (он случаен), а только какую-то его конкретную р е а л и з а ц и ю.

В гл. 4 мы уже упоминали о потоках событий и некоторых их свойствах; здесь мы осветим их более подробно. Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от выбора начала отсчета или, более конкретно, если вероятность попадания того или другого числа событий на любой интервал времени зависит только от д л и н ы τ этого интервала и не зависит от того, г д е именно на оси $0t$ он расположен.

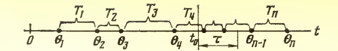


Рис. 10.0.1

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный интервал времени Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Практически ординарность потока означает, что события в нем появляются «поодиночке», а не группами по два, по три и т. д. (точное совпадение моментов появления двух событий теоретически возможно, но имеет нулевую вероятность).

Ординарный поток событий можно интерпретировать как случайный процесс $X(t)$ — число событий, появившихся до момента t (рис. 10.0.2). Случайный процесс $X(t)$ скачкообразно возрастает на одну единицу в точках $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если число событий, попадающих на любой интервал времени τ, не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним интервал. Практически отсутствие последействия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга.

Поток событий называется *простейшим*, если он стационарен, ординарен и не имеет последействия.

Интервал времени T между двумя соседними событиями простейшего потока имеет показательное распределение

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\text{при } t > 0), \tag{10.0.1}$$

где $\lambda = 1/M[T]$ — величина, обратная среднему значению интервала T.

Ординарный поток событий без последействия называется *пуассоновским*. Простейший поток есть частный случай пуассоновского (а именно стационарный пуассоновский поток).

Интенсивностью λ потока событий называется среднее число (математическое ожидание числа) событий, приходящееся на единицу времени. Для стационарного потока $\lambda = \text{const}$; для нестационарного потока интенсивность в общем случае зависит от времени: $\lambda = \lambda(t)$.

Мгновенная интенсивность потока $\lambda(t)$ определяется как предел отношения среднего числа событий, которые произошли за элементарный интервал времени $(t, t + \Delta t)$, к длине Δt этого интервала, когда она стремится к нулю. Среднее число событий, наступающих на интервале времени τ, следующем непосредственно за моментом t_0 (см. рис. 10.0.1), равно $a(t_0, \tau) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)\, dt$. Если поток событий стационарный, то $a(t_0, \tau) = a(\tau) = \lambda\tau$.

Ординарный поток событий называется *потоком Пальма* (или *рекуррентным* потоком, или потоком с ограниченным последействием), если интервалы времени $T_1, T_2, \ldots$ между последовательными событиями (см. рис. 10.0.1) представ-

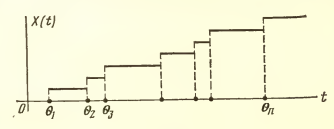


Рис. 10.0.2

ляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины. В связи с одинаковостью распределений T_1, T_2, ... поток Пальма всегда стационарен. Простейший поток является частным случаем потока Пальма; в нем интервалы между событиями распределены по показательному закону (10.0.1), где λ — интенсивность потока.

Потоком Эрланга k-го порядка называется поток событий, получающийся «прореживанием» простейшего потока, когда сохраняется каждая k-я точка (событие) в потоке, а все промежуточные выбрасываются (см. рис. 10.0.3, где показано получение потока Эрланга 4-го порядка из простейшего потока).

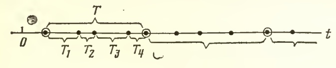


Рис. 10.0.3

Интервал времени между двумя соседними событиями в потоке Эрланга k-го порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин T_1, T_2, ..., T_k, имеющих показательное распределение с параметром λ:

$$T=\sum_{i=1}^{k} T_i. \qquad (10.0.2)$$

Закон распределения случайной величины T называется *законом Эрланга k-го порядка* (см. задачу 8.38) и имеет плотность

$$f_k(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-\lambda t} \quad (\text{при } t>0). \qquad (10.0.3)$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины T (10.0.2) соответственно равны:

$$m_t=k/\lambda;\quad D_t=k/\lambda^2;\quad \sigma_t=\sqrt{k}/\lambda. \qquad (10.0.4)$$

Коэффициент вариации случайной величины (10.0.2) равен

$$v_t=\sigma_t/m_t=1/\sqrt{k}; \qquad (10.0.5)$$

$v_t \to 0$ при $k\to\infty$, т. е. при увеличении порядка потока Эрланга «степень случайности» интервала между событиями стремится к нулю.

Если одновременно с «прореживанием» простейшего потока изменять масштаб по оси $0t$ (делением на k), получится *нормированный* поток Эрланга k-го порядка, интенсивность которого не зависит от k. Интервал времени $\widetilde{T}$ между соседними событиями в нормированном потоке Эрланга k-го порядка имеет плотность

$$\widetilde{f}_k(t)=\frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-k\lambda t} \quad (\text{при } t>0). \qquad (10.0.6)$$

Числовые характеристики случайной величины

$$\widetilde{T}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} T_i$$

равны:

$$M[\widetilde{T}]=1/\lambda;\quad D[\widetilde{T}]=1/k\lambda^2;\quad \widetilde{\sigma}_t=1/(\lambda\sqrt{k});\quad v_t=1/\sqrt{k}. \qquad (10.0.7)$$

При увеличении k нормированный поток Эрланга неограниченно приближается к *регулярному потоку* с постоянным интервалом $l=1/\lambda$ между событиями.

Случайный процесс, протекающий в какой-либо физической системе S, называется *марковским* (или процессом без последействия), если он обладает следующим свойством: *для любого момента времени* t_0 (рис. 10.0.4) *вероятность любого состояния системы в будущем* (при $t > t_0$) *зависит только от ее состояния в настоящем* (при $t = t_0$) *и не зависит от того, когда и каким образом система* S *пришла в это состояние* (иначе: при фиксированном настоящем будущее не зависит от предыстории процесса — от прошлого).

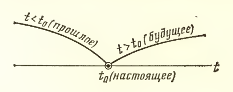


Рис. 10.0.4

В данной главе мы будем рассматривать только марковские процессы с дискретными состояниями $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Такие процессы удобно иллюстрировать с помощью *графа состояний* (рис. 10.0.5), где прямоугольниками (или кружками) обозначены состояния $s_1, s_2, \ldots$ системы S, а стрелками — возможные переходы из состояния в состояние (на графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния). Иногда на графе состояний отмечают не только возможные переходы из состояния в состояние, но и возможные задержки в прежнем состоянии; это изображается стрелкой («петлей»), направленной из данного состояния в него же (рис. 10.0.6), но можно обходиться и без этого. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным).

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем обычно называют *марковской цепью*. Для такого процесса моменты t_1, t_2, ..., когда система S может менять свое состояние, удобно рассматривать как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, рассматривать не время t, а номер шага: 1, 2, ..., k, ... Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний

$$S(0),\ S(1),\ S(2),\ \ldots,\ S(k),\ \ldots, \qquad (10.0.8)$$

где $S(0)$ — начальное состояние системы (перед первым шагом); $S(1)$ — состояние системы непосредственно после первого шага; ...; $S(k)$ — состояние системы непосредственно после k-го шага ...

Событие $\{S(k) = s_i\}$ = {сразу после k-го шага система находится в состоянии s_i} ($i = 1, 2, \ldots$) является случайным событием, поэтому последовательность состояний (10.0.8) можно рассматривать как последовательность случайных событий. Начальное состояние $S(0)$ может быть как заданным заранее, так и слу-

← *Рис. 10.0.5*

Рис. 10.0.6

чайным. О событиях последовательности (10.0.8) говорят, что они образуют марковскую цепь.

Рассмотрим процесс с n возможными состояниями $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Если обозначить $X(t)$ номер состояния, в котором находится система S в момент t, то процесс (марковская цепь) описывается целочисленной случайной функцией $X(t) > 0$, возможные значения которой равны 1, 2, ..., n. Эта функция совершает скачки от одного целочисленного значения к другому в заданные моменты $t_1, t_2, \ldots$ (рис. 10.0.7) и является непрерывной слева, что отмечено точками на рис. 10.0.7.

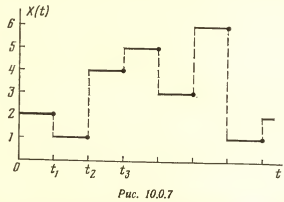


Рис. 10.0.7

Рассмотрим одномерный закон распределения случайной функции $X(t)$. Обозначим $p_i(k)$ вероятность того, что после k-го шага [и до $(k+1)$-го] система S будет в состоянии s_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Вероятности $p_i(k)$ называются *вероятностями состояний* цепи Маркова. Очевидно, для любого k

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1. \qquad (10.0.9)$$

Распределение вероятностей состояний в начале процесса

$$p_1(0),\ p_2(0),\ \ldots,\ p_i(0),\ \ldots,\ p_n(0) \qquad (10.0.10)$$

называется *начальным распределением вероятностей* марковской цепи. В частности, если начальное состояние $S(0)$ системы S в точности известно, например $S(0) = s_i$, начальная вероятность $p_i(0) = 1$, а все остальные равны нулю.

Вероятностью перехода на k-м шаге из состояния s_i в состояние s_j называется условная вероятность того, что система S после k-го шага окажется в состоянии s_j, при условии, что непосредственно перед этим (после $k-1$ шагов) она находилась в состоянии s_i. Вероятности перехода иногда называются также «переходными вероятностями».

Марковская цепь называется *однородной*, если переходные вероятности не зависят от номера шага, а зависят только от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход:

$$\mathrm{P}\{S(k) = s_j \mid S(k-1) = s_i\} = P_{ij}. \qquad (10.0.11)$$

Переходные вероятности однородной марковской цепи P_{ij} образуют квадратную таблицу (матрицу) размера $n \times n$:

$$\|P_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{12} \ldots & P_{1j} \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} \ldots & P_{2j} \ldots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{i1} & P_{i2} \ldots & P_{ij} \ldots & P_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & P_{n2} \ldots & P_{nj} \ldots & P_{nn} \end{matrix} \right\|. \qquad (10.0.12)$$

Сумма переходных вероятностей в любой строке матрицы равна единице:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (10.0.13)$$

Матрицу, обладающую таким свойством, называют *стохастической*. Вероятность P_{ii} есть не что иное, как вероятность того, что система, пришедшая к данному шагу в состояние s_i, в нем же и задержится на очередном шаге.

Если для однородной цепи Маркова заданы начальное распределение вероятностей (10.0.10) и матрица переходных вероятностей (10.0.12), то вероятности состояний системы $p_i(k)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) могут быть определены по рекуррентной формуле

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1) P_{ji} \quad (i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, n). \qquad (10.0.14)$$

Для неоднородной цепи Маркова вероятности перехода в матрице (10.0.12) и формуле (10.0.14) зависят от номера шага k.

При фактических вычислениях по формуле (10.0.14) надо в ней учитывать не все состояния s_j, а только те, для которых переходные вероятностя отличны от нуля, т. е. те, из которых на графе состояний ведут стрелки в состояние s_i.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем иногда называют «непрерывной цепью Маркова». Для такого процесса вероятность перехода из состояния s_i в s_j для любого момента времени равна нулю. Вместо вероятности перехода P_{ij} рассматривают *плотность вероятности перехода* λ_{ij}, которая определяется как предел отношения вероятности перехода из состояния s_i в состояние s_j за малый промежуток времени Δt, примыкающий к моменту t, к длине этого промежутка, когда она стремится к нулю. Плотность вероятности перехода может быть как постоянной ($\lambda_{ij} = \text{const}$), так и зависящей от времени $[\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)]$. В первом случае марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется *однородным*. Типичный пример такого процесса — случайный процесс $X(t)$, представляющий собой число появившихся до момента t событий в простейшем потоке (см. рис. 10.0.2).

При рассмотрении случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно представлять себе переходы системы S из состояния в состояние как происходящие под влиянием некоторых потоков событий; при этом плотности вероятностей перехода получают смысл интенсивностей λ_{ij} соответствующих потоков событий (как только происходит первое событие в потоке с интенсивностью λ_{ij}, система из состояния s_i скачком переходит в s_j). Если все эти потоки пуассоновские (т. е. ординарные и без последействия, с постоянной или зависящей от времени интенсивностью), то процесс, протекающий в системе S, будет марковским.

Рассматривая марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, очень удобно пользоваться графом состояний, на котором против каждой стрелки, ведущей из состояния s_i в s_j, проставлена интенсивность λ_{ij} потока событий, переводящего систему по данной стрелке (рис. 10.0.8). Такой граф состояний называют *размеченным**).

Вероятность того, что система S, находящаяся в состоянии s_i, за элементарный промежуток времени $(t, t + dt)$ перейдет в состояние s_j (элемент вероятности перехода из s_i в s_j) есть вероятность того, что за это время dt появится хотя бы одно событие потока, переводящего S из s_i в s_j. С точностью до бесконечно малых высших порядков эта вероятность равна $\lambda_{ij} dt$.

Потоком вероятности перехода из состояния s_i в s_j называется величина $\lambda_{ij} p_i(t)$ (здесь интенсивность λ_{ij} может быть как зависящей, так и независящей от времени).

---

*) На графе состояний системы с непрерывным временем мы не будем проставлять петли, соответствующие задержке системы в данном состоянии, так как такая задержка всегда возможна.

Рассмотрим случай, когда система S имеет конечное число состояний s_1, s_2, ..., s_n. Для описания случайного процесса, протекающего в этой системе, применяются *вероятности состояний*

$$p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t), \qquad (10.0.15)$$

где $p_i(t)$ — вероятность того, что система S в момент t находится в состоянии s_i:

$$p_i(t) = \mathrm{P}\{S(t) = s_i\}. \qquad (10.0.16)$$

Очевидно, для любого t

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1. \qquad (10.0.17)$$

Для нахождения вероятностей (10.0.15) нужно решить систему дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), имеющих вид

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

или, опуская аргумент t у переменных p_i,

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} p_j - p_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (10.0.18)$$

Напомним, что интенсивности потоков λ_{ij} могут зависеть от времени t (аргумент t для краткости написания опущен).

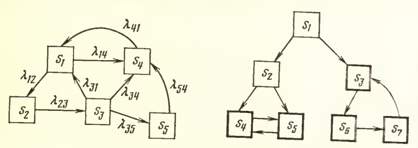


Рис. 10.0.8 *Рис. 10.0.9*

Уравнения (10.0.18) удобно составлять, пользуясь размеченным графом состояний системы и следующим мнемоническим правилом: *производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие*. Например, для системы S, размеченный граф состояний которой дан на рис. 10.0.8, система уравнений Колмогорова имеет вид

$$\begin{aligned} dp_1/dt &= \lambda_{31}p_3 + \lambda_{41}p_4 - (\lambda_{12} + \lambda_{14})\, p_1; \\ dp_2/dt &= \lambda_{12}p_1 - \lambda_{23}p_2; \\ dp_3/dt &= \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{35})\, p_3; \\ dp_4/dt &= \lambda_{14}p_1 + \lambda_{34}p_3 + \lambda_{54}p_5 - \lambda_{41}p_4; \\ dp_5/dt &= \lambda_{35}p_1 - \lambda_{54}p_5. \end{aligned} \qquad (10.0.19)$$

Так как для любого t выполняется условие (10.0.17), можно любую из вероятностей (10.0.15) выразить через остальные и таким образом уменьшить число уравнений на одно.

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений (10.0.18) для вероятностей состояний $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$, нужно задать начальное распределение вероятностей

$$p_1(0), p_2(0), \ldots, p_i(0), \ldots, p_n(0), \qquad (10.0.20)$$

сумма которых равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1.$$

Если, в частности, в начальный момент $t = 0$ состояние системы S в точности известно, например, $S(0) = s_i$, то $p_i(0) = 1$, а остальные вероятности (10.0.20) равны нулю.

Во многих случаях, когда процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, возникает вопрос о предельном поведении вероятностей $p_i(t)$ при $t \to \infty$. Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими (т. е. стационарными пуассоновскими с постоянными интенсивностями λ_{ij}), в некоторых случаях существуют *финальные* (или предельные) вероятности состояний

$$p_i = \lim_{t \to \infty} p_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (10.0.21)$$

не зависящие от того, в каком состоянии система S находилась в начальный момент. Это означает, что с течением времени в системе S устанавливается *предельный стационарный режим*, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний уже не меняются. В этом предельном режиме каждая финальная вероятность может быть истолкована *как среднее относительное время* пребывания системы в данном состоянии.

Система, для которой существуют финальные вероятности, называется *эргодической* и соответствующий случайный процесс — эргодическим.

Для существования финальных вероятностей состояний одного условия $\lambda_{ij} = \text{const}$ недостаточно, требуется выполнение еще некоторых условий, проверить которые можно по графу состояний, выделив на нем «существенные» и «несущественные» состояния. Состояние s_i называется *существенным*, если нет другого состояния s_j такого, что, перейдя однажды каким-то способом из s_i в s_j, система уже не может вернуться в s_i. Все состояния, не обладающие таким свойством, называются *несущественными*.

Например, для системы S, граф состояний которой дан на рис. 10.0.9, состояния s_1, s_2 несущественны (из s_1 можно уйти, например, в s_2 и не вернуться, а из s_2 в s_1 или s_5 и не вернуться), а состояния s_4, s_5, s_3, s_6, s_7 — существенны (существенные состояния обведены жирными линиями).

При конечном числе состояний n для существования финальных вероятностей необходимо и достаточно, чтобы *из каждого существенного состояния можно было (за какое-то число шагов) перейти в каждое другое существенное*. Граф, представленный на рис. 10.0.9, этому условию не удовлетворяет (например, из существенного состояния s_4 нельзя перейти в существенное состояние s_6); для графа, показанного на рис. 10.0.10, финальные вероятности существуют (из каждого существенного состояния возможен переход в каждое другое существенное).

Несущественные состояния потому так и называются, что из каждого такого состояния система рано или поздно уйдет в какое-то из существенных и больше не вернется. Естественно, финальные вероятности для несущественных состояний равны нулю.

Если система S имеет конечное число состояний $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то для существования финальных вероятностей *достаточно*, чтобы *из любого состояния системы можно было* (за какое-то число шагов) *перейти в любое другое*. Если число состояний $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ бесконечно, то это условие перестает быть достаточным, и существование финальных вероятностей зависит не только от графа состояний, но и от интенсивностей λ_{ij}.

Финальные вероятности состояний (если они существуют) могут быть получены решением *системы линейных алгебраических уравнений*; они получаются

из дифференциальных уравнений Колмогорова, если положить в них левые части (производные) равными нулю. Однако удобнее составлять эти уравнения непосредственно по графу состояний, пользуясь мнемоническим правилом: *для каждого состояния суммарный выходящий поток вероятности равен суммарному входящему.* Например, для системы S, размеченный граф состояний которой дан на рис. 10.0.11, уравнения для финальных вероятностей состояний имеют вид

$$(\lambda_{12} + \lambda_{13})\, p_1 = \lambda_{21} p_2; \quad (\lambda_{21} + \lambda_{24})\, p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{42} p_4;$$
$$(\lambda_{34} + \lambda_{35})\, p_3 = \lambda_{13} p_1; \quad \lambda_{42} p_4 = \lambda_{24} p_2 + \lambda_{34} p_3 + \lambda_{54} p_5; \quad \lambda_{54} p_5 = \lambda_{35} p_3. \qquad (10.0.22)$$

Таким образом, получается (для системы S с n состояниями) система n линейных однородных алгебраических уравнений с n неизвестными $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Из этой системы можно найти неизвестные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ с точностью до произвольного множителя. Чтобы найти точные значения $p_1, \ldots, p_n$, к уравнениям добавляют *нормировочное условие* $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, пользуясь которым можно выразить любую из вероятностей p_i через другие (и соответственно отбросить одно из уравнений).

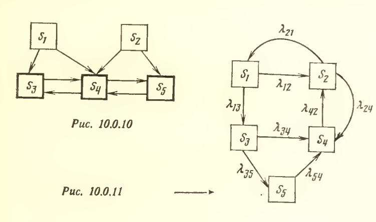


Рис. 10.0.10

Рис. 10.0.11

На практике очень часто приходится встречаться с системами, граф состояний которых имеет вид, показанный на рис. 10.0.12 (все состояния можно вытянуть в цепь, причем каждое из них связано прямой и обратной связью с двумя соседними, кроме двух крайних, каждое из которых связано только с одним соседним). Схема, изображенная на рис. 10.0.12, называется *схемой гибели и размножения.* Это название заимствовано из биологических задач, где состояние популяции s_k означает наличие в ней k единиц. Переход вправо связан с «размножением» единиц, а влево — с их «гибелью». На рис. 10.0.12 «интенсивности размножения» $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ проставлены у стрелок, ведущих слева направо, «интенсивности гибели» $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})$ — у стрелок, ведущих справа налево; каждая из них отмечена индексом того состояния, из которого исходит соответствующая стрелка.

Для схемы гибели и размножения финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0; \ldots;$$

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} p_0 \, (k = 0, \ldots, n); \ldots;$$

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0; \; p_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right\}^{-1}. \quad (10.0.23)$$

Обратим внимание на правило вычисления любой вероятности состояния (при $k = 1, 2, \dots, n$)

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0,$$

которое можно сформулировать так: *вероятность любого состояния в схеме гибели и размножения* (см. рис. 10.0.12) *равна дроби, в числителе которой стоит произведение всех интенсивностей размножения, стоящих левее s_k, а в знаменателе — всех интенсивностей гибели, стоящих левее s_k, умноженной на вероятность крайнего левого состояния p_0.*

Рис. 10.0.12

Если процесс описывается схемой гибели и размножения, то можно записать дифференциальные уравнения для математического ожидания и дисперсии случайной функции $X(t)$ — числа единиц в системе в момент времени t:

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \mu_k) p_k(t); \quad (10.0.24)$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} [\lambda_k + \mu_k + 2k(\lambda_k - \mu_k) - 2m_x(t)(\lambda_k - \mu_k)] p_k(t). \quad (10.0.25)$$

В этих формулах нужно полагать $\lambda_n = \mu_0 = 0$. Интенсивности λ_k ($0 \leqslant k \leqslant n-1$) и μ_k ($1 \leqslant k \leqslant n$) могут быть любыми неотрицательными функциями времени.

При достаточно больших значениях $m_x(t)$ (> 20) и выполнении условия $0 < m_x(t) \pm 3\sqrt{D_x(t)} < n$ можно приближенно полагать, что сечение случайной функции $X(t)$ представляет собой нормальную случайную величину с параметрами $m_x(t)$, $\sqrt{D_x(t)}$, полученными решением уравнений (10.0.24), (10.0.25). Формулы (10.0.24) и (10.0.25) остаются справедливыми при $n \to \infty$, если верхний предел в суммах заменить на ∞.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Производится наложение («суперпозиция») двух простейших потоков: 1) потока I с интенсивностью λ_1 и 2) потока II с интенсивностью λ_2 (рис. 10.1). Будет ли поток III, получившийся в результате суперпозиции, простейшим, и если да, то с какой интенсивностью?

Решение. Да, будет, так как свойства стационарности, ординарности и отсутствия последействия сохраняются; интенсивность потока III равна $\lambda_1 + \lambda_2$.

10.2. Производится случайное прореживание простейшего потока событий с интенсивностью λ; каждое событие, независимо от других, с вероятностью p сохраняется в потоке, а с вероятностью $1 - p$

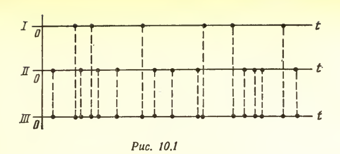


Рис. 10.1

выбрасывается (в дальнейшем такую операцию будем называть p-преобразованием потока). Каким будет поток, получающийся в результате p-преобразования простейшего потока?

Р е ш е н и е. Поток будет простейшим с интенсивностью λp. Действительно, все свойства простейшего потока (стационарность, ординарность, отсутствие последействия) при p-преобразовании сохраняются, а интенсивность умножается на p.

10.3. Интервал времени T между событиями в ординарном потоке имеет плотность

$$f(t)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)} & \text{при } t>t_0; \\ 0 & \text{при } t<t_0. \end{cases} \qquad (10.3)$$

Интервалы между событиями независимы. 1) Построить график плотности $f(t)$. 2) Является ли данный поток простейшим? 3) Является ли он потоком Пальма? 4) Какова его интенсивность $\tilde{\lambda}$? 5) Каков коэффициент вариации v_t интервала между событиями?

Р е ш е н и е. 1) См. рис. 10.3; распределение такого вида назовем «сдвинутым на t_0 показательным». 2) Нет, не является, так как распределение (10.3) не показательное. 3) Да, является в силу ординарности потока, независимости интервалов и одинакового их распределения.

$$4)\ \tilde{\lambda}=1/M[T];\quad M[T]=1/\lambda+t_0;\ \tilde{\lambda}=(1/\lambda+t_0)^{-1}=\lambda/(1+\lambda t_0).$$

$$5)\ D[T]=\frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma_t=\frac{1}{\lambda};\quad v_t=\frac{\sigma_t}{M[T]}=\frac{1/\lambda}{1/\lambda+t_0}=\frac{1}{1+\lambda t_0}.$$

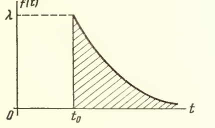


Рис. 10.3

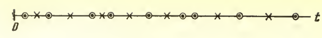


Рис. 10.4

10.4. На оси $0t$ имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Из этого потока формируется другой следующим образом: интервал между каждыми двумя соседними событиями делится пополам и в точку деления вставляется еще одно событие (см. рис. 10.4, где кружками обозначены основные, крестиками — вставленные события). Найти плотность распределения $f(t)$ интервала T между соседними событиями в новом потоке. Будет ли этот поток простейшим? Будет ли он потоком Пальма? Каков коэффициент вариации интервала T между событиями?

Решение. $T = X/2$, где X имеет показательное распределение с параметром λ: $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$. Пользуясь решением задачи 8.1 и полагая в формуле (8.1) $a = 1/2$, $b = 0$, получаем

$$f(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t} \quad (t > 0). \tag{10.4}$$

Это есть показательное распределение с коэффициентом вариации $v_t = 1$. Тем не менее новый поток не будет ни простейшим, ни даже потоком Пальма. Докажем сначала, что он не будет потоком Пальма. Хотя интервалы между событиями распределены одинаково по закону (10.4), они не являются независимыми. Рассмотрим два соседних интервала между событиями потока. С вероятностью 1/2 они независимы, с вероятностью 1/2 равны друг другу, следовательно, зависимы. Таким образом, новый поток событий — не пальмовский. Естественно, он не будет и простейшим, так как простейший поток — частный случай пальмовского.

Таким образом, показательное распределение интервала между событиями — недостаточное условие для того, чтобы поток был простейшим.

10.5. Условия те же, что и в предыдущей задаче, с той разницей, что преобразованный поток состоит только из «крестиков» (середин интервалов). Ответить на те же вопросы, что и в предыдущей задаче.

Решение. Очевидно, что интенсивность нового потока по сравнению с интенсивностью исходного не изменится и останется равной λ. Интервал между двумя соседними крестиками (рис. 10.5) равен

$$T = (X_i + X_{i+1})/2, \tag{10.5}$$

где X_i, X_{i+1} — два соседних интервала исходного потока. Величины X_i, X_{i+1} распределены обе по показательному закону с парамет-

Рис. 10.5

ром λ, а их полусумма (10.5) — по нормированному закону Эрланга 2-го порядка, так как интервал T равен сумме двух независимых показательно распределенных случайных величин, деленной на два. Таким образом, интервал T между двумя крестиками имеет плотность $f(t) = 4\lambda^2 e^{-2\lambda t}$ $(t > 0)$.

В преобразованном потоке все соседние интервалы времени будут зависимы, так как в состав этих интервалов входят одни и те же случайные величины. Однако эта зависимость распространяется только на соседние интервалы времени. Такие потоки иногда называют потоками со слабым последействием.

Коэффициент вариации v_t для случайной величины T будет равен [см. формулу (10.0.7)] $v_t = 1/\sqrt{2} < 1$.

10.6. Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью λ. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени T, которое ему придется ждать; определить его математическое ожидание m_t и среднее квадратическое отклонение σ_t.

Решение. Так как простейший поток не обладает последействием, то «будущее» не зависит от «прошлого», в частности, от того, сколько времени тому назад прошла последняя машина. Распределение времени T точно такое же, как и распределение промежутка времени между появлением соседних машин, т. е. показательное с параметром λ: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$; отсюда $m_t = 1/\lambda$; $D_t = 1/\lambda^2$; $\sigma_t = 1/\lambda = m_t$; $v_t = 1$.

Примечание. Если поток машин, идущих по шоссе, является многорядным, то его можно рассматривать как суперпозицию нескольких потоков, соответствующих каждому ряду. Если каждый поток — простейший, то результат суперпозиции также является простейшим потоком, так как свойства стационарности, ординарности и отсутствия последействия при суперпозиции сохраняются (см. задачу 10.1).

10.7. Пассажир выходит на остановку автобуса в некоторый момент времени, никак не связанный с расписанием движения. Автобусы следуют друг за другом регулярно с интервалом времени длины l. Найти закон распределения времени T, которое придется пассажиру ждать автобуса, и выразить его характеристики m_t, σ_t через интенсивность потока автобусов λ.

Решение. Момент прихода пассажира распределен с постоянной плотностью на интервале длины l между двумя автобусами; плотность распределения времени ожидания T будет также постоянна [равномерное распределение на интервале $(0, l)$]: $f(t) = 1/l$ $(0 < t < l)$ или, обозначая $1/l = \lambda$, $f(t) = \lambda$ $(0 < t < 1/\lambda)$. Для равномерного распределения на участке длины $1/\lambda$ имеем $m_t = 1/(2\lambda)$; $D_t = 1/(12\lambda^2)$; $\sigma_t = 1/(2\sqrt{3}\lambda)$; $v_t = 1/\sqrt{3}$.

10.8*. На оси $0t$ имеется пальмовский поток событий, интервалы между которыми распределены с плотностью $f(t)$. На ось $0t$ случайным образом бросается точка t^* (например, прибывает «инспектор», наблюдающий за появлением событий, или же «пассажир» появляется на остановке автобуса), причем момент t^* никак не связан с моментами

появления событий потока (рис. 10.8). Найти плотность распределения того интервала T^*, на который попала точка t^*, его математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. С первого взгляда может показаться, что эта плотность — такая же, как плотность распределения $f(t)$ любого интервала T между событиями, однако это не так. Тот факт, что на участок T^* попала случайно брошенная точка t^*, меняет его распределение; действительно, если на оси $0t$ есть разные участки (большие и маленькие), то с большей вероятностью точка t^* попадет на один из больших участков.

Рис. 10.8

Найдем плотность распределения $f^*(t)$ того участка T^*, на который попала точка t^*. Для этого найдем элемент вероятности $f^*(t)\,dt$, равный вероятности того, что точка t^* попадет на промежуток, длина которого заключена в пределах $(t, t+dt)$. Эта вероятность приближенно равна отношению суммарной длины всех таких промежутков на очень большом интервале времени Ω к полной длине этого интервала.

Пусть на очень большом интервале Ω уложилось большое число N промежутков между событиями. Среднее число промежутков, длина которых лежит в пределах $(t, t+dt)$, равна $Nf(t)\,dt$; средняя суммарная длина всех таких промежутков приближенно равна $tNf(t)\,dt$. Средняя же общая продолжительность всех N промежутков Ω будет (приближенно) равна Nm_t, где $m_t = \mathrm{M}[T] = \int\limits_0^\infty tf(t)\,dt$. Разделив одно на другое, получим

$$f^*(t)\,dt \approx \frac{Ntf(t)\,dt}{Nm_t} = \frac{tf(t)}{m_t}\,dt.$$

Это равенство выполняется тем точнее, чем более длительный интервал времени Ω будет рассматриваться (чем больше N). В пределе закон распределения случайной величины T^* будет

$$f^*(t) = \frac{t}{m_t} f(t) \quad (t > 0). \tag{10.8}$$

$$\mathrm{M}[T^*] = \frac{1}{m_t}\int\limits_0^\infty t^2 f(t)\,dt = \frac{1}{m_t}\alpha_2(t) = \frac{1}{m_t}(D_t + m_t^2);$$

$$\mathrm{D}[T^*] = \alpha_2[T^*] - (\mathrm{M}[T^*])^2 = \frac{1}{m_t}\int\limits_0^\infty t^3 f(t)\,dt - (\mathrm{M}[T^*])^2.$$

10.9. В условиях задачи 10.8 поток Пальма представляет собой простейший поток с интенсивностью λ, т. е. $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$. Найти плотность $f^*(t)$ того интервала T^*, на который попадает точка t^*.

Решение. С учетом того, что $m_t = 1/\lambda$, формула (10.8) дает $f^*(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$, что представляет собой не что иное, как *закон Эрланга 2-го порядка* [см. формулу (10.0.3) при $k = 2$].

10.10*. На оси $0t$ имеется пальмовский поток событий с плотностью $f(t)$ интервала T между соседними событиями. Случайная точка t^* («инспектор») попадает куда-то на интервал T^* (рис. 10.10). Она делит его на два промежутка: Q — от ближайшего предыдущего события до t^* и H — от t^* до ближайшего последующего события. Найти распределение обоих этих промежутков.

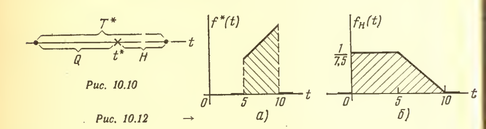


Рис. 10.10

Рис. 10.12 →

Решение. Предположим, что случайная величина T^* приняла значение s: $T^* = s$, и найдем условное распределение промежутка Q при этом условии. Обозначим его плотность $f_Q(t|s)$. Так как точка t^* бросается на ось $0t$ совершенно случайно (безотносительно к событиям потока), очевидно, она будет иметь равномерное распределение в пределах промежутка $T^* = s$:

$$f_Q(t|s) = 1/s \quad \text{при} \quad 0 < t < s. \tag{10.10.1}$$

Чтобы найти безусловное распределение $f_Q(t)$, надо осреднить плотность (10.10.1) с «весом» $f^*(s)$. Пользуясь формулой (10.8), получаем

$$f^*(s) = \frac{s}{m_t} f(s); \quad f_Q(t) = \int_0^\infty f_Q(t\,|\,s) f^*(s)\,ds.$$

Учитывая, что $f_Q(t|s)$ отлично от нуля только при $s > t$, можно написать

$$f_Q(t) = \int_t^\infty \frac{s}{s m_t} f(s)\,ds = \frac{1}{m_t} \int_t^\infty f(t)\,dt = \frac{1}{m_t}[1 - F(t)],$$

где $F(t)$ — функция распределения интервала T между событиями в потоке Пальма.

Итак,

$$f_Q(t) = \frac{1}{m_t}[1 - F(t)]. \tag{10.10.2}$$

Очевидно, то же распределение будет иметь и промежуток времени $H = T^* - Q$:

$$f_H(t) = \frac{1}{m_t}[1 - F(t)]. \qquad (10.10.3)$$

10.11. Пользуясь результатами предыдущей задачи, проверить решение задачи 10.6, полученное из других соображений.

Р е ш е н и е. Имеем $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$; $m_t = 1/\lambda$. По формуле (10.10.3)

$$f_H(t) = \lambda[1 - 1 + e^{-\lambda t}] = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0),$$

т. е. задача 10.6 решена верно.

10.12. Пассажир выходит на остановку автобуса в момент времени, никак не связанный с расписанием. Поток автобусов представляет собой поток Пальма с интервалами, имеющими равномерное распределение в пределах от 5 до 10 мин. Найти: 1) плотность распределения того интервала, на который попал пассажир; 2) плотность распределения времени H, которое ему придется ждать автобуса; 3) среднее время ожидания автобуса.

Р е ш е н и е. Имеем $f(t) = 1/5$ при $t \in (5, 10)$; $m_t = 7{,}5$.

1) По формуле (10.8) $f^*(t) = t/37{,}5$ при $t \in (5, 10)$. График плотности $f^*(t)$ показан на рис. 10.12, *а*.

$$2)\quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant 5; \\ (t-5)/5 & \text{при } 5 < t \leqslant 10; \\ 1 & \text{при } t > 10. \end{cases}$$

Отсюда по формуле (10.10.3)

$$f_H(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1/7{,}5 & \text{при } 0 < t < 5; \\ (10-t)/37{,}5 & \text{при } 5 < t < 10; \\ 0 & \text{при } t > 10. \end{cases}$$

График плотности $f_H(t)$ показан на рис. 10.12, *б*.

3) Среднее время ожидания

$$m_H = \int_0^5 \frac{t}{7{,}5}\,dt + \int_5^{10} t\,\frac{10-t}{37{,}5}\,dt \approx 6{,}11 \text{ мин.}$$

10.13. Рассматривается поток Эрланга k-го порядка с плотностью распределения интервала T между событиями:

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \qquad (10.13.1)$$

Найти функцию распределения $F_k(t)$ этого интервала.

Р е ш е н и е. Можно было бы найти функцию распределения по обычной формуле

$$F_k(t) = \int_0^t f_k(t)\,dt,$$

но проще найти ее исходя непосредственно из определения $F_k(t) = P\{T < t\}$.

Перейдем к противоположному событию и найдем $P\{T > t\}$. Свяжем начало отсчета 0 с одним из событий потока Эрланга и отложим от него вправо два участка: T (расстояние до следующего события потока Эрланга) и $t < T$ (рис. 10.13).

Для выполнения неравенства $T > t$ нужно, чтобы на участок t попало меньше чем k событий простейшего потока с интенсивностью λ (либо 0, либо 1, ..., либо $k-1$). Вероятность того, что на участок t попадет m событий, равна

$$P_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

Рис. 10.13

По правилу сложения вероятностей

$$P\{T > t\} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

откуда

$$F_k(t) = 1 - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = 1 - R(k-1, \lambda t), \qquad (10.13.2)$$

где $1 - R(m, a)$ — табулированная функция (см. приложение 2).

10.14*. Поток отказов ЭВМ представляет собой поток Эрланга k-го порядка с плотностью (10.13.1) интервала между отказами (восстановление машины после отказа происходит мгновенно). «Инспектор» прибывает в случайный момент времени t^* и ожидает первого отказа. Найти плотность распределения времени H, в течение которого ему придется ждать отказа, и его математическое ожидание m_H.

Р е ш е н и е. По формуле (10.10.3)

$$f_H(t) = \frac{1}{m_t}[1 - F_k(t)],$$

где $F_k(t)$ дается формулой (10.13.2), а $m_t = k/\lambda$. Отсюда

$$f_H(t) = \frac{\lambda}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda (\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (10.14.1)$$

Перепишем формулу (10.14.1) в виде

$$f_H(t) = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k} \frac{\lambda (\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \qquad (10.14.2)$$

Из (10.14.2) видно, что случайная величина H имеет распределение, «смешанное» из k эрланговских распределений разных порядков; с одинаковой вероятностью $1/k$ она имеет эрланговское распределение

1, 2, ..., k-го порядков. Математическое ожидание такой случайной величины найдем по формуле полного математического ожидания:

$$m_H = \mathrm{M}[H] = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k} \mathrm{M}[H \mid r], \qquad (10.14.3)$$

где $\mathrm{M}[H \mid r]$ — условное математическое ожидание случайной величины H при условии, что она распределена по закону Эрланга r-го порядка.

Находим по первой формуле (10.0.4) $\mathrm{M}[H \mid r] = r/\lambda$, откуда

$$m_H = \frac{1}{k\lambda} \sum_{r=1}^{k} r = \frac{(k+1)k}{2k\lambda} = \frac{k+1}{2\lambda}. \qquad (10.14.4)$$

10.15*. Пальмовский поток событий с плотностью распределения $f(t)$ интервала между событиями подвергается p-преобразованию (см. задачу 10.2). Случайная величина V — интервал между событиями в преобразованном потоке. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины V.

Решение. Случайная величина V представляет собой сумму случайного числа независимых случайных величин (см. задачу 8.63): $V = \sum_{k=1}^{Y} T_k$, где Y — дискретная случайная величина, имеющая геометрическое распределение $\mathrm{P}\{Y = m\} = pq^{m-1}$ $(m = 1, 2, ...)$, $q = 1 - p$, а каждая из случайных величин T_k имеет распределение $f(t)$.

Тогда последовательные интервалы между событиями в p-преобразованном потоке будут

$$V_1 = \sum_{k=1}^{Y_1} T_k; \quad V_2 = \sum_{j=1}^{Y_2} T_{j+Y_1}, ...,$$

где случайные величины $V_1, V_2, ...$ независимы, и преобразованный поток есть поток Пальма. В соответствии с задачей 8.63

$$m_V = \frac{m_t}{p}; \quad D_V = \frac{D_t}{p} + m_t^2 \frac{q}{p^2},$$

$$\text{где} \quad m_t = \int_0^\infty t f(t)\, dt; \quad D_t = \int_0^\infty (t - m_t)^2 f(t)\, dt.$$

Примечание. Можно доказать, что при многократном p-преобразовании потока Пальма получается поток, близкий к простейшему.

10.16. Найти закон распределения интервала T между событиями в потоке Пальма, если случайная величина T определяется из выражения $T = \sum_{k=1}^{Y} T_k$, т. е. представляет собой сумму случайного числа случайных слагаемых, где случайные величины T_k независимы и под-

чинены показательному закону с параметром λ, а случайная величина Y не зависит от них и имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы: $p_n = P\{Y = n\} = pq^{n-1}$ $(0 < p < 1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Решение. В задаче 8.62 было показано, что случайная величина T подчинена показательному закону с параметром λp, следовательно, рассматриваемый поток Пальма является простейшим с интенсивностью λp, который получается путем p-преобразования простейшего потока с интенсивностью λ. Это подтверждает правильность решения задачи 10.2.

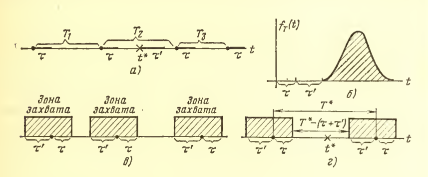


Рис. 10.17

10.17. Поток автобусов, приходящих на остановку, представляет собой поток Пальма; интервал T между ними имеет плотность распределения $f_T(t)$. Автобус находится на остановке в течение неслучайного времени τ. Пассажир, подойдя к остановке в случайный момент t^* (рис. 10.17, *а*), садится в автобус, если тот находится на остановке; если же автобуса нет, то ждет его в течение времени τ' и, если за это время автобус не подойдет, покидает остановку и идет пешком. Закон распределения $f_T(t)$ таков, что случайная величина T не может быть меньше, чем $\tau + \tau'$ (рис. 10.17, *б*). Найти вероятность того, что пассажир сядет в автобус.

Решение. Переходим к противоположному событию $\overline{A} = \{$пассажир не сядет в автобус$\}$. Это означает, что пассажир прибудет на остановку в момент t^*, когда на ней нет автобуса, и за время ожидания следующий автобус не придет. Каждое событие «подход автобуса к остановке» сопровождается «зоной захвата» пассажира; ширина этой зоны $\tau' + \tau$ (рис. 10.17, *в*).

Событие $\overline{A} = \{$пассажир не сел в автобус$\}$ соответствует попаданию точки t^* вне пределов зоны захвата (рис. 10.17, *г*). Точка t^* распределена равномерно по всей длине интервала T^*. Вероятность того, что она попадет на участок $T^* - (\tau + \tau')$, не вошедший в зону захвата, равна (по интегральной формуле полной вероятности)

$$P(\overline{A}) = \int_{\tau+\tau'}^{\infty} \frac{t-(\tau+\tau')}{t} f^*(t)\,dt = \int_{\tau+\tau'}^{\infty} \frac{t-(\tau+\tau')}{t} \frac{t}{m_t} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{m_t} \int_{\tau+\tau'}^{\infty} t f(t)\, dt - \frac{\tau+\tau'}{m_t} \int_{\tau+\tau'}^{\infty} f(t)\, dt,$$

где m_t — средний интервал между автобусами.

Вероятность того, что пассажир сядет в автобус, равна $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A})$.

10.18. Происходит преобразование простейшего потока с интенсивностью λ, состоящее в следующем. Если расстояние между соседними событиями T_i оказывается меньше какого-то допустимого предела t_0 («интервала безопасности»), то событие отодвигается от предыдущего

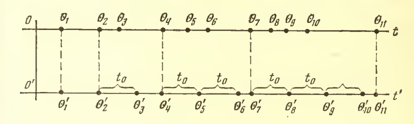


Рис. 10.18

на интервал t_0; если же $T_i > t_0$, то событие остается на своем месте (рис. 10.18). Является ли преобразованный поток, образованный точками $\Theta'_1, \Theta'_2, \ldots$ на оси $0't'$, простейшим? Является ли он потоком Пальма?

Р е ш е н и е. Ни тем, ни другим преобразованный поток не является, так как в нем имеется сколь угодно далеко идущее последействие. Например, «теснящиеся» на оси $0't'$ точки $\Theta_7, \Theta_8, \Theta_9, \Theta_{10}$ отодвигают каждую последующую точку на оси $0't'$ на отрезок времени, зависящий от моментов прихода событий и интервалов между ними в прошлом. Если t_0 много меньше среднего расстояния между событиями в исходном потоке: $t_0 \ll 1/\lambda$, то последействием в преобразованном потоке можно пренебречь.

10.19. Происходит наложение (суперпозиция) двух независимых потоков Пальма с плотностями распределения интервала между событиями $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Будет ли результирующий поток — потоком Пальма?

Р е ш е н и е. Суперпозиция двух потоков Пальма выглядит, как показано на рис. 10.19. Ясно, что интервалы $T_1, T_2, \ldots$ результирующего потока III не будут независимыми, так как их размеры могут быть обусловлены размерами одного и того же интервала на оси I или II. Например, T_1 и T_2 в сумме дают T_{II} и, значит, не являются независимыми. Однако эта зависимость быстро затухает по мере увеличения расстояния по времени между началами интервалов.

П р и м е ч а н и е. Можно доказать, что при суперпозиции достаточно большого числа независимых потоков Пальма со сравнимыми интенсивностями получается поток, близкий к простейшему.

10.20. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система S, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: s_1 — ЭВМ полностью исправна; s_2 — ЭВМ имеет незначительные неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи; s_3 — ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач; s_4 — ЭВМ полностью вышла из строя.

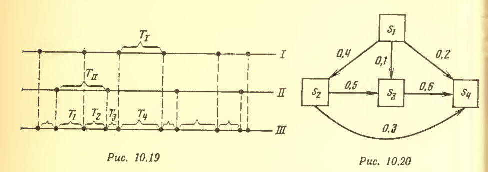


Рис. 10.19

Рис. 10.20

В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна (состояние s_1). Проверка ЭВМ производится в фиксированные моменты времени t_1, t_2, t_3. Процесс, протекающий в системе S, может рассматриваться как однородная марковская цепь с тремя шагами (первая, вторая, третья проверки ЭВМ). Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\| P_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{matrix} \right\|.$$

Определить вероятности состояний ЭВМ после трех проверок.

Решение. Граф состояний ЭВМ имеет вид, показанный на рис. 10.20. Против каждой стрелки проставлена соответствующая вероятность перехода. Начальные вероятности состояний $p_1(0) = 1$; $p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0$.

По формуле (10.0.14), учитывая в сумме вероятностей только те состояния, из которых возможен непосредственный переход в данное, находим:

$$p_1(1) = p_1(0)\, P_{11} = 1 \cdot 0,3 = 0,3;$$
$$p_2(1) = p_1(0)\, P_{12} = 1 \cdot 0,4 = 0,4;$$
$$p_3(1) = p_1(0)\, P_{13} = 1 \cdot 0,1 = 0,1;$$
$$p_4(1) = p_1(0)\, P_{14} = 1 \cdot 0,2 = 0,2;$$
$$p_1(2) = p_1(1)\, P_{11} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09;$$
$$p_2(2) = p_1(1)\, P_{12} + p_2(1)\, P_{22} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,20;$$

$$p_3(2) = p_1(1)P_{13} + p_2(1)P_{23} + p_3(1)P_{33} = 0{,}27;$$

$$p_4(2) = p_1(1)P_{14} + p_2(1)P_{24} + p_3(1)P_{34} + p_4(1)P_{44} = 0{,}44;$$

$$p_1(3) = p_1(2)P_{11} = 0{,}09 \cdot 0{,}3 = 0{,}027;$$

$$p_2(3) = p_1(2)P_{12} + p_2(2)P_{22} = 0{,}09 \cdot 0{,}4 + 0{,}20 \cdot 0{,}2 = 0{,}076;$$

$$p_3(3) = p_1(2)P_{13} + p_2(2)P_{23} + p_3(2)P_{33} = 0{,}217;$$

$$p_4(3) = p_1(2)P_{14} + p_2(2)P_{24} + p_3(2)P_{34} + p_4(2)P_{44} = 0{,}680.$$

Итак, вероятности состояний ЭВМ после трех проверок: $p_1(3) = 0{,}027$; $p_2(3) = 0{,}076$; $p_3(3) = 0{,}217$; $p_4(3) = 0{,}680$.

10.21. Точка S «блуждает» по оси абсцисс $0x$ (рис. 10.21, *а*) по следующему закону: на каждом шаге она с вероятностью 0,5 остается на месте, с вероятностью 0,3 перескакивает на единицу вправо и с вероятностью 0,2 — влево. Состояние системы S после k шагов определяется одной координатой (абсциссой) точки S. Начальное положение точки — начало координат. Рассматривая последовательность положений точки S как цепь Маркова, найти вероятность того, что она после четырех шагов окажется от начала координат не дальше чем на расстоянии, равном единице.

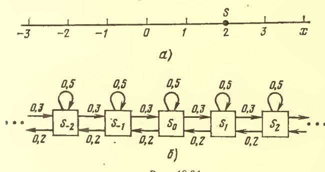


Рис. 10.21

Решение. Обозначим состояние системы (точки S) через s_i, где i — координата S на оси абсцисс. Размеченный граф состояний показан на рис. 10.21, *б*. (Здесь для наглядности проставлены «петли», соответствующие задержке S в прежнем положении.)

Последовательность состояний образует цепь Маркова с бесконечным числом состояний. Переходные вероятности P_{ij} отличны от нуля только в случае $j = i$; $j = i - 1$; $j = i + 1$; $P_{i,i} = 0{,}5$; $P_{i,i+1} = 0{,}3$; $P_{i,i-1} = 0{,}2$. Все остальные переходные вероятности равны нулю. Искомая вероятность P равна сумме вероятностей: $p_0(4) + p_1(4) + p_{-1}(4)$. Найдем их, пользуясь рекуррентными соотношениями (10.0.14).

Имеем $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = p_{-1}(0) = \ldots = 0$. Далее,

$$p_0(1) = p_0(0)P_{0,0} = 0{,}5;\ p_1(1) = p_0(0)P_{0,1} = 0{,}3;\ p_{-1}(1) = p_0(1)P_{0,-1} = 0{,}2;$$

$$p_0(2) = p_0(1)P_{0,0} + p_1(1)P_{1,0} + p_{-1}(1)P_{-1,0} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \times \times 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}37;$$

$$p_1(2) = p_0(1)P_{0,1} + p_1(1)P_{1,1} = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}30;$$

$$p_2(2) = p_1(1)P_{12} = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09;$$

$$p_{-1}(2) = p_0(1)P_{0,-1} + p_{-1}(1)P_{-1,-1} = 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}20;$$

$$p_{-2}(2) = p_{-1}(1)P_{-1,-2} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04;$$

$$p_0(3) = p_0(2)P_{0,0} + p_1(2)P_{1,0} + p_{-1}(2)P_{-1,0} = 0{,}305;$$

$$p_1(3) = p_0(2)P_{0,1} + p_1(2)P_{1,1} + p_2(2)P_{2,1} = 0{,}279;$$

$$p_2(3) = p_1(2)P_{1,2} + p_2(2)P_{2,2} = 0{,}135;$$

$$p_3(3) = p_2(2)P_{2,3} = 0{,}027;$$

$$p_{-1}(3) = p_{-2}(2)P_{-2,-1} + p_{-1}(2)P_{-1,-1} + p_0(2)P_{0,-1} = 0{,}186;$$

$$p_{-2}(3) = p_{-2}(2)P_{-2,-2} + p_{-1}(2)P_{-1,-2} = 0{,}060;$$

$$p_{-3}(3) = p_{-2}(2)P_{-2,-3} = 0{,}008;$$

$$p_0(4) = p_1(3)P_{1,0} + p_0(3)P_{0,0} + p_{-1}(3)P_{-1,0} \approx 0{,}264;$$

$$p_1(4) = p_2(3)P_{2,1} + p_1(3)P_{1,1} + p_0(3)P_{0,1} \approx 0{,}257;$$

$$p_{-1}(4) = p_0(3)P_{0,-1} + p_{-1}(3)P_{-1,-1} + p_{-2}(3)P_{-2,-1} \approx 0{,}172.$$

Искомая вероятность

$$p = p_0(4) + p_1(4) + p_{-1}(4) \approx 0{,}693.$$

Итак, вероятность события A, состоящего в том, что за четыре шага точка S окажется от начала координат на расстоянии, не большем единицы, равна 0,693.

10.22. В условиях предыдущей задачи найти вероятности того, что за четыре шага точка S ни разу не удалится от начала координат дальше, чем на единицу.

Р е ш е н и е. Обозначим $\tilde{p}_0(k)$, $\tilde{p}_1, k)$, $\tilde{p}_{-1}(k)$ вероятности состояний s_0, s_1, s_{-1} при условии, что до k-го шага включительно точка S ни разу не удалялась от начала координат больше, чем на единицу.

С первого взгляда здесь процесс не является цепью Маркова (так как вероятности будущих состояний зависят от «предыстории» — была ли точка S хотя бы один раз дальше, чем на одну единицу, от начала координат), но его можно свести к цепи Маркова, если ввести еще одно состояние s^*—точка хотя бы один раз была от начала координат на расстоянии, большем, чем единица.

Граф состояний показан на рис. 10.22. Из состояния s^* нет перехода ни в какое другое; такое состояние называется в теории марковских цепей «поглощающим». Вероятность события A = {точка S за четыре шага ни разу не отойдет от начала координат на расстояние, большее, чем единица} вычислится как сумма вероятностей $\tilde{p}_0(4) + \tilde{p}_{-1}(4) + \tilde{p}_1(4)$ для системы с графом состояний, соответствующим рис. 10.22. Предоставляем читателю вычислить эти вероятности самостоятельно.

10.23. Система S — техническое устройство, состоящее из m узлов и время от времени (в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_k$) подвергающееся профилактическому осмотру и ремонту. После каждого шага (момента осмотра и ремонта) система может оказаться в одном из следующих состояний: s_0 — все узлы исправны (ни один не заменялся новым); s_1 — один узел заменен новым, остальные исправны; s_2 — два узла заменены новыми, остальные исправны; ...; s_i — i узлов ($i < m$) заменены новыми, остальные исправны; ...; s_m — все m узлов заменены новыми.

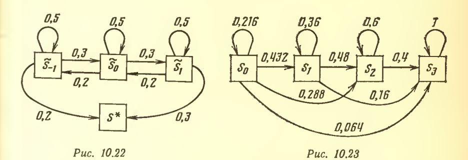


Рис. 10.22

Рис. 10.23

Вероятность того, что в момент профилактики узел придется заменить новым, равна p (независимо от состояния других узлов). Рассматривая состояния системы S как марковскую цепь, найти переходные вероятности и для $m = 3$, $p = 0{,}4$ вычислить вероятности состояний системы S после трех шагов (в начальный момент все узлы исправны).

Решение. Обозначая $q = 1 - p$, запишем переходные вероятности цепи. Для любого состояния системы s_i вероятность P_{ij} равна нулю при $j < i$; вероятность P_{ii} равна вероятности того, что на данном шаге ни один узел не придется заменить новым, т. е. $m - i$ еще не замененных узлов остаются в составе устройства: $P_{ii} = q^{m-i}$. При $i < j$ вероятность перехода P_{ij} равна вероятности того, что на данном шаге из $m - i$ еще не замененных узлов $j - i$ придется заменить новыми. Пользуясь биномиальным распределением, находим $P_{ij} = C_{m-i}^{j-i} p^{j-i} q^{m-j+i}$. Состояние s_m является поглощающим. Для $m = 3$, $p = 0{,}4$ граф состояний системы имеет вид, показанный на рис. 10.23:

$$\| P_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} 0{,}216 & 0{,}432 & 0{,}288 & 0{,}064 \\ 0 & 0{,}36 & 0{,}48 & 0{,}16 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{matrix} \right\|.$$

Имеем $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0$. Находим вероятности состояний после одного, двух, трех шагов:

$$p_0(1) = 0{,}216; \quad p_1(1) = 0{,}432;$$

$$p_2(1) = 0{,}288; \quad p_3(1) = 0{,}064;$$

$$p_1(2) = p_1(1) P_{11} + p_0(1) P_{01} \approx 0{,}249;$$
$$p_2(2) = p_2(1) P_{22} + p_0(1) P_{02} + p_1(1) P_{12} \approx 0{,}442;$$
$$p_3(2) = p_3(1) P_{33} + p_2(1) P_{23} + p_1(1) P_{13} + p_0(1) P_{03} \approx 0{,}262;$$
$$p_0(3) = p_0(2) P_{00} \approx 0{,}010;$$
$$p_1(3) = p_1(2) P_{11} + p_0(2) P_{01} \approx 0{,}110;$$
$$p_2(3) = p_2(2) P_{22} + p_0(2) P_{02} + p_1(2) P_{12} \approx 0{,}398;$$
$$p_3(3) = p_3(2) P_{33} + p_0(2) P_{03} + p_1(2) P_{13} + p_2(2) P_{23} \approx 0{,}482.$$

10.24. В моменты времени t_1, t_2, t_3 производится осмотр ЭВМ. Возможные состояния ЭВМ: s_0 — полностью исправна; s_1 — незна-

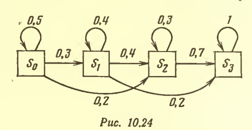


Рис. 10.24

чительные неисправности, которые позволяют эксплуатировать ЭВМ; s_2 — существенные неисправности, дающие возможность решать ограниченное число задач; s_3 — ЭВМ полностью вышла из строя.

Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\|P_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Построить граф состояний. Найти вероятности состояний ЭВМ после одного, двух, трех осмотров, если в начале (при $t = 0$) ЭВМ была полностью исправна.

Решение. Граф состояний показан на рис. 10.24.

$$p_0(1) = p_0(0) P_{00} = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5;$$
$$p_1(1) = p_0(0) P_{01} = 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3;$$
$$p_2(1) = p_0(0) P_{02} = 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2;$$
$$p_0(2) = p_0(1) P_{00} = 0{,}25; \quad p_1(2) = p_0(1) P_{01} + p_1(1) P_{11} = 0{,}27;$$
$$p_2(2) = p_0(1) P_{02} + p_1(1) P_{12} + p_2(1) P_{22} = 0{,}28; \quad p_3(2) = p_2(1) \times$$
$$\times P_{23} + p_1(1) P_{13} = 0{,}20; \quad p_0(3) = p_0(2) P_{00} = 0{,}125;$$
$$p_1(3) = p_0(2) P_{01} + p_1(2) P_{11} = 0{,}183;$$
$$p_2(3) = p_0(2) P_{02} + p_1(2) P_{12} + p_2(2) P_{22} = 0{,}242;$$
$$p_3(3) = p_1(2) P_{13} + p_2(2) P_{23} + p_3(2) P_{33} = 0{,}450.$$

10.25. Рассматривается процесс работы ЭВМ. Поток отказов (сбоев) работающей ЭВМ — простейший с интенсивностью λ. Если ЭВМ дает сбой, то он немедленно обнаруживается, и обслуживающий персонал приступает к устранению неисправности (ремонту). Закон распределения времени ремонта — показательный с параметром μ: $\varphi(t) = \mu e^{-\mu t}$ $(t > 0)$. В начальный момент ($t = 0$) ЭВМ исправна. Найти: 1) вероятность того, что в момент t ЭВМ будет работать; 2) вероятность того, что за время $(0, t)$ ЭВМ даст хотя бы один сбой; 3) финальные вероятности состояний ЭВМ.

Р е ш е н и е. 1) Состояния системы S (ЭВМ) следующие: s_0 — исправна, работает; s_1 — неисправна, ремонтируется. Размеченный граф состояний дан на рис. 10.25, *а*.

Рис. 10.25

Рис. 10.26

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний $p_0(t)$ и $p_1(t)$ имеют вид

$$\frac{dp_0}{dt} = \mu p_1 - \lambda p_0; \quad \frac{dp_1}{dt} = \lambda p_0 - \mu p_1. \qquad (10.25.1)$$

Из этих уравнений одно (любое) может быть отброшено, так как для любого момента t имеем $p_0 + p_1 = 1$. Подставляя в первое из уравнений (10.25.1) $p_1 = 1 - p_0$, получаем одно дифференциальное уравнение относительно p_0:

$$dp_0/dt = \mu - (\lambda + \mu)\, p_0.$$

Решая это уравнение при начальном условии $p_0(0) = 1$, получаем

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[1 + \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}\right], \qquad (10.25.2)$$

откуда

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right]. \qquad (10.25.3)$$

2) Для нахождения вероятности $\tilde{p}(t)$ того, что за время t ЭВМ даст хотя бы один сбой, введем новые состояния системы S: $\tilde{s}_0$ — ЭВМ ни разу не давала сбоя; $\tilde{s}_1$ — ЭВМ хотя бы один раз дала сбой. Состояние $\tilde{s}_1$ будет «поглощающим» (см. рис. 10.25, *б*).

Решая уравнение Колмогорова $d\tilde{p}_0/dt = -\lambda\tilde{p}_0$ при начальном условии $\tilde{p}_0(0) = 1$, получаем $\tilde{p}_0(t) = e^{-\lambda t}$, откуда $\tilde{p}_1(t) = 1 - \tilde{p}_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Итак, вероятность того, что за время t ЭВМ даст хотя бы один сбой, равна $\tilde{p}_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Эту вероятность в данном

случае можно было бы вычислить и проще, как вероятность того, что за время t появится хотя бы одно событие (сбой) в простейшем потоке сбоев с интенсивностью λ.

3) Из уравнений (10.25.2), (10.25.3) при $t \to \infty$ получим финальные вероятности состояний: $p_0 = \mu/(\lambda + \mu)$; $p_1 = \lambda/(\lambda+\mu)$, которые, впрочем, можно было бы получить непосредственно из графа состояний, пользуясь схемой гибели и размножения (предоставим читателю сделать это самостоятельно).

10.26. В условиях предыдущей задачи 10.25 неисправность ЭВМ обнаруживается не сразу, а по прошествии некоторого времени, имеющего показательное распределение с параметром ν. Написать и решить уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Найти финальные вероятности состояний (непосредственно по графу состояний).

Р е ш е н и е. Состояния системы: s_0 — ЭВМ исправна, работает; s_1 — ЭВМ неисправна, но это не обнаружено; s_2 — ЭВМ ремонтируется. Граф состояний дан на рис. 10.26.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний будут:

$$\frac{dp_0}{dt} = \mu p_2 - \lambda p_0; \quad \frac{dp_1}{dt} = \lambda p_0 - \nu p_1; \quad \frac{dp_2}{dt} = \nu p_1 - \mu p_2. \quad (10.26.1)$$

Решать эту систему будем с помощью преобразования Лапласа. Тогда уравнения (10.26.1) с учетом начальных условий для изображений π_i вероятностей p_i примут вид:

$$s\pi_0 = \mu\pi_2 - \lambda\pi_0 + 1; \quad s\pi_1 = \lambda\pi_0 - \nu\pi_1; \quad s\pi_2 = \nu\pi_1 - \mu\pi_2.$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, получаем следующие уравнения для изображений:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{s+\nu}\pi_0; \quad \pi_2 = \frac{\nu}{s+\mu}\pi_1 = \frac{\nu\lambda}{(s+\nu)(s+\mu)}\pi_0;$$

$$\pi_0 = \frac{(s+\nu)(s+\mu)}{s(s^2 + s(\mu+\nu+\lambda) + \nu\lambda + \nu\mu + \lambda\mu)},$$

Обозначим

$$a = -\frac{\mu+\nu+\lambda}{2} + \sqrt{\frac{(\mu+\nu+\lambda)^2}{4} - \nu\lambda - \nu\mu - \lambda\mu};$$

$$b = -\frac{\mu+\nu+\lambda}{2} - \sqrt{\frac{(\mu+\nu+\lambda)^2}{4} - \nu\lambda - \nu\mu - \lambda\mu}.$$

Тогда выражения для вероятностей примут вид:

$$p_0(t) = \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} + (\nu+\mu)\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} + \mu\nu\left[\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a-b)}\right];$$

$$p_1(t) = \lambda\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} + \lambda\mu\left[\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a-b)}\right];$$

$$p_2(t) = \nu\lambda\left[\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a-b)}\right].$$

Для нахождения финальных вероятностей можно воспользоваться как изображениями, так и самими вероятностями:

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} p_0(t) = \lim_{s\to 0} s\pi_0(s) = \frac{\mu\nu}{\lambda\mu+\lambda\nu+\nu\mu};$$

$$p_1 = \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu+\lambda\nu+\nu\mu}; \quad p_2 = 1 - p_0 - p_1 = \frac{\lambda\nu}{\lambda\mu+\lambda\nu+\nu\mu}. \qquad (10.26.2)$$

Финальные вероятности состояний можно найти и непосредственно по графу рис. 10.26: $\mu p_2 = \lambda p_0$; $\lambda p_0 = \nu p_1$; $\nu p_1 = \mu p_2$. Из этих уравнений любое (например, последнее) можно отбросить. Выражая p_2 через p_0 и p_1: $p_2 = 1 - p_0 - p_1$, получаем два уравнения:

$$\mu(1 - p_0 - p_1) = \lambda p_0; \ \lambda p_0 = \nu p_1.$$

Решение этих уравнений даст те же результаты (10.26.2).

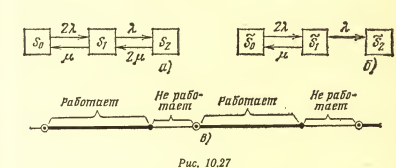


Рис. 10.27

10.27. Электронное техническое устройство (ЭТУ) состоит из двух одинаковых узлов, которые могут заменять друг друга. Для работы ЭТУ достаточно, чтобы работал хотя бы один узел. При выходе из строя одного из узлов ЭТУ продолжает нормально функционировать за счет работы другого узла. Поток отказов каждого узла — простейший с параметром λ. При выходе из строя узла он сразу начинает ремонтироваться. Время ремонта узла — показательное с параметром μ. В начальный момент (при $t = 0$) оба узла работают. Найти следующие характеристики работы ЭТУ:

1) Вероятности состояний: s_0 — исправны оба узла; s_1 — исправен один узел, другой ремонтируется; s_2 — ремонтируются оба узла (ЭТУ не работает) как функции времени.

2) Вероятность $\tilde{p}(t)$ того, что за время t ЭТУ ни разу не прекратит работу.

3) Финальные вероятности состояний ЭТУ.

4) Для предельного (стационарного) режима ЭТУ среднее относительное время, в течение которого ЭТУ будет работать.

5) Для того же предельного режима среднее время $\bar{t}_p$ бесперебойной работы ЭТУ (от включения после восстановления до очередного выхода из строя).

Р е ш е н и е. Граф состояний ЭТУ дан на рис. 10.27, *а* (у левой верхней стрелки стоит 2λ, так как работают и могут выходить из строя

два узла; по аналогичной причине стоит 2μ у правой нижней стрелки, так как оба узла ремонтируются).

1) Уравнения Колмогорова имеют вид:

$$\frac{dp_0}{dt} = \mu p_1 - 2\lambda p_0; \quad \frac{dp_1}{dt} = 2\lambda p_0 + 2\mu p_2 - (\lambda + \mu) p_1;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda p_1 - 2\mu p_2. \qquad (10.27.1)$$

При этом должно выполняться условие $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

Решая эту систему уравнений при начальных условиях $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = p_2(0) = 0$, получаем

$$p_0(t) = \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} + (\lambda + 3\mu)\frac{e^{at} - e^{bt}}{a+b} + 2\mu^2\left[\frac{1}{ab} + \right.$$

$$\left. + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a-b)}\right], \text{ где } a = -(\lambda+\mu); \; b = -2(\lambda+\mu);$$

$$a - b = \lambda + \mu; \; ab = 2(\lambda+\mu)^2;$$

$$p_1(t) = \frac{a^2 e^{at} - b^2 e^{bt}}{\mu(a-b)} + \frac{(\lambda+3\mu)(ae^{at} - be^{bt})}{\mu(a-b)} + \frac{2\mu(e^{at} - e^{bt})}{a-b} + \frac{2\lambda}{\mu} p_0(t).$$

Из полученных выражений находим:

$$p_2(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t); \; p_2(0) = 0.$$

2) Чтобы найти вероятность $\tilde{p}(t)$, сделаем состояние s_2 (ЭТУ прекратило работу) поглощающим $(\tilde{s}_2)$ (рис. 10.27, *б*). Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний ЭТУ будут

$$d\tilde{p}_0/dt = \mu\tilde{p}_1 - 2\lambda\tilde{p}_0; \; d\tilde{p}_1/dt = 2\lambda\tilde{p}_0 - (\lambda+\mu)\tilde{p}_1; \; d\tilde{p}_2/dt = \lambda p_1.$$

Решая первые два уравнения при начальных условиях $\tilde{p}_0(0) = 1$, $\tilde{p}_1(0) = 0$, получаем

$$\tilde{p}_0(t) = \frac{\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + (\lambda + \mu)\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta},$$

где

$$\alpha = \frac{-(3\lambda+\mu) + \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2}; \qquad \beta = \frac{-(3\lambda+\mu) - \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2}$$

(величины α и β отрицательны при любых положительных значениях λ и μ). Далее,

$$\tilde{p}_1(t) = \frac{1}{\mu}\frac{d\tilde{p}_0}{dt} + \frac{2\lambda}{\mu}\tilde{p}_0 = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\alpha^2 e^{\alpha t} - \beta^2 e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + \right.$$

$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}}{\alpha - \beta}\right] + \frac{2\lambda}{\mu}\tilde{p}_0(t).$$

Искомая вероятность $\tilde{p}(t) = \tilde{p}_0(t) + \tilde{p}_1(t)$. Заметим, что функция $\tilde{p}(t)$ является монотонно убывающей, при этом $\tilde{p}(0) = 1$; $p(\infty) = 0$.

3) Финальные вероятности состояний найдем по графу рис. 10.27, *а* и общим формулам (10.0.23) для схемы гибели и размножения

$$p_1 = \frac{2\lambda}{\mu} p_0; \quad p_2 = \frac{2\lambda^2}{2\mu^2} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0; \quad p_0 + p_1 + p_2 = 1;$$

$$p_0 = [1 + 2\lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2]^{-1} = \mu^2/(\lambda + \mu)^2.$$

4) Среднее относительное время, которое ЭТУ будет работать, равно

$$1 - p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2.$$

5) Величина $\bar{t}_р$ есть математическое ожидание времени $T_р$, проходящего между моментом включения ЭТУ в работу и моментом ее следующего выхода из строя.

Представим работу ЭТУ в стационарном режиме как состоящую из ряда циклов: «работает» и «не работает» (см. рис. 10.27, *в*, где участки работы показаны утолщенной линией). Среднее время $\bar{t}_{нр}$, в течение которого ЭТУ не работает (математическое ожидание длительности нерабочего периода), очевидно равно $1/(2\mu)$ (так как на ЭТУ, находящееся в состоянии «не работает», действует поток переходов в «рабочее» состояние с интенсивностью 2μ).

Далее, отношение среднего времени бесперебойной работы $\bar{t}_р$ к среднему времени «не работы» $\bar{t}_{нр}$ равно отношению финальной вероятности $1 - p_2$ того, что ЭТУ работает, к вероятности p_2 того, что оно не работает: $\bar{t}_р/\bar{t}_{нр} = (1 - p_2)/p_2$. Отсюда, учитывая, что $\bar{t}_{нр} = 1/(2\mu)$,

$$\bar{t}_р = \bar{t}_{нр} = \frac{1 - p_2}{p_2} = \frac{1}{2\mu} \frac{1 - p_2}{p_2}.$$

10.28. Условия и вопросы те же, что и в задаче 10.27, с той разницей, что пока один из узлов работает, другой находится в «холодном резерве» и выходить из строя не может. При включении резервного узла он немедленно начинает работать и подвергается потоку отказов с интенсивностью λ.

Рис. 10.28

Решение. Граф состояний ЭТУ будет иметь вид, показанный на рис. 10.28, *а*, граф с «поглощающим состоянием» — на рис. 10.28, *б*.

Ответы на вопросы:

$$1)\ p_0(t)=\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}+(\lambda+3\mu)\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}+2\mu^2\left[\frac{1}{ab}+\right.$$

$$\left.+\frac{be^{at}-ae^{bt}}{ab(a-b)}\right];\quad p_1(t)=\frac{a^2e^{at}-b^2e^{bt}}{\mu(a-b)}+\frac{(\lambda+3\mu)}{\mu(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})+$$

$$+\frac{2\mu}{a-b}[e^{at}-e^{bt}]+\frac{\lambda}{\mu}p_0(t);\quad p_2(t)=1-p_0(t)-p_1(t);$$

$$a=\frac{-(2\lambda+3\mu)+\sqrt{4\mu\lambda+\mu^2}}{2};\quad b=\frac{-(2\lambda+3\mu)+\sqrt{4\mu\lambda+\mu^2}}{2}.$$

$$2)\ \tilde{p}_0(t)=\frac{\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{\beta t}}{\alpha-\beta}+(\lambda+\mu)\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta};$$

$$\tilde{p}_1(t)=\frac{1}{\mu}\left[\frac{\alpha^2e^{\alpha t}-\beta^2e^{\beta t}}{\alpha-\beta}+(\lambda+\mu)\frac{\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{\beta t}}{\alpha-\beta}\right]+\frac{\lambda}{\mu}\tilde{p}_0(t);$$

$$\tilde{p}_2(t)=1-\tilde{p}_0(t)-\tilde{p}_1(t);\quad \alpha=\frac{-(\lambda 2+\mu)+\sqrt{4\lambda\mu+\mu^2}}{2};$$

$$\beta=\frac{-(\lambda^2+\mu)-\sqrt{4\lambda\mu+\mu^2}}{2};\quad \tilde{p}(t)=1-\tilde{p}_2(t);$$

$$3)\ p_1=\frac{\lambda}{\mu}p_0;\ p_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2p_0;\quad p_0=\left[1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right]^{-1}$$

$$4)\ 1-p_2;\qquad 5)\ \bar{t}_p=\frac{1}{2\mu}\,\frac{1-p_2}{p_2}.$$

10.29. Условия задачи 10.27 изменены таким образом, что неработающий узел находится в «облегченном резерве» и выходит из строя с интенсивностью $\lambda' < \lambda$. 1) Построить граф состояний ЭТУ, написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. 2) Не решая этих уравнений, найти финальные вероятности состояний; вычислить их для $\lambda = 1$; $\lambda' = 0{,}5$, $\mu = 2$. 3) Для этих же численных данных найти среднее время $\bar{t}_p$ бесперебойной работы ЭТУ.

Рис. 10.29

Решение. 1) Граф состояний показан на рис. 10.29. Уравнения Колмогорова:

$$\frac{dp_0}{dt}=-(\lambda+\lambda')p_0+\mu p_1;\quad \frac{dp_1}{dt}=-(\lambda+\mu)p_1+(\lambda+\lambda')p_0+$$

$$+2\mu p_2;\quad p_0+p_1+p_2=1.$$

2) Финальные вероятности состояний найдем, пользуясь общими формулами (10.0.23) для схемы гибели и размножения:

$$p_1 = \frac{\lambda+\lambda'}{\mu}\, p_0;\ p_2 = \frac{(\lambda+\lambda')\,\lambda}{2\mu^2}\, p_0;\ p_0 = \left\{1 + \frac{\lambda+\lambda'}{\mu} + \frac{(\lambda+\lambda')\,\lambda}{2\mu^2}\right\}^{-1}.$$

Подставляя сюда $\lambda = 1$, $\lambda' = 0{,}5$, $\mu = 2$, получаем

$$p_0 = \left\{1 + \frac{1{,}5}{2} + \frac{1{,}5 \cdot 1}{8}\right\}^{-1} \approx 0{,}516;\ p_1 \approx 0{,}387;\ p_2 \approx 0{,}097.$$

3) $\bar{t}_p = \frac{1}{4}\,\frac{1-p_2}{p_2} \approx 2{,}32.$

10.30. В состав ЭВМ входят четыре накопителя на магнитных дисках (НМД). Бригада в составе четырех человек обслуживающего персонала проводит профилактический ремонт каждого диска. Суммарный поток моментов окончания ремонтов для всей бригады — пуассоновский с интенсивностью $\lambda(t)$. После окончания ремонта диск проверяется; с вероятностью p он оказывается работоспособным (время проверки мало, и им можно пренебречь по сравнению со временем профилактики). Если диск оказался неработоспособным, то вновь проводится его профилактика (время, потребное на нее, не зависит от того, проводилась ли ранее профилактика) и т. д. В начальный момент все НМД нуждаются в профилактическом ремонте.

$s_0 \xrightarrow{p\lambda(t)} s_1 \xrightarrow{p\lambda(t)} s_2 \xrightarrow{p\lambda(t)} s_3 \xrightarrow{p\lambda(t)} s_4$

Рис. 10.30

Построить граф состояний для системы S (четыре НМД), написать дифференциальные уравнения для вероятностей состояний. Найти M_τ — математическое ожидание числа дисков, успешно прошедших профилактику к моменту τ.

Решение. s_0 — все четыре НМД нуждаются в профилактическом ремонте; s_1 — один НМД успешно прошел профилактику, а три НМД нуждаются в профилактическом ремонте; s_2 — два НМД успешно прошли профилактику, а два нуждаются в профилактическом ремонте; s_3 — три НМД успешно прошли профилактику, один нуждается в профилактическом ремонте; s_4 — все четыре НМД успешно прошли профилактику.

То, что каждый профилактический ремонт заканчивается успешно с вероятностью p, равносильно p-преобразованию потока окончаний ремонтов, после которого он остается пуассоновским, но с интенсивностью $p\lambda(t)$.

Граф состояний показан на рис. 10.30. Уравнения Колмогорова:

$$dp_0/dt = -p\lambda(t)\,p_0;\ dp_1/dt = p\lambda(t)\,(p_0 - p_1);\ dp_2/dt = p\lambda(t)(p_1 - p_2);\ dp_3/dt = p\lambda(t)\,(p_2 - p_3);\ dp_4/dt = p\lambda(t)\,p_3. \quad (10.30.1)$$

Начальные условия $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = \ldots = p_4(0) = 0$.

Математическое ожидание числа дисков, успешно прошедших профилактику к моменту τ, равно

$$M_\tau = \sum_{i=1}^{4} i p_i(\tau). \qquad (10.30.2)$$

При постоянной интенсивности λ решениями уравнений (10.30.1) будут:

$$p_0(t) = e^{-\lambda pt}; \; p_1(t) = \lambda pt e^{-\lambda pt}; \; p_2(t) = \frac{(\lambda pt)^2}{2} e^{-\lambda pt};$$

$$p_3(t) = \frac{(\lambda pt)^3}{3!} e^{-\lambda pt}; \; p_4(t) = 1 - \sum_{i=0}^{3} p_i(t).$$

10.31. В условиях предыдущей задачи за каждым членом бригады закрепляется свой НМД, который он ремонтирует. Поток окончаний профилактики, приходящийся на одного члена бригады, имеет интенсивность $\lambda(t)/4$. Ответить на вопросы предыдущей задачи.

$s_0 \xrightarrow{p\lambda(t)} s_1 \xrightarrow{\frac{3}{4}p\lambda(t)} s_2 \xrightarrow{\frac{1}{2}p\lambda(t)} s_3 \xrightarrow{\frac{1}{4}p\lambda(t)} s_4$

Рис. 10.31

Р е ш е н и е. Граф состояний дан на рис. 10.31. Уравнения Колмогорова:

$$dp_0/dt = -p\lambda(t)\, p_0; \; dp_1/dt = p\lambda(t)\,(p_0 - (3/4)\, p_1); \; dp_2/dt = p\lambda(t) \times$$
$$\times ((3/4)\, p_1 - (1/2)\, p_2); \; dp_3/dt = p\lambda(t)\,((1/2)\, p_2 - (1/4)\, p_3);$$
$$dp_4/dt = (1/4)\, p\lambda(t)\, p_3.$$

Выражение (10.30.2) для M_τ сохраняется.

10.32. Техническое устройство (ТУ) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ. Отказ обнаруживается не сразу, а через случайное время, распределенное показательно с параметром ν. Как только отказ обнаружен, производится осмотр ТУ, в результате которого оно либо направляется в ремонт (вероятность этого p), либо списывается и заменяется новым. Время осмотра — показательное с параметром γ, время ремонта — показательное с параметром μ, время замены списанного ТУ новым — показательное с параметром $\varkappa$. Найти финальные вероятности состояний ТУ. Определить: 1) какую долю времени в среднем ТУ будет работать нормально; 2) какую долю времени ТУ будет работать с необнаруженным отказом (давать брак); 3) какова средняя стоимость ремонтов ТУ и его замен за единицу времени, если средняя стоимость ремонта равна r, а нового ТУ равна c; 4) какова средняя величина потерь за единицу времени от ТУ, работающего иногда с необнаруженным отказом, если такое ТУ приносит в единицу времени убыток l.

Р е ш е н и е. Состояния ТУ: s_0 — исправно, работает; s_1 — неисправно, но отказ не обнаружен, дает брак; s_2 — неисправность обна-

ружена, ведется осмотр; s_3 — ремонтируется; s_4 — заменяется новым. Граф состояний дан на рис. 10.32.

Линейные алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$\lambda p_0 = \mu p_3 + \varkappa p_4; \lambda p_0 = \nu p_1; \nu p_1 = \gamma p_2; p\gamma p_2 = \mu p_3;$$

$$(1-p)\gamma p_2 = \varkappa p_4.$$

Нормировочное условие $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Решая эти уравнения, получаем:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\nu} + \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{p\lambda}{\mu} + \frac{(1-p)\lambda}{\varkappa}\right]^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\nu} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda}{\gamma} p_0; \quad p_3 = \frac{p\lambda}{\mu} p_0; \quad p_4 = \frac{(1-p)\lambda}{\varkappa} p_0.$$

1) Доля времени нормальной работы ТУ равна p_0; 2) p_1; 3) ТУ проводит в среднем долю времени p_3 в состоянии ремонта; каждый ремонт длится в среднем $1/\mu$; поток отремонтированных ТУ, выходящих из состояния s_3, имеет интенсивность μp_3; средняя стоимость ремонтов в единицу времени $r\mu p_3$. Аналогично средняя стоимость новых ТУ в единицу времени $c\varkappa p_4$; общая средняя стоимость того и другого равна $r\mu p_3 + c\varkappa p_4$. 4) Средние потери от работы ТУ в неисправном состоянии за единицу времени равны $l\nu p_1$.

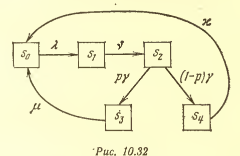


Рис. 10.32

10.33. Рассматривается процесс накопления информации в базах данных, хранимых в ЭВМ. Интенсивность поступления единиц информации в базы данных равна $\lambda(t)$ и не зависит от того, сколько их накоплено. Каждая единица информации, поступившая в базы данных, хранится в них бессрочно. Найти характеристики $m_x(t)$, $D_x(t)$ случайной функции $X(t)$ — числа накопленных единиц информации в базах данных в предположении, что поток поступлений единиц информации пуассоновский с интенсивностью $\lambda(t)$ и в начальный момент времени $t = 0$ случайная функция $X(0) = 0$.

Р е ш е н и е. В этой задаче мы имеем дело с процессом «чистого размножения» без ограничения числа состояний ($n \to \infty$). Все ин-

тенсивности «размножения» $\lambda_k = \lambda(t)$ (рис. 10.33) и интенсивности «гибели» $\mu_k = \mu_k(t) \equiv 0$.

Дифферениальные уравнения (10.0.24) и (10.0.25) для этого случая примут вид

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(t) p_k(t) = \lambda(t);$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda(t) + 2k\lambda(t) - 2m_x(t)\lambda(t)] p_k(t) = \lambda(t),$$

так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kp_k(t) = m_x(t).$$

Решая эти уравнения для начальных условий $m_x(0) = D_x(0) = 0$, получаем

$$m_x(t) = D_x(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau.$$

Этот результат можно было ожидать; его можно найти непосредственно из теории потоков. Можно доказать, что случайная величина $X(t)$ для любого момента времени t будет подчинена закону Пуассона с найденными характеристиками $m_x(t) = D_x(t)$.

$$s_0 \xrightarrow{\lambda(t)} s_1 \xrightarrow{\lambda(t)} s_2 \xrightarrow{\lambda(t)} \cdots \xrightarrow{\lambda(t)} s_k \xrightarrow{\lambda(t)} \cdots$$

Рис. 10.33

10.34. Условия те же, что и в предыдущей задаче, за исключением того, что принятая на хранение в базах данных единица информации хранится некоторое время, после чего по определенному признаку исключается из баз данных. Поток исключений для каждой единицы информации — пуассоновский с интенсивностью $\mu(t)$.

Решение. В этой задаче имеет место процесс «гибели и размножения» числа единиц информации, хранимых в базах данных ЭВМ. Интенсивность гибели $\mu_k(t) = k\mu(t)$, так как в состоянии s_k в базах данных накоплено k единиц информации и на каждую из них действует поток исключений с интенсивностью $\mu(t)$.

Дифференциальные уравнения для функций $m_x(t)$ и $D_x(t)$ имеют вид

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda(t) - k\mu(t)) p_k(t) = \lambda(t) - \mu(t) m_x(t); \quad (10.34.1)$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda(t) + k\mu(t) + 2k\lambda(t) - 2k^2\mu(t) - 2m_x(t)\lambda(t) +$$

$$+ 2m_x(t)k\mu(t)] p_k(t) = \lambda(t) + \mu(t) m_x(t) - 2\mu(t) D_x(t), \quad (10.34.2)$$

так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1; \quad \sum_{k=0}^{\infty} kp_k(t) = m_x(t); \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(t) = \alpha_{2x}(t) =$$

$$= D_x(t) + m_x^2(t).$$

Для начальных условий $m_x(0) = m_0$, $D_x(0) = D_0$; постоянных интенсивностей пополнения и исключения единиц информации $\lambda(t) = \lambda$; $\mu(t) = \mu$ решения этих уравнений будут иметь вид

$$m_x(t) = m_0 e^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) = \frac{\lambda}{\mu} + e^{-\mu t}\left(m_0 - \frac{\lambda}{\mu}\right);$$

$$D_x(t) = \lambda\left[\frac{1}{\mu} + \frac{e^{-2\mu t} - 2e^{-\mu t}}{\mu}\right] + (\lambda + \mu D_0 + \mu m_0)\frac{e^{-\mu t} - e^{-2\mu t}}{\mu} +$$

$$+ D_0(2e^{-2\mu t} - e^{-\mu t}) = m_x(t) + (D_0 - m_0)e^{-2\mu t}.$$

Для начальных условий $m_0 = D_0 = 0$ получим $m_x(t) = D_x(t) = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$. Можно доказать что для этих начальных условий процесс накопления информации $X(t)$ будет распределен по закону Пуассона для любого момента времени t и для любого вида функции $\lambda(t)$ (интенсивности поступления информации), но для этого интенсивность исключения единиц информации μ должна быть постоянной.

При постоянных λ и μ и $t \to \infty$ в системе будет устанавливаться стационарный режим накопления информации, который, естественно, не будет зависеть от начальных условий: $m_x = D_x = \lambda/\mu$.

10.35. Рассматривается процесс производства ЭВМ определенного вида. Интенсивность производства ЭВМ $\lambda(t)$ представлена на графике рис. 10.35, *а*. Эта интенсивность линейно возрастает в течение первого года производства от 0 до 1000 ЭВМ в год, затем три года производство сохраняется на уровне 1000 ЭВМ в год, после чего ЭВМ снимается с производства. Средний срок эксплуатации ЭВМ 5 лет. Считая все потоки событий простейшими, определить математическое ожидание и дисперсию числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации в любой момент времени t.

Решение. Интенсивность производства ЭВМ

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ kt & \text{при } 0 \leqslant t < 1; \\ \lambda & \text{при } 1 \leqslant t < 4; \\ 0 & \text{при } t \geqslant 4, \end{cases}$$

где $k = 1000$ 1/год^2; $\lambda = 1000$ 1/год.

Найдем решения уравнений (10.34.1) и (10.34.2) для участка времени $0 \leqslant t < 1$ и при условии, что $\mu = 0{,}2$ 1/год для любых участков $t > 0$. Уравнение (10.34.1) при этих условиях имеет вид

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = kt - \mu m_x(t).$$

Решая это уравнение для начального условия $m_x(0) = 0$, получаем

$$m_x(t) = \frac{k}{\mu^2}(e^{-\mu t} - 1 + \mu t) = 25000\left(e^{-t/5} - 1 + \frac{t}{5}\right).$$

По истечении одного года в эксплуатации будет в среднем $m_x(1) = 25\,000\,(e^{-1/5} - 1 + 0{,}2) = 468$ машин. Заметим, что если бы ЭВМ имели неограниченный срок службы, то их к концу года было бы в эксплуатации 500 штук.

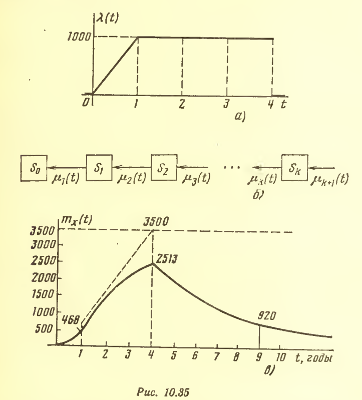


Рис. 10.35

Уравнение (10.34.2) при тех же условиях имеет вид

$$dD_x(t)/dt = 1000t + 0{,}2m_x(t) - 0{,}4D_x(t).$$

Решая это уравнение для начального условия $D_x(0) = 0$, получаем $D_x(t) = m_x(t) = 25\,000\,(e^{-t/5} - 1 + t/5)$. По истечении одного года дисперсия числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации, будет равна

$D_x = 468$; $\sigma_x = 21{,}6$. Число ЭВМ, находящихся в эксплуатации по истечении года, будет приближенно подчинено нормальному закону с характеристиками $m_x = 468$; $\sigma_x = 21{,}6$.

На участке времени $1 \leqslant t < 4$ соответствующие уравнения будут иметь вид

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \lambda - \mu m_x(t); \quad \frac{dD_x(t)}{dt} = \lambda + \mu m_x(t) - 2\mu D_x(t).$$

Их нужно решать при начальных условиях: $m_x(1) = D_x(1) = 468$. Решение этих уравнений было найдено в задаче 10.34, откуда

$$m_x(t) = m_x(1)\, e^{-\mu(t-1)} + \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - e^{-\mu(t-1)}\right) \quad (1 \leqslant t < 4);$$

$$D_x(t) = m_x(t).$$

Найдем значение $m_x(t)$ для $t = 4$:

$$m_x(4) = m_x(1)\, e^{-3\mu} + \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - e^{-3\mu}\right) = 2513.$$

Таким образом, среднее число ЭВМ, находящихся в эксплуатации к концу четвертого года выпуска, будет равно 2513. Обратим внимание на то обстоятельство, что к этому времени было выпущено в среднем 3500 ЭВМ. Следовательно, в среднем за четыре года было исключено из эксплуатации 987 ЭВМ.

На участке времени $t > 4$ будет иметь место процесс «чистой гибели», граф состояний которого имеет вид, показанный на рис. 10.35, *б*.

Дифференциальные уравнения для математического ожидания и дисперсии процесса чистой гибели в общем случае имеют вид

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(t)\, p_k(t);$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[k\mu_k(t) - 2k^2 \mu_k(t) + 2m_x(t)\, k\mu_k(t)\right] p_k(t).$$

Для нашего случая $\mu_k(t) = k\mu$, следовательно, получим уравнение

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = -\sum_{k=0}^{\infty} k\mu p_k(t) = -\mu m_x(t),$$

которое нужно решать при начальном условии $m_x(4) = 2513$. Решение этого уравнения будет иметь вид

$$m_x(t) = m_x(4)\, e^{-\mu(t-4)} \quad (t > 4).$$

Так как $D_x(4) = m_x(4)$ и $\mu = \text{const}$, то $D_x(t) = m_x(t)$ на участке времени $t > 4$.

На рис. 10.35, *в* показана зависимость $m_x(t)$ — среднего числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации от времени t. На этом же графике пунктирной линией показана зависимость от t среднего числа выпущенных ЭВМ к моменту времени t.

10.36. Рассматривается процесс накопления терминов в динамическом словаре (тезаурусе) при функционировании автоматизированного банка данных (АБД). Сущность процесса в том, что термины заносятся в словарь по мере их появления в той информации, которая вводится в АБД. Например, в АБД автоматизированной системы управления производством (АСУП) могут в качестве терминов заноситься наименования организаций, с которыми данное предприятие поддерживает производственные отношения. Динамический словарь наименований таких организаций будет накапливаться в АБД АСУП по мере появления этих наименований в единицах информации, вводимых в АБД.

В каждой единице информации, поступающей в АБД, в среднем встречается $\varkappa$ терминов словаря, а интенсивность поступления единиц информации в АБД $\tilde{\lambda}(t)$. Следовательно, интенсивность потока терминов словаря в информации, поступающей в АБД, будет $\lambda(t) = \varkappa\tilde{\lambda}(t)$. Предполагается, что поток терминов словаря является пуассоновским. Число терминов словаря n является конечным и неслучайным, хотя, возможно, и неизвестным нам заранее. Все термины словаря могут находиться в единице информации с одинаковой вероятностью, а в словарь заносятся естественно лишь те термины, которые до сих пор еще не встречались в единицах информации. Требуется найти математическое ожидание и дисперсию числа терминов, накопленных в динамическом словаре.

Решение. Обозначим $X(t)$ число терминов, накопленных в динамическом словаре. Очевидно, что случайный процесс $X(t)$ есть процесс «чистого размножения» с конечным числом состояний n, граф состояний которого представлен на рис. 10.36. Для нахождения интенсивности $\lambda_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ введем в рассмотрение гипотезу о том, что процесс находится в состоянии s_k; вероятность этой гипотезы по определению равна $p_k(t)$. В предположении, что эта гипотеза имеет место, интенсивность потока новых (еще не занесенных в динамический словарь) терминов будет

$$\lambda_k(t) = \lambda(t)\,\frac{n-k}{n} = \lambda(t)\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Дифференциальные уравнения (10.0.24) и (10.0.25) примут вид:

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} \lambda(t)\left(1 - \frac{k}{n}\right)p_k(t) = \lambda(t) - \frac{m_x(t)\,\lambda(t)}{n}, \quad (10.36.1)$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n}\left[\lambda(t)\left(1 - \frac{k}{n}\right) + 2k\lambda(t)\left(1 - \frac{k}{n}\right) - \right.$$

$$\left. - 2m_x(t)\,\lambda(t)\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right]p_k(t) = \lambda(t) - \lambda(t)\,\frac{m_x(t)}{n} - 2\lambda(t)\,\frac{D_x(t)}{n}. \quad (10.36.2)$$

Найдем решение этих уравнений для простейшего случая, когда

$$\lambda(t) = \lambda = \text{const};\ n = \text{const};\ m_x(0) = D_x(0) = 0.$$

$$m_x(t) = n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}t}\right); \quad \lim_{t\to\infty} m_x(t) = n; \qquad (10.36.3)$$

$$D_x(t) = n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}t}\right)e^{-\frac{\lambda}{n}t} = m_x(t)\,e^{-\frac{\lambda}{n}t};$$

$$\lim_{t\to\infty} D_x(t) = 0. \qquad (10.36.4)$$

Обратим внимание на то, что функция $m_x(t)$ монотонно увеличивается, стремясь в пределе к n, в то время как функция $D_x(t)$ равна нулю при $t = 0$ и $t \to \infty$ и достигает своего максимума при некотором значении t_m, которое можно найти из условия $dD_x(t)/dt = 0$ $(t > 0)$. Отсюда

$$0{,}5 = e^{-\frac{\lambda}{n}t_m} \to t_m \approx 0{,}7n/\lambda.$$

При этом значении t_m максимальная дисперсия $\max\limits_t D_x(t) \approx n \times$ $\times\ (1 - e^{-0,7})\, e^{-0,7} = n\, 0{,}25$; $\sigma_x(t_m) = 0{,}5\sqrt{n}$, а максимальное значение коэффициента вариации $\sigma_x(t_m)/m_x(t_m) = 1/\sqrt{n}$.

$S_0 \xrightarrow{\lambda_0(t)} S_1 \xrightarrow{\lambda_1(t)} \cdots \xrightarrow{\lambda_{k-1}(t)} S_k \xrightarrow{\lambda_k(t)} \cdots \longrightarrow S_{n-1} \xrightarrow{\lambda_{n-1}(t)} S_n$

Рис. 10.36

Если известна интенсивность λ потока терминов словаря в единицах информации, поступающих в АБД, и общее число терминов n, то можно с достаточной точностью определить среднее время $t_н$, потребное для накопления 95% объема динамического словаря: $1 - e^{-\frac{\lambda}{n}t_н} = 0{,}95$, откуда $t_н \approx 3n/\lambda$.

Если n неизвестно (что чаще всего на практике имеет место), то можно найти оценку $\bar{n}$ величины n следующим образом. Для моментов времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_l$ $(\tau_i < \tau_{i+1})$ определяют фактические количества накопленных терминов в словаре $m_1, m_2, \ldots, m_l$. Полагаем эти величины приближенно равными средним количествам накопленных терминов: $m_i = n\left(1 - e^{-\lambda\tau_i/n}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Решая это уравнение относительно n, находим l значений $n_1, n_2, \ldots, n_l$ для соответствующих пар значений: (m_1, τ_1); (m_2, τ_2); ...; (m_l, τ_l). Оценку $\bar{n}$ находим по формуле

$$\bar{n} = \left(\sum_{i=1}^{l} n_i\right) \Big/ l.$$

10.37. Для условий предыдущей задачи найти время $t_н$ заполнения словаря на 95% и вероятность того, что через два года после начала накопления словаря он будет содержать не менее 90% всех терминов,

если общее число терминов $n = 100\,000$, в год в АБД вводится 100 000 документов и каждый документ содержит в среднем 1,5 термина.

Решение. Найдем интенсивность потока терминов словаря в единицах информации, вводимых в АБД:

$$\lambda = 100\,000 \cdot 1{,}5 = 150\,000 \quad 1/\text{год}.$$

Величина $t_\text{н}$ определяется из выражения $t_\text{н} = 3n/\lambda = 3 \cdot 100\,000 : 150\,000 = 2$ года. Для определения вероятности того, что через два года после начала наполнения словарь будет содержать не менее 90% всех терминов, нужно прежде всего найти $m_x(2)$ и $D_x(2)$ [см. формулы (10.36.3) и (10.36.4)]: $m_x(2) = 100\,000\,(1 - e^{-1{,}5 \cdot 2}) = 0{,}95 \times 100\,000 = 95\,000$; $D_x(2) = 95\,000 \cdot 0{,}05 = 4750$; $\sigma_x(2) = 68{,}9$.

Заметим, что максимальная дисперсия $D_x(t_m) = 0{,}25n = 25\,000$; $\sigma_x(t_m) = 158$.

Число терминов в словаре в момент времени $t = 2$ года есть случайная величина $X(2)$, приближенно распределенная по нормальному закону с найденными выше характеристиками; поэтому $P\{X(2) > 0{,}9n\} \approx 1$, так как $m_x - 3\sigma_x > 0{,}9n$.

10.38. Рассматривается более общий случай функционирования динамического словаря АБД. Первое усложнение по сравнению с условиями задачи 10.36 состоит в том, что максимальное число терминов словаря n не является постоянным, а зависит от времени t: $n(t)$ (в случае с динамическим словарем названий организаций это означает, что общее число организаций со временем изменяется: увеличивается или уменьшается).

Кроме того, введенные в динамический словарь термины по истечении некоторого случайного времени исключаются из словаря в связи с тем, что сам термин устаревает. Предполагается, что поток исключений термина в динамическом словаре — пуассоновский с интенсивностью $\mu(t)$, одинаковой для всех терминов словаря.

В этом случае интенсивности потоков «размножения» и «гибели» будут иметь вид

$$\lambda_k(t) = \lambda(t)\left(1 - \frac{k}{n(t)}\right); \; \mu_k(t) = \mu(t)\,k, \qquad (10.38.1)$$

а уравнения (10.0.24) и (10.0.25) примут вид (зависимости от времени t функций $m_x(t), D_x(t), n(t), \lambda(t), \mu(t), p_k(t)$ для краткости опущены):

$$dm_x/dt = \lambda - m_x(\lambda/n + \mu);$$

$$dD_x/dt = \lambda - m_x(\lambda/n - \mu) - 2(\lambda/n + \mu)\,D_x. \qquad (10.38.2)$$

Если величины λ, n, μ постоянны (не зависят от времени), то при $t \to \infty$ существует стационарный режим работы, для которого $dm_x/dt = dD_x/dt = 0$, откуда

$$m_x = n\left(1 + \frac{\mu n}{\lambda}\right)^{-1}; \; D_x = m_x\left(1 + \frac{\lambda}{\mu n}\right)^{-1}.$$

ГЛАВА 11

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

11.0. *Системой массового обслуживания* (СМО) называется любая система предназначенная для обслуживания каких-либо заявок (требований), поступающих на нее в случайные моменты времени. Примеры СМО: телефонная станция; бюро ремонта; билетная касса; парикмахерская; ЭВМ. Теория массового обслуживания занимается изучением случайных процессов, протекающих в системах массового обслуживания.

Любое устройство, непосредственно занимающееся обслуживанием заявок, называется *каналом обслуживания* (или «прибором»). СМО бывают как одно-, так и многоканальными. Пример одноканальной СМО — билетная касса с одним кассиром; пример многоканальной — та же касса с несколькими кассирами.

Различают *СМО с отказами* и *СМО с очередью*. В СМО с отказами заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем в процессе ее работы не участвует. В СМО с очередью заявка, пришедшая в момент занятости всех каналов, не покидает СМО, а становится в очередь и ждет, пока не освободится какой-нибудь канал. Число мест в очереди m может быть как ограниченным, так и неограниченным. При $m = 0$ СМО с очередью превращается в СМО с отказами. Очередь может иметь ограничения не только по количеству стоящих в ней заявок (длине очереди), но и по времени ожидания (такие СМО называются «системами с нетерпеливыми клиентами»).

СМО с очередью различаются не только по ограничениям очереди, но и по *дисциплине обслуживания*: обслуживаются ли заявки в порядке поступления, или в случайном порядке, или же некоторые заявки обслуживаются вне очереди (так называемые «СМО с приоритетом»). Приоритет может иметь несколько градаций или рангов.

Аналитическое исследование СМО является наиболее простым, если все потоки событий, переводящие ее из состояния в состояние, — простейшие (стационарные пуассоновские). Это значит, что интервалы времени между событиями в потоках имеют показательное распределение с параметром, равным интенсивности соответствующего потока. Для СМО это допущение означает, что как поток заявок, так и поток обслуживаний — простейшие. Под *потоком обслуживаний* понимается поток заявок, обслуживаемых одна за другой одним непрерывно занятым каналом. Этот поток оказывается простейшим, только если время обслуживания заявки $T_{обсл}$ представляет собой случайную величину, имеющую показательное распределение. Параметр этого распределения μ есть величина, обратная среднему времени обслуживания: $\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$, где $\bar{t}_{обсл} = M[T_{обсл}]$. Вместо «поток обслуживаний — простейший» часто говорят «время обслуживания — показательное». Условимся в дальнейшем для краткости всякую СМО, в которой все потоки простейшие, называть *простейшей* СМО. В этой главе мы будет рассматривать главным образом простейшие СМО.

Если все потоки событий простейшие, то процесс, протекающий в СМО, представляет собой марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. При выполнении некоторых условий для этого процесса существует финальный стационарный режим, при котором как вероятности состояний, так и другие характеристики процесса не зависят от времени.

Задачи теории массового обслуживания — нахождение вероятностей различных состояний СМО, а также установление зависимости между заданными параметрами (числом каналов n, интенсивностью потока заявок λ, распределением времени обслуживания и т. д.) и *характеристиками эффективности* работы СМО. В качестве таких характеристик могут рассматриваться, например, следующие:

среднее число заявок A, обслуживаемое СМО в единицу времени, или *абсолютная пропускная способность* СМО;

вероятность обслуживания поступившей заявки Q или *относительная пропускная способность* СМО; $Q = A/\lambda$;

вероятность отказа $P_{отк}$, т. е. вероятность того, что поступившая заявка не будет обслужена, получит отказ; $P_{отк} = 1 - Q$;

среднее число заявок в СМО (обслуживаемых или ожидающих в очереди) $\bar{z}$

среднее число заявок в очереди $\bar{r}$;

среднее время пребывания заявки в СМО (в очереди или под обслуживанием) $\bar{t}_{\text{сист}}$;

среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$;

среднее число занятых каналов $\bar{k}$.

В общем случае все эти характеристики зависят от времени. Но многие СМО работают в неизменных условиях достаточно долгое время, и поэтому для них успевает установиться режим, близкий к стационарному. Мы здесь повсюду, не оговаривая этого каждый раз специально, будем вычислять финальные вероятности состояний и финальные характеристики эффективности СМО, относящиеся к предельному, стационарному режиму ее работы.

$$s_0 \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_0}{\rightleftarrows}} s_1 \underset{\mu_2}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} s_2 \underset{\mu_3}{\overset{\lambda_2}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\mu_k}{\overset{\lambda_{k-1}}{\rightleftarrows}} s_k \underset{\mu_{k+1}}{\overset{\lambda_k}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\mu_n}{\overset{\lambda_{n-1}}{\rightleftarrows}} s_n$$

Рис. 11.0.1

Для любой открытой СМО*) в предельном стационарном режиме среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{\text{сист}}$ выражается через среднее число заявок в системе с помощью *формулы Литтла*:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda, \qquad (11.0.1)$$

где λ — интенсивность потока заявок.

Аналогичная формула (называемая также формулой Литтла) связывает среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$ и среднее число $\bar{r}$ заявок в очереди:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda. \qquad (11.0.2)$$

Формулы Литтла очень полезны, так как позволяют вычислять не обе характеристики эффективности (среднее время пребывания и среднее число заявок), а только какую-нибудь одну из них.

Специально подчеркнем, что формулы (11.0.1) и (11.0.2) справедливы *для любой открытой СМО* (одноканальной, многоканальной, при любых видах потоков заявок и обслуживаний); единственное требование к потокам заявок и обслуживаний — чтобы они были стационарными.

Аналогично универсальное значение для открытых СМО имеет формула, выражающая среднее число занятых каналов $\bar{k}$ через абсолютную пропускную способность A:

$$\bar{k} = A/\mu, \qquad (11.0.3)$$

где $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл}}$ — интенсивность потока обслуживаний.

Очень многие задачи теории массового обслуживания, касающиеся простейших СМО, решаются при помощи схемы гибели и размножения (см. гл. 10). Если граф состояний СМО может быть представлен в виде, показанном на рис. 11.0.1, то финальные вероятности состояний выражаются формулами (10.0.23):

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\,\lambda_1}{\mu_1\,\mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_0\,\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1\,\mu_2 \ldots \mu_k} + \ldots + \frac{\lambda_0\,\lambda_1\,\ldots\,\lambda_{n-1}}{\mu_1\,\mu_2\,\ldots\,\mu_n} \right\}^{-1};$$

*) СМО называется открытой, если интенсивность поступающего на нее потока заявок не зависит от состояния самой СМО.

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0; \ \ldots; \quad p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} p_0 \quad (0 \leqslant k \leqslant n); \ \ldots;$$

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} p_0, \tag{11.0.4}$$

При выводе формул для среднего числа заявок (в очереди или в системе) широко применяется прием дифференцирования рядов, состоящий в следующем. Если $x < 1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^k = x \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} x^k = x \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-x^2},$$

и окончательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{1-x^2}. \tag{11.0.5}$$

Ниже мы приведем без вывода ряд формул, выражающих финальные вероятности состояний и характеристики эффективности для некоторых часто встречающихся типов СМО. Другие примеры СМО будут разобраны далее в виде задач.

1. Простейшая СМО с отказами (задача Эрланга). На n-канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл}}$. Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО (в силу отсутствия очереди, оно совпадает с числом занятых каналов):

s_0 — СМО свободна;
s_1 — занят один канал, остальные свободны; ...
s_k — занято k каналов, остальные свободны $(1 \leqslant k \leqslant n)$; ...;
s_n — заняты все n каналов.

Финальные вероятности состояний выражаются формулами Эрланга:

$$p = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right\}^{-1}; \ p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11.0.6}$$

где $\rho = \lambda/\mu$.

Характеристики эффективности:

$$A = \lambda (1 - p_n); \ Q = 1 - p_n; \ P_{\text{отк}} = p_n; \ \bar{k} = \rho (1 - p_n). \tag{11.0.7}$$

При больших значениях n вероятности состояний (11.0.6) удобно вычислять через табулированные функции:

$$P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \text{ (распределение Пуассона)} \tag{11.0.8}$$

и

$$R(m, a) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \tag{11.0.9}$$

(см. приложения 1 и 2), из которых первую можно выразить через вторую:

$$P(m, a) = R(m, a) - R(m - 1, a). \tag{11.0.10}$$

Пользуясь этими функциями, формулы Эрланга (11.0.6) можно переписать в виде

$$p_k = P(k, \rho)/R(n, \rho) \ (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{11.0.11}$$

2. Простейшая одноканальная СМО с неограниченной очередью. На одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл}}$. Длина очереди не ограничена. Финальные вероятности существуют только при $\rho = \lambda/\mu < 1$ (при $\rho \geqslant 1$ очередь растет неограниченно). Состояния СМО нумеруются по числу заявок в СМО, находящихся в очереди или обслуживаемых:

s_0 — СМО свободна;
s_1 — канал занят, очереди нет;
s_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди; ...;
s_k — канал занят, $k-1$ заявок стоят в очереди; ...

Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_0 = 1 - \rho; \; p_k = \rho^k (1-\rho) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{11.0.12}$$

где $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda; \; Q = 1; \; P_{\text{отк}} = 0; \tag{11.0.13}$$

$$\bar{z} = \frac{\rho}{1-\rho}; \quad \bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}; \tag{11.0.14}$$

среднее число занятых каналов (или вероятность того, что канал занят)

$$\bar{k} = \lambda/\mu = \rho \tag{11.0.15}$$

3. Простейшая одноканальная СМО с ограничением по длине очереди. На одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл}}$. В очереди m мест. Если заявка приходит в момент, когда все эти места заняты, она получает отказ и покидает СМО. Состояния СМО:

s_0 — СМО свободна;
s_1 — канал занят, очереди нет;
s_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди; ...;
s_k — канал занят, $k-1$ заявок стоят в очереди; ...;
s_{m+1} — канал занят, m заявок стоят в очереди.

Финальные вероятности состояний существуют при любом $\rho = \lambda/\mu$ и равны:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}; \; p_k = \rho^k p_0 \; (k = 1, \ldots, m+1). \tag{11.0.16}$$

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda\,(1-p_{m+1}); \; Q = 1 - p_{m+1}; \; P_{\text{отк}} = p_{m+1}.$$

Среднее число занятых каналов (вероятность того, что канал занят)

$$\bar{k} = 1 - p_0. \tag{11.0.17}$$

Среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^2\,[1-\rho^m\,(m+1-m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})\,(1-\rho)}. \tag{11.0.18}$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}. \tag{11.0.19}$$

По формуле Литтла

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda; \; \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda. \tag{11.0.20}$$

4. Простейшая многоканальная СМО с неограниченной очередью. На n-канальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; вре-

мя обслуживания одной заявки — показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$. Финальные вероятности существуют только при $\rho/n = \varkappa < 1$, где $\rho = \lambda/\mu$. Состояния СМО нумеруются по числу заявок в СМО:

s_0 — СМО свободна;
s_1 — занят один канал; ...;
s_k — занято k каналов ($1 \leqslant k \leqslant n$); ...; } очереди нет
s_n — заняты все n каналов;
s_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди; ...;
s_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоят в очереди; ...;

Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_0=\left\{1+\frac{\rho}{1!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\,\frac{1}{1-\varkappa}\right\}^{-1},$$

$$p_k=\frac{\rho^k}{k!}\,p_0 \quad (1\leqslant k \leqslant n); \quad p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}\,p_0 \quad (r\geqslant 1). \qquad (11.0.21)$$

С помощью функций $P(m, a)$ и $R(m, a)$ формулы (11.0.21) могут быть приведены к виду

$$p_k=\frac{P(k, \rho)}{R(n, \rho)+P(n, \rho)/(1-\varkappa)} \quad (k=0, \ldots, n);$$
$$p_{n+r}=\varkappa^r\,p_n \quad (r=1, 2, \ldots). \qquad (11.0.22)$$

Характеристики эффективности СМО:

$$\bar{r}=\rho^{n+1}\,p_0/[n\cdot n!\,(1-\varkappa)^2]=\varkappa p_n/(1-\varkappa)^2; \qquad (11.0.23)$$

$$\bar{z}=\bar{r}+\bar{k}=\bar{r}+\rho; \qquad (11.0.24)$$

$$\bar{t}_{сист}=\bar{z}/\lambda;\ \bar{t}_{оч}=\bar{r}/\lambda. \qquad (11.0.25)$$

5. **Простейшая многоканальная СМО с ограничением по длине очереди.** Условия и нумерация состояний те же, что в п. 4, с той разницей, что число m мест в очереди ограничено. Финальные вероятности состояний существуют при любых λ и μ и выражаются формулами:

$$p_0=\left\{1+\frac{\rho}{1!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\,\frac{1-\varkappa^m}{1-\varkappa}\right\}^{-1};$$

$$p_k=\frac{\rho^k}{k!}\,p_0 \quad (1\leqslant k\leqslant n);$$

$$p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}\,p_0 \quad (1\leqslant r\leqslant m), \qquad (11.0.26)$$

где $\varkappa = \rho/n = \lambda/(n\mu)$.

Характеристики эффективности СМО:

$$A=\lambda\,(1-p_{n+m});\ Q=1-p_{n+m};\ P_{отк}=p_{n+m};\ \bar{k}=\rho\,(1-p_{n+m}) \qquad (11.0.27)$$

$$\bar{r}=\frac{\rho^{n+1}\,p_0}{n\cdot n!}\,\frac{1-(m+1)\,\varkappa^m+m\varkappa^{m+1}}{(1-\varkappa)^2}; \qquad (11.0.28)$$

$$\bar{z}=\bar{r}+\bar{k}, \qquad (11.0.29)$$

$$\bar{t}_{оч}=\bar{r}/\lambda;\ \bar{t}_{сист}=\bar{z}/\lambda \qquad (11.0.30)$$

6. **Многоканальная СМО с отказами при простейшем потоке заявок и произвольном времени обслуживания.** Формулы Эрланга (11.0.6) остаются справедливыми и тогда, когда поток заявок — простейший, а время обслуживания $T_{обсл}$ имеет произвольное распределение с математическим ожиданием $\bar{t}_{обсл} = 1/\mu$.

7. **Одноканальная СМО с неограниченной очередью при простейшем потоке заявок и произвольном времени обслуживания.** Если на одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ, а время обслуживания $T_{обсл}$ распределяется по произвольному закону с математическим ожиданием $1/\mu$ и коэффициентом вариации v_μ, то среднее число заявок в очереди выражается *формулой Полячека — Хинчина*

$$\bar{r} = \rho^2 \left(1 + v_\mu\right)^2 / [2\,(1-\rho)], \tag{11.0.31}$$

где $\rho = \lambda/\mu$, а среднее число заявок в СМО

$$\bar{z} = \{\rho^2 \left(1 + v_\mu\right)^2 / [2\,(1-\rho)]\} + \rho. \tag{11.0.32}$$

Из (11.0.31) и (11.0.32) по формуле Литтла получим

$$\bar{t}_{оч} = \frac{\rho^2 \left(1 + v_\mu\right)^2}{2\lambda\,(1-\rho)}; \; \bar{t}_{сист} = \frac{\rho^2 \left(1 + v_\mu^2\right)}{2\lambda\,(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}. \tag{11.0.33}$$

8. **Одноканальная СМО при произвольном (пальмовском) потоке заявок и произвольном времени обслуживания.** Точных формул для этого случая не существует, приближенная оценка длины очереди может быть произведена по формуле

$$\bar{r} \approx \rho^2 \left(v_\lambda^2 + v_\mu^2\right) / [2\,(1-\rho)], \tag{11.0.34}$$

где v_λ — коэффициент вариации интервала между событиями во входном потоке; $\rho = \lambda/\mu$; λ — величина, обратная математическому ожиданию этого интервала; $\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$ — величина, обратная среднему времени обслуживания; v_μ — коэффициент вариации времени обслуживания. Среднее число заявок, связанных с СМО,

$$\bar{z} \approx \{\rho^2 \left(v_\lambda^2 + v_\mu^2\right) / [2\,(1-\rho)]\} + \rho, \tag{11.0.35}$$

а средние времена пребывания заявки в очереди и в СМО соответственно равны:

$$\bar{t}_{оч} \approx \rho^2 \left(v_\lambda^2 + v_\mu^2\right) / [2\lambda\,(1-\rho)]; \tag{11.0.36}$$

$$\bar{t}_{сист} \approx \{\rho^2 \left(v_\lambda^2 + v_\mu^2\right) / [2\lambda\,(1-\rho)]\} + 1/\mu. \tag{11.0.37}$$

9. **Простейшая многофазовая СМО с очередью.** Анализ многофазовых СМО в общем случае затруднен, тем что входящий поток каждой последующей фазы является выходным потоком предыдущей и в общем случае имеет последействие. Однако *если на вход СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок, а время обслуживания показательное, то выходной поток этой СМО — простейший*, с той же интенсивностью λ, что и входящий. Из этого следует, что многофазовую СМО с неограниченной очередью перед каждой фазой, простейшим входящим потоком заявок и показательным временем обслуживания на каждой фазе можно анализировать как простую последовательность простейших СМО.

Если очередь к фазе ограничена, то выходной поток этой фазы перестает быть простейшим и вышеуказанный прием может применяться только в качестве приближенного.

Далее мы будем пользоваться обозначениями для характеристик эффективности СМО, приведенными на с. 349. 350, и по мере необходимости вводить некоторые другие обозначения.

В дальнейшем, задавая плотность $f(x)$ разными формулами на разных участках оси $0x$, мы также не будем указывать значения $f(x)$ на границах участков.

Если единица измерения времени не фиксирована, мы будем для краткости обозначать интенсивности потоков событий просто буквами λ, μ, ... (без указаний размерностей). То же относится и ко времени $\bar{t}_{сист}$, $\bar{t}_{оч}$. Если же единица времени фиксирована (час, минута, год и т. д.), то мы будем указывать единицы измерения.

В данной главе нам удобно будет записывать закон распределения смешанной случайной величины T не в форме функции распределения $F(t)$, а в форме «обобщенной» плотности $f(t)$, которая определяется следующим образом:

$$f(t)=F'_{н}(t)+\sum_i p_i\,\delta(t-t_i),$$

где $F'_{н}(t)$ — производная функции распределения на участках ее непрерывности: $p_i=P\{T=t_i\}$; $\delta(x)$ — дельта-функция свойства которой даны в приложении 6.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

11.1. На вход одноканальной СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; время обслуживания — показательное с параметром μ. В начальный момент времени $t=0$ канал свободен. Построить размеченный граф состояний СМО. Написать и решить дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний СМО. Найти финальные вероятности состояний и (для установившегося режима) характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{отк}$, $\bar{k}$.

Рис. 11.1

Решение. Состояния СМО: s_0 — свободна; s_1 — канал занят. Граф состояний показан на рис. 11.1. Уравнения Колмогорова:

$$dp_0/dt=-\lambda p_0+\mu p_1;\quad dp_1/dt=\lambda p_0-\mu p_1. \qquad (11.1.1)$$

Так как $p_0+p_1=1$ для любого t, можно выразить p_1 через p_0: $p_1=1-p_0$ и получить одно уравнение для p_0:

$$dp_0/dt=-(\lambda+\mu)\,p_0+\mu. \qquad (11.1.2)$$

Решая это уравнение, получаем p_0 как функцию t:

$$p_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[1+\frac{\lambda}{\mu}\,e^{-(\lambda+\mu)\,t}\right];$$

отсюда

$$p_1(t)=1-p_0(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,[1-e^{-(\lambda+\mu)\,t}].$$

При $t\to\infty$ получим финальные вероятности

$$p_0=\mu/(\lambda+\mu);\quad p_1=\lambda/(\lambda+\mu), \qquad (11.1.3)$$

которые можно было бы найти и гораздо проще, решая линейные алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$\lambda p_0=\mu p_1;\quad p_0+p_1=1.$$

Формулы (11.1.3) можно записать компактнее, если ввести обозначение $\rho = \lambda/\mu$:

$$p_0 = 1/(1+\rho);\ \ p_1 = \rho/(1+\rho).$$

Характеристики эффективности СМО:

$$A=\lambda p_0 = \frac{\lambda}{1+\rho};\ Q=\frac{1}{1+\rho};\ P_{\text{отк}}=p_1=\frac{\rho}{1+\rho};\ \bar{k}=1-p_0=\frac{\rho}{1+\rho}. \tag{11.1.4}$$

11.2. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию, на вход которой поступает простейший поток вызовов с интенсивностью $\lambda = 0{,}4$ вызов/мин. Средняя продолжительность разговора $\bar{t}_{\text{обсл}} = 3$ мин; время разговора имеет показательное распределение. Найти финальные вероятности состояний СМО: p_0 и p_1, а также A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$. Сравнить пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы разговор длился в точности 3 мин, а заявки шли одна за другой регулярно, без перерывов.

Решение. $\lambda = 0{,}4$; $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл}} = 1/3$; $\rho=\lambda/\mu=1{,}2$. По формулам (11.1.3) $p_0 \approx 1/2{,}2 \approx 0{,}455$; $p_1 \approx 0{,}545$; $Q \approx 0{,}455$; $A = \lambda Q \approx$ $\approx 0{,}182$; $\bar{k} = p_1 \approx 0{,}545$.

Таким образом, линия в среднем будет обслуживать 0,455 поступающих на нее заявок, т. е. 0,182 разговора в минуту. Номинальная пропускная способность канала была бы (при регулярно приходящих и регулярно обслуживаемых заявках) $A_{\text{ном}} = 1/\bar{t}_{\text{обсл}} = 1/3 \approx$ $\approx 0{,}333$ разг./мин, что почти вдвое больше, чем действительная пропускная способность A.

11.3. Имеется одноканальная СМО с отказами. Поток заявок — простейший с интенсивностью λ. Время обслуживания — не случайное и в точности равно $t_{\text{обсл}} = 1/\mu$. Найти относительную и абсолютную пропускную способность СМО в предельном стационарном режиме.

Рис. 11.3

Решение. Рассмотрим на оси $0t$ простейший поток заявок с интенсивностью λ (рис. 11.3). Будем отмечать кружками все заявки, которые приняты к обслуживанию. Пусть какая-то заявка, пришедшая в момент t_1, принята к обслуживанию. Тогда все заявки, пришедшие после нее за время $t_{\text{обсл}}$, получат отказ; следующей будет принята к обслуживанию заявка, пришедшая в момент t_2 такой, что $t_2 - t_1 >$ $> t_{\text{обсл}}$. Рассмотрим интервал T между концом обслуживания первой заявки и моментом t_2 прихода ближайшей следующей, которая будет принята к обслуживанию. Из-за отсутствия последействия в простейшем потоке распределение интервала T совершенно такое же, как и в вообще интервала между заявками, т. е. показательное с параметром λ. Средняя длина интервала T равна $m_t = 1/\lambda$.

Итак, на оси $0t$ будут чередоваться неслучайные интервалы занятости канала длины $t_{обсл} = 1/\mu$ и случайные свободные интервалы со средней длиной $1/\lambda$. На первые попадет доля всех заявок, равная

$$\frac{1/\mu}{1/\mu + 1/\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

а на вторые — доля, равная

$$\mu/(\lambda + \mu) = 1/(1 + \rho), \text{ где } \rho = \lambda/\mu.$$

Эта величина и есть относительная пропускная способность СМО

$$Q = 1/(1 + \rho), \tag{11.3.1}$$

откуда

$$A = \lambda Q = \lambda/(1 + \rho). \tag{11.3.2}$$

Отметим, что формулы (11.3.1), (11.3.2) совпадают с (11.1.4), соответствующими показательному распределению времени обслуживания Это и естественно, так как формулы Эрланга остаются справедливыми при любом распределении времени обслуживания со средним значением, равным $1/\mu$.

11.4. Доказать, пользуясь формулой (11.0.5), что для простейшей одноканальной СМО с неограниченной очередью среднее число заявок, находящихся в СМО, равно $\bar{z} = \rho/(1 - \rho)$, где $\rho = \lambda/\mu$, а среднее число заявок в очереди $\bar{r} = \rho^2/(1 - \rho)$.

Решение. По формулам (11.0.12) $p_0 = 1 - \rho$; $p_k = \rho^k (1 - \rho)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Обозначим Z фактическое (случайное) число заявок в СМО:

$$\bar{z} = \mathrm{M}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k (1-\rho) = (1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k.$$

По формуле (11.0.5) для $\rho < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2},$$

откуда $\bar{z} = \rho/(1 - \rho)$. Среднее число заявок в очереди равно $\bar{z}$ минус среднее число занятых каналов $\bar{k} = A/\mu = \lambda/\mu = \rho$, т. е. $\bar{r} = [\rho/(1 - \rho)] - \rho = \rho^2/(1 - \rho)$.

11.5. Железнодорожная сортировочная горка, на которую подается простейший поток составов с интенсивностью $\lambda = 2$ состава в час, представляет собой одноканальную СМО с неограниченной очередью. Время обслуживания (роспуска) состава на горке имеет показательное распределение со средним значением $\bar{t}_{обсл} = 20$ мин. Найти финальные вероятности состояний СМО, среднее число z составов, связанных с горкой, среднее число $\bar{r}$ составов в очереди, среднее время $\bar{t}_{сист}$ пребывания состава в СМО, среднее время $\bar{t}_{оч}$ пребывания состава в очереди.

Решение. $\lambda = 2$ состава/ч; $\bar{t}_{обсл} = 1/3$ ч; $\mu = 3$ состава/ч; $\rho = \lambda/\mu = 2/3$. По формулам (11.0.12) $p_0 = 1 - 2/3 = 1/3$; $p_1 = (2/3) \times$

$\times (1/3) = 2/9$; $p_2 = (2/3)^2 (1/3) = 4/27$; ... $p_k = (2/3)^k (1/3)$; ... По формулам (11.0.13), (11.0.14) $\bar{z} = \rho/(1-\rho) = 2$ состава; $\bar{r} = 4/3$ состава; $\bar{t}_{\text{сист}} = 1$ ч; $\bar{t}_{\text{оч}} = 2/3$ ч.

11.6. Условия предыдущей задачи усложняются тем, что в парке прибытия железнодорожной сортировочной горки могут находиться одновременно не более трех составов (включая обслуживаемый). Если состав прибывает в момент, когда в парке прибытия уже находится три состава, он вынужден ожидать своей очереди на внешних путях. За один час пребывания состава на внешних путях станция платит штраф a руб. Определить средний суточный штраф, который придется уплатить за ожидание составов на внешних путях.

$$s_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} s_1 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} s_2 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} s_3 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} s_4 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} s_5$$

Рис. 11.7

Решение. Вычислим среднее число $z_{\text{в}}$ — составов, находящихся на внешних путях:

$$\bar{z}_{\text{в}} = 1 \cdot p_4 + 2p_5 + \ldots = \sum_{k=4}^{\infty} k p_k = \sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k p_0 = p_0 \sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k;$$

$$\sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k = \rho \sum_{k=4}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^k = \rho \sum_{k=4}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^k = \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{k=4}^{\infty} \rho^k =$$

$$= \rho \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^4}{1-\rho} = \frac{\rho^4 (4-3\rho)}{(1-\rho)^2}; \quad \bar{z} = p_0 \sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho^4 (4-3\rho)}{1-\rho} \approx 1{,}18.$$

По формуле Литтла среднее время, проводимое одним составом на внешних путях, $\bar{t}_{\text{в}} \approx 1{,}18/\lambda = 1{,}18/2 = 0{,}59$ ч. За сутки (24 ч) на станцию приходит в среднем $24\lambda = 48$ составов. Средний суточный штраф составляет $48 \cdot 0{,}59 \cdot a \approx 28{,}3a$.

11.7. Вычислить непосредственно по графу состояний, пользуясь схемой гибели и размножения, финальные вероятности состояний для простейшей двухканальной СМО ($n = 2$) с тремя местами в очереди ($m = 3$) при $\lambda = 0{,}6$; $\mu = 0{,}2$; $\rho = \lambda/\mu = 3$. Найти для этой СМО характеристики $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$, не пользуясь формулами (11.0.26), а непосредственно через финальные вероятности, и сравнить с теми, которые получаются по формулам (11.0.26).

Решение. Граф состояний СМО показан на рис. 11.7. По схеме гибели и размножения, обозначая $\lambda/\mu = \rho$, получаем:

$$p_0 = \left\{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{2^2} + \frac{\rho^4}{2^3} + \frac{\rho^5}{2^4}\right\}^{-1} = (40{,}58)^{-1} \approx 0{,}025;$$

$$p_1=\frac{3}{40,58}\approx 0,074;\ p_2=\frac{4,5}{40,58}\approx 0,111;\ p_3=\frac{6,75}{40,58}\approx 0,165;\ p_4=$$

$$=\frac{10,15}{40,58}\approx 0,250;\ p_5=\frac{15,18}{40,58}\approx 0,375;$$

$$\bar{z}=1\cdot 0,074+2\cdot 0,111+3\cdot 0,165+4\cdot 0,250+5\cdot 0,375\approx 3,67;\ \bar{r}=$$
$$=1\cdot 0,165+2\cdot 0,250+3\cdot 0,375\approx 1,79;\ \bar{t}_{\text{сист}}=\bar{z}/0,6\approx 6,11;$$
$$\bar{t}_{\text{оч}}=\bar{r}/0,6\approx 2,98.$$

11.8. Формула для $\bar{r}$ (11.0.28) справедлива для любого $\varkappa<1$ или $\varkappa>1$. При $\varkappa=1$ она перестает работать (дает неопределенность вида 0/0). Пользуясь непосредственно схемой гибели и размножения, вывести для этого случая вероятности состояний $p_0, p_1, \ldots; p_{n+m}$ и найти характеристики эффективности СМО: A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$, $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$.

s_0 ⇄ s_1 ⇄ s_2 ⇄ … ⇄ s_k ⇄ … ⇄ s_n ⇄ … ⇄ s_{n+m} (вверху: λ, λ, λ, λ, λ, λ; внизу: μ, 2μ, $k\mu$, $n\mu$, $n\mu$, $n\mu$)

Рис. 11.8

Решение. Граф состояний СМО имеет вид, показанный на рис. 11.8. Пользуясь общими формулами для схемы гибели и размножения и обозначая $\lambda/\mu=\rho$, имеем

$$p_0=\left\{1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}+\ldots+\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}\right\}^{-1}=$$
$$=\left\{1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho}{n}+\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]\right\}^{-1}.$$

При $\varkappa=\rho/n=1$

$$p_0=\left\{1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{m\rho^n}{n!}\right\}^{-1};\qquad (11.8.1)$$

$$p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0\quad (1\leqslant k\leqslant n);\quad p_{n+r}=\frac{\rho^n}{n!}p_0\quad (1\leqslant r\leqslant m);\quad (11.8.2)$$

$$P_{\text{отк}}=p_{n+m};\ Q=1-p_{n+m}=1-\frac{\rho^n}{n!}p_0;$$

$$A=\lambda Q=\lambda\left[1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right];\ \bar{k}=A/\mu=\rho\left[1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right];$$

$$\bar{r}=\sum_{r=1}^{m} rp_{n+r}=\sum_{r=1}^{m} r\frac{\rho^n}{n!}p_0=\frac{\rho^n}{n!}p_0\sum_{r=1}^{m} r=\frac{\rho^n}{n!}\,\frac{m(m+1)}{2}p_0;\qquad (11.8.3)$$

$$\bar{z}=\bar{r}+\bar{k};\ \bar{t}_{\text{сист}}=\bar{z}/\lambda;\ \bar{t}_{\text{оч}}=\bar{r}/\lambda.$$

11.9. Автозаправочная станция (АЗС) имеет две колонки ($n = 2$); площадка возле нее допускает одновременное ожидание не более четырех автомашин ($m = 4$). Поток автомашин, прибывающих на станцию, простейший с интенсивностью $\lambda = 1$ машина/мин. Время обслуживания автомашины — показательное со средним значением $\bar{t}_{обсл} = 2$ мин. Найти финальные вероятности состояний АЗС и ее характеристики: A, Q, $P_{отк}$, $\bar{k}$, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{сист}$, $\bar{t}_{оч}$.

Решение. $\lambda = 1$, $\mu = 1/2 = 0,5$; $\rho = 2$; $\varkappa = \rho/n = 1$. По формулам (11.8.1)—(11.8.3) имеем:

$$p_0 = \left\{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^2}{2!} \cdot 4\right\}^{-1} = \frac{1}{13}; \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{2}{13};$$

$$P_{отк} = 2/13; \; Q = 1 - P_{отк} = 11/13; \; A = \lambda Q = 11/13 \approx 0,85 \text{ машины/мин};$$

$$\bar{k} = A/\mu = 22/13 \approx 1,69 \text{ колонки};$$

$$\bar{r} = \frac{2^2}{2!} \frac{4(4+1)}{2} \cdot \frac{1}{13} \approx 1,54 \text{ машины}; \; \bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 3,23 \text{ машины}.$$

11.10. Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 4$ заявки/ч. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{обсл} = 0,8$ ч. Каждая обслуженная заявка приносит доход $c = 4$ руб. Содержание каждого канала обходится 2 руб./ч. Решить: выгодно или невыгодно в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех?

Решение. По формулам Эрланга (11.0.6)

$$p_0 = \left\{1 + 3,2 + \frac{3,2^2}{2!}\right\}^{-1} = (9,32)^{-1} \approx 0,107; \; p_2 \approx \frac{5,12}{9,32} \approx 0,550;$$

$$Q = 1 - p_2 \approx 0,450; \; A = 4Q \approx 1,8 \text{ заявки/ч}.$$

Доход от заявок, приносимый СМО в данном варианте, равен $D = A \cdot c \approx 7,2$ руб./ч.

Подсчитаем те же характеристики для трехканальной СМО (отмечая их штрихом вверху):

$$p_0' = \left\{1 + 3,2 + \frac{3,2^2}{2!} + \frac{3,2^3}{3!}\right\}^{-1} \approx 0,0677; \; p_3' \approx 5,48 \cdot 0,0677 \approx 0,371;$$

$$Q' = 1 - p_3' \approx 0,629; \; A' = 4Q' \approx 2,52; \; D' = A' \cdot c \approx 10,08 \text{ руб./ч}.$$

Увеличение дохода равно $D' - D = 2,88$ руб./ч; увеличение расхода равно 2 руб./ч; из этого видно, что переход от $n = 2$ к $n = 3$ экономически выгоден.

11.11. Рассматривается простейшая СМО с практически неограниченным числом каналов ($n \to \infty$). На вход СМО поступает поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность потока обслуживаний (для одного канала) равна μ. Найти финальные вероятности состояний СМО и среднее число занятых каналов $\bar{k}$.

Решение. Данная СМО не дает ни отказов, ни очередей; ее можно рассматривать как предельный случай СМО с отказами при $n \to \infty$. Формулы Эрланга (11.0.6) дают

$$p_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \right\}^{-1} = e^{-\rho}, \text{ где } \rho = \frac{\lambda}{\mu}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = P(k, \rho),$$

(см. приложение 1). При неограниченном числе каналов $A = \lambda$; $\bar{k} = \lambda/\mu = \rho$.

11.12. Рассматривается одноканальная СМО с отказами; на ее вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$; Работаю-

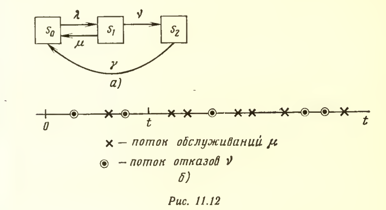


Рис. 11.12

щий канал может время от времени выходить из строя (отказывать); поток отказов канала — простейший с интенсивностью ν. Восстановление (ремонт) вышедшего из строя канала начинается мгновенно после его отказа; время ремонта $T_р$ — показательное с параметром $\gamma = 1/\bar{t}_р$. Заявка, которая обслуживалась в момент выхода канала из строя, покидает СМО не обслуженной.

Найти финальные вероятности состояний СМО: s_0 — канал свободен; s_1 — канал занят, исправен; s_2 — канал ремонтируется и характеристики СМО: A и Q.

Решение. Граф состояний СМО дан на рис. 11.12, *а*. Алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 + \gamma p_2; \; (\mu + \nu) p_1 = \lambda p_0; \; \nu p_1 = \gamma p_2; \qquad (11.12.1)$$

к ним прибавляется нормировочное условие

$$p_0 = p_1 + p_2 = 1. \qquad (11.12.2)$$

Выразим вероятности p_1, p_2 из (11.12.1) через p_0:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \nu} p_0; \; p_2 = \frac{\nu}{\gamma} p_1 = \frac{\lambda \nu}{\gamma(\mu + \nu)} p_0.$$

Подставляя p_1 и p_2 в (11.12.2), получаем

$$p_0 = \{1 + \lambda/(\mu + \nu) + \lambda\nu/[\gamma(\mu + \nu)]\}^{-1}. \qquad (11.12.3)$$

Чтобы найти относительную пропускную способность Q, нужно вероятность p_0 того, что заявка будет принята к обслуживанию, умножить на условную вероятность p' того, что заявка, принятая к обслуживанию, фактически будет обслужена (канал не откажет за время обслуживания заявки). Найдем эту условную вероятность по интегральной формуле полной вероятности. Сделаем гипотезу, состоящую в том, что время обслуживания заявки попало на участок от t до $t + dt$; вероятность этой гипотезы приближенно равна $f(t)\,dt$, где $f(t)$ — плотность распределения времени обслуживания: $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ $(t > 0)$. Условная вероятность того, что канал не выйдет из строя за время t, равна $e^{-\nu t}$; отсюда

$$p' = \int_0^\infty \mu\, e^{-\mu t} e^{-\nu t}\, dt = \int_0^\infty \mu\, e^{-(\mu+\nu)t}\, dt = \frac{\mu}{\mu+\nu}.$$

Эту условную вероятность можно найти и проще: она равна вероятности того, что начатое обслуживание закончится раньше, чем канал выйдет из строя. Представим на оси $0t$ (рис. 11.12, *б*) совмещение (суперпозицию) двух потоков: потока обслуживаний с интенсивностью μ (обозначен крестиками) и потока отказов канала с интенсивностью ν (обозначен кружками). Зафиксируем любую точку t на оси $0t$ и найдем вероятность того, что первый после нее крестик придет раньше, чем кружок. Очевидно, она равна отношению интенсивности потока крестиков к суммарной интенсивности потока крестиков и кружков: $\mu/(\mu + \nu)$. Таким образом,

$$Q = p_0\, p' = \left(\frac{\mu}{\mu+\nu}\right) \Big/ \left(1 + \frac{\lambda}{\mu+\nu} + \frac{\lambda\nu}{\gamma(\mu+\nu)}\right) = \frac{\mu}{\mu+\nu+\lambda(1+\nu/\gamma)}; \qquad (11.12.4)$$

$$A = \lambda Q.$$

11.13. Условия задачи 11.12 повторяются, но с той разницей, что канал может выходить из строя и в неработающем состоянии (с интенсивностью $\nu' < \nu$).

Р е ш е н и е. Граф состояний СМО дан на рис. 11.13. Из уравнений

$$(\lambda + \nu')\, p_0 = \mu p_1 + \gamma p_2; \quad (\mu + \nu)\, p_1 = \lambda p_0; \quad \gamma p_2 = \nu p_1 + \nu' p_0;$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1$$

найдем финальные вероятности

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\lambda}{\mu+\nu} + \frac{\lambda\nu + \mu\nu' + \nu\nu'}{\mu+\nu}\right\}^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu+\nu}\, p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda\nu + \mu\nu' + \nu\nu'}{\mu+\nu}\, p_0;$$

$$Q = p_0 \frac{\mu}{\mu+\nu}; \quad A = \lambda Q = p_0 \frac{\lambda\mu}{\mu+\nu}.$$

11.14. Рассматривается простейшая одноканальная СМО с ограниченной очередью $m = 2$; работающий канал может иногда выходить из строя (отказывать). Заявка, которая обслуживается в момент отказа канала, становится в очередь, если в ней еще есть свободные места; если нет, она покидает СМО необслуженной. Интенсивность потока заявок λ, потока обслуживаний μ, потока отказов канала ν, потока восстановлений (ремонтов) γ. Перечислить состояния СМО и найти для них финальные вероятности, а также характеристики эффективности СМО: A, $\bar{k}$, $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{t}_{сист}$, $\bar{t}_{оч}$ при $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 0{,}5$, $\gamma = 1$.

Р е ш е н и е. Состояния СМО:

s_{00} — СМО свободна, канал исправен;

s_{10} — канал занят и исправен, очереди нет;

s_{11} — канал вышел из строя, ремонтируется; в СМО имеется одна заявка, ждущая очереди;

s_{20} — канал занят и исправен; одна заявка обслуживается, другая ждет очереди;

s_{21} — канал вышел из строя, ремонтируется; в очереди ждут две заявки;

s_{30} — канал занят и исправен; две заявки ждут очереди, одна обслуживается.

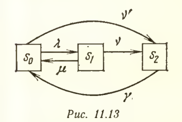


Рис. 11.13

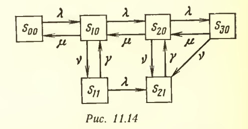


Рис. 11.14

Граф состояний СМО показан на рис. 11.14. Уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$\mu p_{10} = \lambda p_{00};\ \ \mu p_{20} + \gamma p_{11} + \lambda p_{00} = (\mu + \lambda + \nu)\, p_{10};$$

$$\mu p_{30} + \gamma p_{21} + \lambda p_{10} = (\mu + \lambda + \nu)\, p_{20};\ \ \lambda p_{20} = (\mu + \nu)\, p_{30};$$

$$\nu p_{20} = (\mu + \nu)\, p_{30};$$

$$\nu p_{10} = (\gamma + \lambda)\, p_{11};\ \ \lambda p_{11} + \nu p_{20} + \nu p_{30} = \gamma p_{21};$$

$$p_{00} + p_{10} + p_{11} + p_{20} + p_{21} + p_{30} = 1.$$

Решая эти уравнения при $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 0{,}5$, $\gamma = 1$, получаем:

$$p_{00} = 3/61 \approx 0{,}049;\ \ p_{10} = 6/61 \approx 0{,}098;\ \ p_{20} = 14/61 \approx 0{,}230;$$

$$p_{30} = 56/183 \approx 0{,}306;\ \ p_{11} = 1/61 \approx 0{,}016;\ \ p_{21} = 55/183 \approx 0{,}301.$$

Отсюда

$$\bar{z} = 1\,(p_{10} + p_{11}) + 2\,(p_{20} + p_{21}) + 3p_{30} = 383/183 \approx 2{,}09;$$

$$\bar{r} = 1(\,p_{20} + p_{11}) + 2\,(p_{21} + p_{30}) = 89/61 \approx 1{,}46.$$

$$\bar{k} = 1\,(p_{10} + p_{20} + p_{30}) = 116/183 \approx 0{,}63.$$

Абсолютная пропускная способность A для СМО с неотказывающими каналами могла бы быть найдена умножением $\bar{k}$ на μ; в нашем случае производительность одного канала (среднее число заявок, фактически обслуживаемых в единицу времени) можно найти, умножая на вероятность $\mu/(\mu+\nu)$ того, что начатое обслуживание будет доведено до конца: $A = \bar{k}\mu\cdot\mu/(\mu+\nu) = \bar{k}\mu^2/(\mu+\nu) \approx 0{,}42$.

11.15. В зубоврачебном кабинете три кресла ($n = 3$), а в коридоре имеются три стула ($m = 3$) для ожидания приема. Поток клиентов — простейший с интенсивностью $\lambda = 1{,}2$ клиента/ч. Время обслуживания (приема клиента) — показательное со средним значением $\bar{t}_{обсл} = 20$ мин. Если все три стула в коридоре заняты, клиент в очередь не становится. Определить среднее число клиентов, обслуживаемых кабинетом за час, среднюю долю обслуженных клиентов из числа пришедших, среднее число занятых стульев в коридоре, среднее время $\bar{t}_{сист}$, которое клиент проведет в коридоре и в кабинете; то же самое среднее время при условии, что клиент будет обслужен.

Решение. $\rho = 12/3 = 4$; $\varkappa = \rho/3 = 4/3$; $n = 3$; $m = 3$. По формулам (11.0.26)—(11.0.30) находим:

$$p_0 = \left\{1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{3\cdot 6}\cdot\frac{1-(4/3)^3}{1-4/3}\right\}^{-1} \approx 0{,}01218 \approx 0{,}012;\ p_1 =$$

$$= 4\cdot 0{,}01218 \approx 0{,}049;\ p_2 = 8\cdot 0{,}01218 \approx 0{,}097;\ p_3 = \frac{32}{3}\cdot 0{,}01218 \approx$$

$$\approx 0{,}130;\ p_{3+1} = \frac{4^4}{36}\cdot 0{,}01218 \approx 0{,}173;\ p_{3+2} = \frac{4}{3}\,p_{3+1} \approx$$

$$\approx 0{,}231;\ p_{3+3} = \frac{4}{3}\,p_{3+2} \approx 0{,}307.$$

Средняя доля обслуживаемых клиентов $Q = 1 - P_{отк} = 1 - p_{3+3} \approx 1 - 0{,}307 = 0{,}693$.

Среднее число клиентов, обслуживаемых кабинетом за час, равно $A = \lambda Q \approx 12\cdot 0{,}683 \approx 8{,}32$.

Среднее число занятых каналов (кресел) [по формуле (11.0.27)] $\bar{k} = 4\,(1 - p_{3+3}) \approx 2{,}78$.

Среднее число клиентов в очереди [по формуле (11.0.28)]

$$\bar{r} = \frac{4^4\cdot 0{,}01218}{3\cdot 6}\ \frac{1 - 4\cdot(4/3)^3 + 3\ (4/3)^4}{(1-4/3)^2} \approx 1{,}56;$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 4{,}34;\ \bar{t}_{оч} = \bar{r}/\lambda \approx 0{,}13\ \text{ч};\ \bar{t}_{сист} = \bar{z}/\lambda \approx 0{,}362\ \text{ч}.$$

Такие малые значения $\bar{t}_{сист}$ и $\bar{t}_{оч}$ связаны с тем, что некоторые клиенты уходят, не становясь в очередь. Условное среднее время, проведенное клиентом в системе, при условии, что он был обслужен, равно $\bar{\bar{t}}_{сист} = \bar{t}_{сист}/Q \approx 0{,}52$ ч, а условное среднее время пребывания в очереди (при том же условии) $\bar{\bar{t}}_{оч} = \bar{t}_{оч}/Q \approx 0{,}19$ ч.

11.16. Формулы (11.0.26), (11.0.28) при $\varkappa = 1$ дают неопределенность вида 0/0. Раскрыть эту неопределенность и написать формулы, справедливые при $\varkappa = 1$.

Решение. При правилу Лопиталя

$$\lim_{\varkappa\to 1}\frac{1-\varkappa^m}{1-\varkappa}=\frac{-m\varkappa^{m-1}}{-\varkappa}=m;$$

$$p_0=\left\{1+\frac{\rho}{1!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}\,m}{n\cdot n!}\right\}^{-1}; \tag{11.16.1}$$

$$p_k=\frac{\rho^k}{k!}\,p_0 \quad (1\leqslant k\leqslant n); \tag{11.16.2}$$

$$p_{n+1}=p_{n+2}=\ldots=p_{n+m}=\frac{\rho^n}{n!}\,p_0, \tag{11.16.3}$$

т. е. все вероятности, начиная с p_n и кончая p_{n+m}, равны друг другу.

Формулы для A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$ остаются прежними.

Раскрывая неопределенность в формуле (11.0.28), получаем

$$\lim_{\varkappa\to 1}\frac{1-(m+1)\,\varkappa^m+m\varkappa^{m+1}}{(1-\varkappa)^2}=\frac{m\,(m+1)}{2}\,;\ \bar{r}=\frac{\rho^{n+1}\,p_0\,m\,(m+1)}{2n\cdot n!}. \tag{11.16.4}$$

Формулы (11.0.29), (11.0.30) остаются прежними.

Формулы (11.16.1)—(11.16.3) можно было бы вывести и не раскрывая неопределенность, а непосредственно из схемы гибели и размножения.

11.17. 1) Подсчитать характеристики эффективности A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$, $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$ для простейшей одноканальной СМО с тремя местами в очереди ($m=3$) при условиях: $\lambda=4$ заявки/ч; $\bar{t}_{\text{обсл}}=1/\mu=0{,}5$. 2) Выяснить, как эти характеристики изменятся, если увеличить число мест в очереди до $m=4$.

Решение. $\mu=2$; $\rho=\lambda/\mu=2$; по формулам (11.0.12)—(11.0.16) при $m=3$ имеем: $p_0=1/31$; $p_4=16/31$; $Q\approx 0{,}484$; $A=\lambda Q\approx 1{,}93$ заявки/ч; $\bar{k}=\rho Q\approx 0{,}968$; $\bar{r}\approx 2{,}19$ заявки; $\bar{z}\approx 3{,}16$ заявки; $\bar{t}_{\text{оч}}\approx 0{,}55$ ч; $\bar{t}_{\text{сист}}\approx 0{,}79$ ч.

2) При $m=4$ имеем $p_0=1/63\approx 0{,}0158$; $p_5=32/63\approx 0{,}507$; $Q\approx 0{,}493$; $A\approx 1{,}96$ заявки/ч; $\bar{r}\approx 3{,}11$ заявки; $\bar{z}=4{,}09$ заявки; $\bar{t}_{\text{оч}}\approx 0{,}78$ ч; $\bar{t}_{\text{сист}}\approx 1{,}02$ ч.

Таким образом, увеличение числа мест m с трех до четырех приводит к незначительному увеличению абсолютной (и относительной) пропускной способности, сопровождаясь при этом некоторым увеличением среднего числа заявок в очереди и в системе, а также соответствующих средних времен. Это и естественно, так как некоторые заявки, получающие отказ в первом варианте, все же становятся в очередь во втором.

11.18. Как изменятся характеристики эффективности СМО предыдущей задачи, если λ и μ остаются прежними, $m=3$, но число каналов обслуживания увеличится до $n=2$?

Р е ш е н и е. $\varkappa = 1$; по формулам (11.16.1), (11.16.2) имеем $p_0 = 1/11$; $p_1 = \ldots = p_5 = 2/11$; $Q = 1 - 2/11 \approx 0{,}818$; $A \approx 3{,}27$ заявки/ч; $\bar{r} = 12/11 \approx 1{,}09$ заявки; $\bar{k} = A/\mu \approx 1{,}64$; $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 2{,}73$ заявки; $\bar{t}_{оч} \approx 0{,}27$ ч; $\bar{t}_{сист} \approx 0{,}68$ ч.

11.19. Система массового обслуживания — билетная касса с одним окошком ($n = 1$) и неограниченной очередью. Касса продает билеты в пункты A и B; пассажиров, желающих купить билет в пункт A, приходит в среднем трое за 20 мин, в пункт B — двое за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания — показательное. Установить, существуют ли финальные вероятности состояний СМО и если да — вычислить первые три из них: p_0, p_1, p_2. Найти характеристики эффективности СМО: $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{сист}$ и $\bar{t}_{оч}$.

Р е ш е н и е. $\lambda_A = 3/20 = 0{,}15$ заявки/мин; $\lambda_B = 2/20 = 0{,}10$ заявки/мин. Общая интенсивность потока заявок $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 0{,}25$ заявки/мин; $\mu = 3/10 = 0{,}3$ заявки/мин; $\rho = \lambda/\mu \approx 0{,}833 < 1$, финальные вероятности существуют. По формулам (11.0.12)—(11.0.14): $p_0 \approx 0{,}167$; $p_1 \approx 0{,}139$; $p_2 \approx 0{,}116$; $\bar{z} \approx \frac{0{,}833}{0{,}167} \approx 4{,}99$ заявки; $\bar{r} = 0{,}833^2/0{,}167 \approx 4{,}16$ заявки; $\bar{t}_{сист} \approx 4{,}99/0{,}25 \approx 20{,}0$ мин; $\bar{t}_{оч} \approx 4{,}16/0{,}25 \approx 16{,}7$ мин.

11.20. Одноканальная СМО — ЭВМ, на которую поступают заявки (требования на расчеты). Поток заявок — простейший со средним интервалом между заявками $\bar{t} = 10$ мин. Время обслуживания $T_{обсл}$ распределено по закону Эрланга 3-го порядка с математическим ожиданием $\bar{t}_{обсл} = 8$ мин. Определить среднее число $\bar{z}$ заявок в СМО и среднее число $\bar{r}$ заявок в очереди, а также средние времена пребывания заявки в системе $\bar{t}_{сист}$ и в очереди $\bar{t}_{оч}$.

Р е ш е н и е. Характеристики СМО могут быть найдены по формуле Полячека—Хинчина (11.0.31), (11.0.32). Имеем: $\lambda = 0{,}1$ заявки/мин; $\mu = 0{,}125$ заявки/мин; $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8$.

Коэффициент вариации времени обслуживания для закона Эрланга 3-го порядка равен $1/\sqrt{3}$. По формуле (11.0.31) $\bar{r} = 0{,}64\,(1 + 1/3) : (2 \cdot 0{,}2) \approx 2{,}13$. По формуле (11.0.32) $\bar{z} = \bar{r} + 0{,}8 \approx 2{,}93$. По формуле Литтла $\bar{t}_{оч} \approx 21{,}3$ мин, $\bar{t}_{сист} \approx 29{,}3$ мин.

11.21. Условия предыдущей задачи изменены: поток заявок уже не простейший, а пальмовский, причем интервал между событиями в потоке распределен по обобщенному закону Эрланга 2-го порядка (см. задачу 8.38) с параметрами $\lambda_1 = 1/2$; $\lambda_2 = 1/8$. Найти приближенно, по формулам (11.0.34)—(11.0.37), характеристики эффективности СМО.

Р е ш е н и е. Случайная величина T, распределенная по обобщенному закону Эрланга 2-го порядка, есть сумма двух случайных величин T_1 и T_2, распределенных по показательным законам с параметрами: $\lambda_1 = 1/2$; $\lambda_2 = 1/8$. Отсюда $M[T] = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 = 10$ мин; $D[T] = D[T_1] + D[T_2] = 2^2 + 8^2 = 68$; $v_\lambda^2 = 68/10^2 = 0{,}68$; $v_\mu^2 = 1/3$. Следовательно,

$\bar{r} = 1{,}62$ заявки; $\bar{z} = 2{,}42$ заявки; $\bar{t}_{оч} = 16{,}2$ мин; $\bar{t}_{сист} = 24{,}2$ мин.

11.22. Техническое устройство (ТУ) может время от времени выходить из строя (отказывать). Поток отказов ТУ — простейший с интенсивностью $\lambda = 1{,}6$ отказа в сутки. Время $T_в$ восстановления (ремонта) ТУ имеет равномерное распределение на участке от 0 до 1 суток. Найти (для предельного стационарного режима) среднюю долю R времени, в течение которого ТУ работает.

Решение. Состояния ТУ: s_0 — работает; s_1 — ремонтируется. Граф состояний ТУ показан на рис. 11.22, где $\mu = 1/M[T_в] = 1/0{,}5 = 2$. Этот граф в точности совпадает с графом состояний одноканальной СМО с отказами. Мы знаем, что если поток заявок, поступающих на СМО, — простейший, а время обслуживания имеет произвольное распределение, то справедливы формулы Эрланга (11.0.6); в данном случае $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8$; $p_0 = \{1 + \rho/1!\}^{-1} = 1/1{,}8 \approx 0{,}556$; $p_1 = 1 - 0{,}556 \approx 0{,}444$. Итак, $R \approx 0{,}556$, т. е. ТУ будет работать немногим более половины всего времени, а остальное время ремонтироваться.

11.23. В условиях предыдущей задачи ТУ дублировано точно таким же ТУ, которое может выходить из строя только в работающем состоянии; λ, μ — такие же, как в задаче 11.22. Найти величину R, а также среднее число $\bar{k}$ неисправных ТУ.

Решение. Состояния системы S: s_0 — оба ТУ исправны (одно из них работает, другое нет); s_1 — одно ТУ работает, другое ремонтируется; s_2 — оба ТУ ремонтируются. Граф состояний дан на рис. 11.23. Граф в точности совпадает с графом состояний двухканальной СМО с отказами. По формулам Эрланга (11.0.6)

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!}\right\}^{-1} = \{1 + 0{,}8 + 0{,}64/2\}^{-1} \approx 0{,}472;$$

$$p_1 \approx 0{,}8 \cdot 0{,}472 = 0{,}378; \quad R = p_0 + p_1 \approx 0{,}850.$$

Очевидно, тот же прием (сведения к СМО с отказами) может быть применен и в случае, когда число дублирующих ТУ более одного.

11.24. Система массового обслуживания — обувной магазин, в котором каждый покупатель проходит три фазы обслуживания: 1) примерка и выбор обуви; 2) уплата денег в кассу и 3) получение покупки на контроле. В магазин прибывает простейший поток покупателей с интенсивностью $\lambda = 45$ человек/ч.

В отделе примерки имеются четыре стула, занимая которые, покупатели могут самостоятельно выбирать и примерять обувь. Среднее время примерки и выбора обуви $\bar{t}_1 = 5$ мин. Выбравший обувь покупатель направляется в кассу, где вторично становится в очередь (касса в магазине одна). Среднее время оплаты товара в кассе $\bar{t}_2 = 1$ мин. После оплаты покупатель идет на контроль, где становится в новую очередь и получает покупку. На контроле работают три продавца; среднее время выдачи покупки $\bar{t}_3 = 2$ мин. Все потоки событий — простейшие.

Рассматривая магазин как трехфазовую СМО, найти характеристики ее эффективности:

$\bar{r}_1$ ($\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$) — среднее число покупателей в очереди к первой (второй, третьей) фазе обслуживания;

$\bar{z}_1$ ($\bar{z}_2$, $\bar{z}_3$) — среднее число покупателей, связанных с первой (второй, третьей) фазой обслуживания;

$\bar{t}_{оч}^{(1)}$ ($\bar{t}_{оч}^{(2)}$, $\bar{t}_{оч}^{(3)}$) — среднее время ожидания покупателя в очереди к первой (второй, третьей) фазе;

$\bar{t}_{сист}^{(1)}$ ($\bar{t}_{сист}^{(2)}$, $\bar{t}_{сист}^{(3)}$) — среднее время пребывания покупателя в первой (второй, третьей) фазе обслуживания;

$\bar{r}$ — общее среднее число покупателей во всех трех очередях;

$\bar{z}$ — общее среднее число покупателей в магазине;

$\bar{t}_{оч}$ — общее среднее время, проводимое покупателем в очередях;

$\bar{t}_{сист}$ — общее среднее время, затрачиваемое покупателем на приобретение обуви в магазине.

Дополнительно ответить на следующие вопросы: 1) В каком звене и как нужно улучшить обслуживание для того, чтобы сократить затраты времени покупателей? 2) Как можно было бы учесть тот факт, что не все покупатели находят себе подходящую обувь, и какая-то доля α из них $(0 < \alpha < 1)$ уходит из магазина, не сделав покупки?

Решение. Так как все потоки событий — простейшие, то выходные потоки всех трех фаз тоже будут простейшими, и можно рассматривать три последовательные фазы как три отдельные СМО со своими характеристками.

1. Первая фаза. Так как в отделе примерки четыре стула, то число каналов $n_1 = 4$. Далее, имеем $\bar{t}_1 = 1/\mu_1 = 5$ мин $= 1/12$ ч; $\rho_1 = 45/12 = 15/4 \approx 3{,}75$; $\varkappa_1 = \rho_1/n_1 = 15/16 < 1$. По формулам (11.0.21)—(11.0.25) находим:

$$p_0^{(1)} = \left\{1 + 3{,}75 + \frac{(3{,}75)^2}{2} + \frac{(3{,}75)^3}{2\cdot 3} + \frac{(3{,}75)^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \right.$$

$$\left. + \frac{(3{,}75)^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 4\,(1 - 15/16)}\right\}^{-1} \approx (151{,}58)^{-1} \approx 0{,}0060;\ \bar{k}_1 = 3{,}75;$$

$$\bar{r}_1 = \frac{(3{,}75)^5}{4\cdot 4!}\,\frac{p_0^{(1)}}{(1-\varkappa_1)^2} \approx 13{,}01;\ \bar{z}_1 = 16{,}76;$$

$$\bar{t}_{оч}^{(1)} = \bar{r}_1/\lambda \approx 0{,}289\text{ ч} \approx 17{,}3\text{ мин};\ \bar{t}_{сист}^{(1)} = \bar{z}_1/\lambda \approx 0{,}372\text{ ч} \approx 22{,}3\text{ мин}.$$

2. Вторая фаза. $\lambda = 45$; $n_2 = 1$; $\rho_2 = 0{,}75 < 1$. По формулам (11.0.12)—(11.0.14) получаем:

$$\bar{r}_2 = \rho_2^2/(1 - \rho_2) = 9/4 = 2{,}25;\ \bar{z}_2 = \rho_2/(1 - \rho_2) = 3;$$
$$\bar{t}_{оч}^{(1)} = \bar{r}_2/\mu = 0{,}05\text{ ч} = 3\text{ мин};\ \bar{t}_{сист}^{(1)} = 1/15\text{ ч} = 4\text{ мин}.$$

3. Третья фаза. $n_3 = 3$; $\lambda = 45$; $\rho_3 = 3/2$; $\varkappa_3 = 0{,}5 < 1$. По формулам (11.0.21)—(11.0.25) находим: $p_0^{(3)} \approx 0{,}210$; $\bar{r}_3 \approx 0{,}237$;

$$\bar{z}_3 \approx 1{,}737;\quad \bar{t}_{оч}^{(3)} \approx 0{,}316\text{ мин};\ \bar{t}_{сист}^{(3)} \approx 2{,}316\text{ мин}.$$

Складывая средние численности трех очередей, получаем общую среднюю численность очереди:

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 \approx 15{,}5.$$

Аналогично находим среднее число покупателей в магазине $\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 \approx 21{,}5$.

Среднее время пребывания покупателя в очереди

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{t}_{\text{оч}}^{(1)} + \bar{t}_{\text{оч}}^{(2)} + \bar{t}_{\text{оч}}^{(3)} \approx 20{,}6 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания покупателя в магазине

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{сист}}^{(1)} + \bar{t}_{\text{сист}}^{(2)} + \bar{t}_{\text{сист}}^{(3)} \approx 28{,}6 \text{ мин.}$$

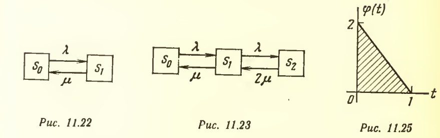


Рис. 11.22 Рис. 11.23 Рис. 11.25

1) Улучшить обслуживание можно, уменьшая время пребывания покупателя в первой фазе, которая представляет собой наиболее слабое звено СМО. Всего проще достигнуть этого, увеличив число n_1 стульев в отделе примерки, т. е. число каналов обслуживания в первой фазе. Например, простое увеличение числа стульев на единицу (т. е. переход от $n_1 = 4$ к $n_1 = 5$) дает существенный выигрыш во времени. Действительно, при $n_1 = 5$ для первой фазы получим: $\rho_1 = 3{,}75$; $\varkappa_1 = 3{,}75/5 = 0{,}75$; $p_0^{(1)} = \{53{,}75\}^{-1}$; $\bar{r}_1 \approx 1{,}38$; $\bar{z}_1 \approx 5{,}13$; $\bar{t}_{\text{оч}}^{(1)} \approx 1{,}84$ мин; $\bar{t}_{\text{сист}}^{(1)} \approx 6{,}84$ мин.

2) Учесть наличие доли покупателей α, уходящих из магазина без покупки, можно, умножив интенсивность входного потока второй и третьей фаз на $(1 - \alpha)$.

11.25. На железнодорожную сортировочную станцию поступает эрланговский 10-го порядка поток составов с интенсивностью $\lambda = 1{,}2$ состава/ч*). Время обслуживания состава $T_{\text{обсл}}$ распределено в интервале от 0 до 1 ч по закону с плотностью $\varphi(t)$, показанной на рис. 11.25. Оценить приближенно [по формулам (11.0.34)—(11.0.37)] характеристики эффективности станции — среднее число $\bar{z}$ составов на станции, в очереди $\bar{r}$, среднее время $\bar{t}_{\text{сист}}$ пребывания состава на станции, среднее время $\bar{t}_{\text{оч}}$ ожидания составом очереди на обслуживание.

---

*) Подчеркнем, что здесь λ — интенсивность именно эрланговского потока, а не того простейшего потока, прореживанием которого получен эрланговский.

Р е ш е н и е. Для закона $\varphi(t)$ имеем $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1/3$; $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8 < 1$. Для потока Эрланга 10-го порядка $v_\lambda^2 = (1/\sqrt{k})^2 = 0{,}1$; v_μ^2 определяем, деля дисперсию $D[T_{\text{обсл}}]$ на квадрат математического ожидания: $v_\mu^2 = 1/2 = 0{,}5$.

Находим характеристики СМО:

$$\bar{r} = \rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2)/[2(1-\rho)] = 0{,}8^2 (0{,}1 + 0{,}5)/(2\cdot 0{,}2) = 0{,}96;$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho \approx 0{,}96 + 0{,}8 = 1{,}76;$$
$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda \approx 0{,}8 \text{ ч}; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + 1/\mu \approx 1{,}13 \text{ ч}.$$

11.26. Показать, что для простейшей n-канальной СМО с неограниченным числом мест в очереди среднее число заявок, находящихся в очереди, заключено в пределах

$$\frac{\varkappa^{n+1}}{1-\varkappa}\,\frac{n}{\varkappa^n(n-1)+1} < \bar{r} < \frac{\varkappa^{n+1}}{1-\varkappa}.$$

Р е ш е н и е. Запишем выражение для $\bar{r}$ в следующем виде [см. формулы (11.0.23), (11.0.21)]:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\,\frac{p_0}{(1-\varkappa)^2} = \frac{\varkappa}{(1-\varkappa)^2}\,p_n, \text{ где } p_n = \frac{\rho^n}{n!}\,p_0.$$

Следовательно,

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!}\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!}\,\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^{-1} =$$
$$= \left(1 + \frac{n}{\rho} + \frac{n(n-1)}{\rho^2} + \dots + \frac{n!}{\rho^n} + \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^{-1} >$$
$$> \left(1 + \frac{1}{\rho} + \frac{2^2}{\rho^2} + \dots + \frac{n^n}{\rho^n} + \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^{-1} = \varkappa^n(1-\varkappa).$$

С другой стороны,

$$p_n < \left(1 + \frac{1}{\rho} + \frac{n}{\rho^2} + \dots + \frac{n^{n-1}}{\rho^n} + \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^{-1} = \frac{\varkappa^n(1-\varkappa)\,n}{\varkappa^n(n-1)+1}.$$

Так как $[\varkappa^n(1-\varkappa)\,n]/[\varkappa^n(n-1)+1] < p_n < \varkappa^n(1-\varkappa)$, то указанное в задаче неравенство также выполняется. Заметим, что последнее неравенство может быть использовано для приближенного определения всех характеристик рассматриваемой СМО.

11.27. Железнодорожная касса имеет два окошка, в каждом из которых продаются билеты в два пункта: Ленинград и Киев. Потоки пассажиров, приобретающих билеты в Ленинград и в Киев одинаковы по интенсивности, которая равна $\lambda_0 = 0{,}45$ пасс./мин. Среднее время обслуживания пассажира (продажи ему билета) $\bar{t}_{\text{обсл}} = 2$ мин.

Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения очередей (в интересах пассажиров) сделать обе кассы специализированными: в первой продавать билеты только в Ленинград, а во второй — только в Киев. Считая в первом приближении все потоки событий простейшими, проверить разумность этого предложения.

Р е ш е н и е. 1) Вычислим характеристики очереди для двухканальной СМО (существующий вариант). Интенсивность потока заявок $\lambda = 2\lambda_0 = 0{,}9$ пасс./мин; $\mu = 1/\bar{t}_{обсл} = 0{,}5$ пасс./мин; $\rho = \lambda/\mu = 1{,}8$; $\varkappa = \rho/2 = 0{,}9 < 1$, финальные вероятности существуют. По формуле (11.0.21)

$$p_0 = \left\{1 + 1{,}8 + \frac{1{,}8^2}{2}\,\frac{0{,}9}{1-0{,}9}\right\}^{-1} \approx 0{,}0575;$$

по формуле (11.0.23)

$$\bar{r} = \frac{1{,}8^3 \cdot 0{,}0575}{2 \cdot 2 \cdot 0{,}01} \approx 8{,}4 \text{ пасс.}; \quad \bar{t}_{оч} = \frac{8{,}4}{0{,}9} \approx 9{,}3 \text{ мин}.$$

2) Во втором варианте (предлагаемом) имеем две одноканальные СМО: $\rho = \lambda_0/\mu = 0{,}45/0{,}5 = 0{,}9 < 1$.

Средняя длина очереди у одной кассы [по формуле (11.0.13)] равна $\bar{r} = \rho^2/(1-\rho) = 0{,}9^2/0{,}1 = 8{,}1$ пасс. Суммарная длина очереди к обеим кассам будет $2\bar{r} = 16{,}2$ пасс.

Время пребывания пассажира в очереди (11.0.14) $\bar{t}_{оч} = \bar{r}/\lambda = 8{,}1/4{,}5 = 18$ мин, что почти вдвое превосходит время стояния в очереди в существующем варианте: 9,3 мин.

Вывод: «рационализаторское» предложение нужно отвергнуть, как резко снижающее эффективность СМО. Резкое ухудшение характеристик СМО при переходе от двухканальной СМО (существующий вариант) к двум одноканальным СМО (предлагаемый вариант) объясняется тем, что, разделив кассу на две специализированные, мы лишили кассиров возможности подменять друг друга.

11.28*. *Простейшая многоканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками и с неограниченным числом мест в очереди.* Имеется простейшая n-канальная СМО с очередью; интенсивность потока заявок λ, потока обслуживаний $\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$. Время пребывания заявки в очереди ограничено некоторым случайным сроком T, распределенным по показательному закону с параметром ν (на каждую заявку, стоящую в очереди, действует «поток уходов» с интенсивностью ν).

Написать формулы для финальных вероятностей состояний, найти относительную пропускную способность СМО Q, среднюю длину очереди $\bar{r}$, среднее время $\bar{t}_{оч}$ пребывания заявки в очереди, среднее число $\bar{z}$ заявок в СМО и среднее время $\bar{t}_{сист}$ пребывания заявки в СМО.

Р е ш е н и е. Состояния системы по-прежнему будем нумеровать соответственно числу заявок, находящихся в СМО. Граф состояний показан на рис. 11.28. Пользуясь общими формулами для схемы гибели и размножения и вводя обозначения $\rho = \lambda/\mu$; $\beta = \nu/\mu$, получаем:

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho}{n+\beta} + \frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \ldots + \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)} + \ldots\right]\right\}^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0; \ \ldots; \ p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 (1 \leqslant k \leqslant n); \ \ldots; \ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho}{n+\beta} p_0; \ \ldots; \ p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)} \times$$

$$\times p_0 (r \geqslant 1); \ \ldots \qquad (11.28.1)$$

В первую формулу (11.28.1) входит бесконечная сумма, не являющаяся геометрической прогрессией, но члены которой убывают быстрее, чем члены геометрической прогрессии. Можно доказать, что ошибка, возникающая от отбрасывания всех членов бесконечной суммы, начиная с r-го, меньше, чем $\frac{\rho^n}{n!} \frac{(\rho/\beta)^r}{r!} e^{-\rho/\beta}$.

Рис. 11.28

Предположим, что вероятности $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots, p_{n+r}, \ldots$ вычислены, и покажем, как можно найти характеристики данной СМО: относительную пропускную способность Q, среднее число заявок в очереди $\bar{r}$ и др. Найдем прежде всего Q. Обслужены будут все заявки, кроме тех, которые уйдут из очереди досрочно. Подсчитаем, сколько заявок в среднем уходит из очереди досрочно в единицу времени. Интенсивность потока уходов, приходящаяся на одну заявку, стоящую в очереди, равна ν, а суммарная средняя интенсивность потока уходов, приходящаяся на все заявки, стоящие в очереди, равна $\nu\bar{r}$. Значит, абсолютная пропускная способность СМО

$$A = \lambda - \nu\bar{r}, \qquad (11.28.2)$$

а относительная

$$Q = A/\lambda = 1 - \nu\bar{r}/\lambda. \qquad (11.28.3)$$

Таким образом, для того чтобы найти Q, нужно прежде всего знать $\bar{r}$, которую непосредственно можно было бы найти по формуле $\bar{r} = 1p_{n+1} + 2p_{n+2} + \ldots + rp_{n+r} + \ldots$ Но эта формула плоха тем, что содержит бесконечное число слагаемых. Этого можно избежать, если воспользоваться выражением для среднего числа занятых каналов $\bar{k}$ через A: $\bar{k} = A/\mu$ или, учитывая (11.28.2),

$$\bar{k} = (\lambda - \nu\bar{r})/\mu = \rho - \beta\bar{r}. \qquad (11.28.4)$$

Из (11.28.4) получим

$$\bar{r} = (\rho - \bar{k})/\beta, \qquad (11.28.5)$$

а среднее число занятых каналов $\bar{k}$ можно подсчитать как математическое ожидание случайной величины K (число занятых каналов) с воз-

можными значениями 0, 1, 2, ..., n и соответствующими вероятностями p_0, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, $[1-(p_0+p_1+...+p_{n-1})]$:

$$\bar{k} = 1p_1 + 2p_2 + ... + (n-1)\,p_{n-1} + n\,[1-(p_0+p_1+...+p_{n-1})]. \qquad (11.28.6)$$

Далее, по формуле (11.28.5) вычисляем $\bar{r}$. Величину $\bar{t}_{оч}$ находим по формуле Литтла:

$$\bar{t}_{оч} = \bar{r}/\lambda. \qquad (11.28.7)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}, \qquad (11.28.8)$$

а среднее время пребывания заявки в СМО

$$\bar{t}_{сист} = \bar{z}/\lambda. \qquad (11.28.9)$$

Примечание. Можно доказать, что для рассмотренной СМО с «нетерпеливыми» заявками финальные вероятности существуют всегда, если только $\beta > 0$. Это подтверждается тем, что ряд в первой формуле (11.28.1) сходится при любых положительных ρ и β. По существу это означает, что очередь не может расти неограниченно: чем больше длина очереди, тем интенсивнее уходят из нее заявки.

11.29. Рассматривается простейшая двухканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками (см. задачу 11.28). Интенсивность потока заявок $\lambda = 3$ заявки/ч; среднее время обслуживания одной заявки $\bar{t}_{обсл} = 1/\mu = 1$ ч; средний срок, в течение которого заявка «терпеливо» стоит в очереди, равен 0,5 ч. Подсчитать финальные вероятности состояний, ограничиваясь теми, которые не меньше 0,001. Найти характеристики эффективности СМО: Q, A, $\bar{k}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{оч}$, $\bar{t}_{сист}$.

Решение. Имеем $\lambda = 3$, $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\rho = 3$, $\beta = 2$, $n = 2$. По формулам задачи 11.28 получаем:

$$p_0 = \left\{1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^2}{2}\left[\frac{3}{4} + \frac{3^2}{4\cdot 6} + \frac{3^3}{4\cdot 6\cdot 8} + \frac{3^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{3^5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} + \frac{3^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \frac{3^7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}\right]\right\}^{-1} \approx 0{,}0692;$$

откуда

$$p_1 = 3p_0 \approx 0{,}208;\; p_2 = \frac{3}{2}p_1 \approx 0{,}311;\; p_3 = \frac{3}{4}p_2 \approx 0{,}234;\; p_4 = \frac{3}{6}p_3 \approx 0{,}117;\; p_5 = \frac{3}{8}p_4 \approx 0{,}044;\; p_6 = \frac{3}{10}p_5 \approx 0{,}013;\; p_7 = \frac{3}{12}p_6 \approx 0{,}003;\quad p_8 = \frac{3}{14}p_7 \approx 0{,}001.$$

Среднее число занятых каналов (11.28.6) $\bar{k} = 1p_1 + 2(1-p_0-p_1) \approx 1{,}654$; средняя длина очереди (11.28.5) $\bar{r} = (\rho - \bar{k})/\beta = (3-1{,}654)/2 \approx 0{,}673$; абсолютная пропускная способность

$A = \bar{k}\mu \approx 1{,}654$ заявки/ч; относительная пропускная способность $Q = A/\lambda \approx 0{,}551$ и далее: $\bar{t}_{оч} = \bar{r}/\lambda \approx 0{,}224$ ч; $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 2{,}327$; $\bar{t}_{сист} = \bar{z}/\lambda \approx 0{,}776$ ч.

11.30. *Простейшая СМО с «ошибками».* Имеется n-канальная СМО с неограниченной очередью. На ее вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; время обслуживания — показательное с параметром μ. Обслуживание происходит без гарантии качества; с вероятностью p оно удовлетворяет заявку, а с вероятностью $q = 1 - p$ — не удовлетворяет, и заявка обращается в СМО вторично либо сразу обслуживается, если нет очереди, либо становится в очередь, если она есть. Ввести состояния СМО (нумеруя их по числу за-

Рис. 11.30

явок в СМО); найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО. Найти среднее число рекламаций, поданных в единицу времени, если каждая неудачно обслуженная заявка подает рекламацию с вероятностью R.

Решение. Состояния СМО:

s_0 — СМО свободна;
s_1 — занят один канал; ...;
s_k — занято k каналов $(1 \leqslant k \leqslant n)$; ...;
s_n — заняты все n каналов
} очереди нет;

s_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоят в очереди $(r = 1, 2, \ldots)$.

Граф состояний приведен на рис. 11.30, где $\tilde{\mu} = p\mu$. Из этого графа видно, что данная СМО эквивалентна другой СМО с полной гарантией качества обслуживания, но с интенсивностью потока обслуживаний, равной $\tilde{\mu} = p\mu$; для этой СМО $\tilde{\rho} = \lambda/\tilde{\mu} = \lambda/(p\mu)$. Формулы (11.0.21)—(11.0.25) остаются справедливыми, но при замене ρ на $\tilde{\rho}$, μ на $\tilde{\mu}$.

11.31. *Простейшая одноканальная замкнутая СМО.* Один рабочий обслуживает m станков, которые время от времени отказывают (требуют наладки). Интенсивность потока отказов одного станка равна λ. Если в момент отказа станка рабочий свободен, он немедленно приступает к наладке; если нет — станок становится в очередь на наладку. Поток отказов станка простейший, время наладки — показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{обсл}$. Ввести состояния СМО, нумеруя их по числу неисправных станков; найти финальные вероятности состояний СМО и следующие характеристики ее эффективности: A — среднее количество станков, ремонтируемое рабочим в единицу времени; $\bar{w}$ — среднее число неисправных станков; $\bar{r}$ — среднее число станков, ожидаю-

щих ремонта в очереди; $P_{зан}$ — вероятность того, что рабочий будет занят.

Р е ш е н и е. Состояния СМО:

s_0 — все станки исправны (рабочий свободен);

s_1 — один станок неисправен (рабочий занят его наладкой); ...;

s_k — k станков неисправны, один налаживается, $k-1$ ждут очереди

s_m — все m станков неисправны, один налаживается, $m-1$ ждут очереди.

Граф состояний показан на рис. 11.31.

$$s_0 \underset{\mu}{\overset{m\lambda}{\rightleftarrows}} s_1 \underset{\mu}{\overset{(m-1)\lambda}{\rightleftarrows}} s_2 \rightleftarrows \cdots \underset{\mu}{\overset{(m-k+1)\lambda}{\rightleftarrows}} s_k \underset{\mu}{\overset{(m-k)\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} s_m$$

Рис. 11.31

По общим формулам схемы гибели и размножения, обозначая $\rho = \lambda/\mu$, получаем

$$p_0 = \{1 + m\rho + m(m-1)\rho^2 + \ldots + m(m-1)\ldots(m-k+1)\rho^k + \ldots + m!\rho^n\}^{-1};$$
$$p_1 = m\rho p_0;\ p_2 = m(m-1)\rho^2 p_0;\ \ldots;$$
$$p_k = m(m-1)\ldots(m-k+1)\rho^k p_0\ (1 \leqslant k \leqslant n);\ \ldots;$$
$$p_m = m!\rho^m p_0. \quad (11.31.1)$$

Чтобы определить абсолютную пропускную способность A, найдем сначала вероятность того, что рабочий занят:

$$P_{зан} = 1 - p_0. \quad (11.31.2)$$

Если рабочий занят, он налаживает μ станков в единицу времени; значит,

$$A = (1 - p_0)\,\mu. \quad (11.31.3)$$

Среднее число неисправных станков $\bar{w}$ можно выразить через A с помощью следующих рассуждений. Каждый работающий станок порождает поток отказов с интенсивностью λ; в среднем работает $m - \bar{w}$ станков; порождаемый ими поток отказов имеет интенсивность $(m - \bar{w})\,\lambda$; все эти неисправности ликвидируются рабочим, значит, $(1 - p_0)\,\mu = (m - \bar{w})\,\lambda$, откуда

$$\bar{w} = m - (1 - p_0)/\rho. \quad (11.31.4)$$

Среднее число $\bar{r}$ станков в очереди найдем следующим путем:

$$\bar{w} = \bar{r} + \bar{k}, \quad (11.31.5)$$

где $\bar{k}$ — среднее число обслуживаемых станков (или, иначе, среднее число занятых каналов обслуживания). В нашем случае число занятых

каналов равно 0, если рабочий свободен, и 1, если он занят: $\bar{k} = 0 \times \times p_0 + 1 (1 - p_0) = 1 - p_0$. Следовательно,

$$\bar{r} = m - (1 - p_0)/\rho - (1 - p_0) \text{ или } \bar{r} = m - (1 - p_0)(1 + 1/\rho). \tag{11.31.6}$$

11.32*. В условиях задачи 11.31 найти среднее время $\bar{t}_{оч}$, которое будет ожидать наладки произвольно выбранный вышедший из строя станок.

Решение. Формула Литтла, которой мы пользовались ранее, пригодна только для открытых СМО, где интенсивность потока заявок не зависит от состояния СМО. Для замкнутых СМО она непригодна. Время $\bar{t}_{оч}$ найдем с помощью следующих рассуждений. Пусть какой-то момент t появилась заявка (отказал станок). Найдем вероятность того, что в этот момент СМО находилась в состоянии s_k ($k = 0, \ldots, m - 1$) (ясно, что в состоянии s_m она находиться не могла). Рассмотрим m гипотез:

H_0 — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_0;
H_1 — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_1;
H_k — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_k, ...;
H_{m-1} — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_{m-1}.

Априорные вероятности этих гипотез равны $p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_{m-1}$.

Теперь найдем апостериорные вероятности гипотез при условии, что наблюдено событие A = {на элементарном участке времени $(t, t + dt)$ появился отказ станка}. Условные вероятности этого события при гипотезах $H_0, H_1, \ldots, H_{m-1}$ равны:

$$P(A|H_0) = m\lambda dt;\ P(A|H_1) = (m - 1)\lambda dt;\ \ldots;$$
$$P(A|H_k) = (m - k)\lambda dt;\ \ldots;\ P(A|H_{m-1}) = \lambda dt.$$

По формулам Бейеса найдем апостериорные вероятности гипотез (при условии, что событие A произошло). Обозначая эти вероятности $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \ldots, \tilde{p}_{m-1}$, получаем:

$$\tilde{p}_0 = \frac{mp_0}{\sum_{k=0}^{m-1}(m-k)p_k};\ \tilde{p}_1 = \frac{(m-1)p_1}{\sum_{k=0}^{m-1}(m-k)p_k};\ \ldots;$$
$$\tilde{p}_k = \frac{(m-k)p_k}{\sum_{k=0}^{m-1}(m-k)p_k};\ \ldots;\ \tilde{p}_{m-1} = \frac{p_{m-1}}{\sum_{k=0}^{m-1}(m-k)p_k}. \tag{11.32.1}$$

Зная эти вероятности, найдем полное математическое ожидание времени пребывания отказавшего станка в очереди. Если станок отказал в момент, когда система находится в состоянии s_0, он не будет стоять в очереди; если в состоянии s_1, то будет находиться в ней в среднем время $1/\mu$, если s_2 — время $2/\mu$ и т. д. Умножая вероятности (11.32.1) на эти числа и складывая, получаем

$$\bar{t}_{оч} = \frac{1}{\mu} \sum_{t=1}^{m-1} k\tilde{p}_k. \qquad (11.32.2)$$

11.33. Рабочий обслуживает четыре станка ($m = 4$); каждый станок отказывает с интенсивностью $\lambda = 0{,}5$ отказа/ч; среднее время ремонта $\bar{t}_р = 1/\mu = 0{,}8$ ч. Все потоки событий — простейшие. Пользуясь формулами задач 11.31, 11.32, найти: 1) финальные вероятности состояний; 2) пропускную способность A; 3) среднее относительное время простоя рабочего $P_{пр}$; 4) среднее число станков в очереди $\bar{r}$: 5) среднее число неисправных станков $\bar{w}$; 6) среднее время пребывания в очереди $\bar{t}_{оч}$ одного отказавшего станка; 7) среднюю производительность группы станков с учетом их неполной надежности, если в работающем состоянии один станок дает l единиц продукции.

Решение. $\mu = 1/\bar{t}_р = 1{,}25$; $\rho = \lambda/\mu = 0{,}4$.

1) По формулам (11.31.1) имеем: $p_0 = \{1 + 1{,}6 + 1{,}92 + 1{,}53 + 0{,}61\}^{-1} = 6{,}66^{-1} \approx 0{,}150$; $p_1 = 1{,}6p_0 \approx 0{,}240$; $p_2 = 1{,}92p_0 \approx 0{,}288$; $p_3 = 1{,}53p_0 \approx 0{,}230$; $p_4 = 0{,}061\ p_0 \approx 0{,}092$;

2) $A = 0{,}850\mu \approx 1{,}06$ станка в час;

3) $P_{пр} = p_0 = 0{,}150$;

4) $\bar{r} \approx 4 - 0{,}850\ (1 + 2{,}5) \approx 1{,}03$;

5) $\bar{w} \approx 1{,}03 + \bar{k} \approx 1{,}03 + 0{,}85 = 1{,}88$;

6) по формулам (11.32.1) и (11.32.2) $\tilde{p}_0 = \frac{4p_0}{4p_0 + 3p_1 + 2p_2 + p_3} \approx 0{,}283$; $\tilde{p}_1 \approx 0{,}340$; $\tilde{p}_2 = 0{,}270$; $\tilde{p}_3 = 0{,}108$; $\bar{t}_{оч} = 0{,}8\ (\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 + 3\tilde{p}_3) \approx 0{,}964$ ч.

7) производительность группы станков равна $(m - \bar{w})\ l \approx 2{,}12l$.

11.34. *Простейшая многоканальная замкнутая СМО.* Бригада из n рабочих обслуживает m станков ($n < m$). Поток отказов каждого станка имеет интенсивность λ; среднее время наладки станка $\bar{t}_{обсл} = 1/\mu$. Все потоки событий — простейшие. Найти финальные вероятности состояний СМО; абсолютную пропускную способность A; среднее число неисправных станков $\bar{w}$.

Решение. Состояния СМО нумеруем по числу неисправных станков:

s_0 — все станки исправны, рабочие не заняты;

s_1 — один станок неисправен, один рабочий занят, остальные свободны; ...;

s_k — k станков неисправны, k рабочих заняты, остальные свободны ($k < m$); ...;

s_n — n станков неисправны, все рабочие заняты;

s_{n+1} — $n + 1$ станков неисправны, из них n налаживаются, один стоит в очереди; ...;

s_{n+r} — $n + r$ станков неисправны, из них n налаживаются, r в очереди ($n + r < m$); ...;

s_m — все m станков неисправны, из них n налаживаются, $m - n$ ждут очереди.

Предоставляя читателю самостоятельно построить граф состояний СМО, приведем только окончательные формулы для вероятностей состояний:

$$p_0=\left\{1+\frac{m}{1!}\rho+\frac{m(m-1)}{2!}\rho^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\rho^k+\right.$$

$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!\,n}\rho^{n+1}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n+r-1)]}{n!\,n^r}\times$$

$$\left.\times\rho^{n+r}+\ldots+\frac{m!}{n!\,n^{m-n}}\rho^m\right\}^{-1};$$

$$p_1=\frac{m}{1!}\rho p_0;\ p_2=\frac{m(m-1)}{2!}\rho^2 p_0;\ \ldots;$$

$$p_k=\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\rho^k p_0\quad (1\leqslant k\leqslant n);$$

$$p_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\rho^n p_0;\ \ldots;$$

$$p_{n+z}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n+r-1)]}{n!\,n^r}\rho^{n+r}p_0\quad (1\leqslant r\leqslant m-1);$$

$$p_m=\frac{m!}{n!\,n^{m-n}}\rho^m p_0,\ \text{где}\ \rho=\lambda/\mu. \qquad (11.34.1)$$

Через эти вероятности выражается среднее число занятых рабочих:

$$\bar{k}=0\cdot p_0+1p_1+2p_2+\ldots+(n-1)\,p_{n-1}+n\,(p_n+p_{n+1}+$$
$$+\ldots+p_m)=p_1+2p_2+\ldots+(n-1)\,p_{n-1}+n\,(1-p_0-$$
$$-p_1-\ldots-p_{n-1}). \qquad (11.34.2)$$

Абсолютная пропускная способность

$$A=\bar{k}\mu, \qquad (11.34.3)$$

а среднее число неисправных станков

$$\bar{w}=m-k\mu/\lambda=m-\bar{k}/\rho. \qquad (11.34.4)$$

11.35. Два рабочих ($n=2$) обслуживают шесть станков ($m=6$). Станок требует наладки в среднем через каждые полчаса. Наладка занимает у рабочего в среднем 10 мин. Все потоки событий — простейшие. 1) Определить характеристики СМО: среднее число занятых рабочих $\bar{k}$; абсолютную пропускную способность A; среднее число неисправных станков $\bar{w}$. 2) Установить, улучшатся ли характеристики СМО, если рабочие будут налаживать станки совместно, тратя вдвоем на наладку одного станка в среднем 5 минут.

Р е ш е н и е. 1) Решаем задачу в первом варианте (рабочие налаживают станки порознь). Имеем $m=6$; $n=2$; $\lambda=2$; $\mu=6$; $\rho=\lambda/\mu=1/3$. По формулам (11.34.1)

$$p_0=\left\{1+\frac{6}{1}\,\frac{1}{3}+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\,\frac{1}{3^2}+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot2}\,\frac{1}{3^3}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot2^2}\,\frac{1}{3^4}+\right.$$

$$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot2^3}\,\frac{1}{3^5}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot2^4}\,\frac{1}{3^6}\Big\}^{-1}\approx 0{,}153;$$

$$p_1 = 6/1\cdot 1/3\,p_0 \approx 0{,}306.$$

Среднее число занятых рабочих находим по формуле (11.34.2): $\bar{k} = 1\cdot p_1 + 2\,(1 - p_0 - p_1) \approx 1{,}235$. Абсолютная пропускная способность $A = \bar{k}\mu \approx 7{,}41$. Среднее число неисправных станков $\bar{w} = 6 - 7{,}41/2 \approx 2{,}30$.

2) Если рабочие налаживают станки вместе, то СМО превращается в одноканальную ($m = 6$; $n = 1$) при $\mu = 12$. Расчеты произведем для $\rho = \lambda/\mu = 1/6$. По формулам (11.31.1)

$$p_0=\Big\{1+1+\frac{6\cdot5}{6^2}+\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6^4}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6^5}+$$

$$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6^6}\Big\}^{-1}\approx 0{,}264;\ p_1\approx 0{,}264;\ p_2\approx 0{,}220;\ p_3\approx 0{,}147;\ p_4\approx$$

$$\approx 0{,}076;\ p_5\approx 0{,}024;\ p_6\approx 0{,}004;\ \bar{w}=6-\frac{0{,}736}{1/6}\approx 1{,}59.$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k} = 1 - p_0 = 0{,}736$. Однако, учитывая, что «канал» обслуживания состоит в данном случае из двух рабочих, среднее число занятых рабочих будет

$$\bar{k}' = 2\cdot 0{,}736 \approx 1{,}47;\ \ A = \bar{k}\mu = 0{,}736\cdot 12 \approx 8{,}8.$$

Таким образом, взаимопомощь между рабочими (каналами обслуживания) в данном случае повысила среднюю занятость с 1,23 до 1,47, снизила среднее число неисправных станков с 2,30 до 1,59 и повысила пропускную способность с 7,4 до 8,8.

11.36. Имеется простейшая трехканальная СМО с отказами; на нее поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 4$ заявки /мин; время обслуживания заявки одним каналом $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1/\mu = 0{,}5$ мин. Спрашивается, выгодно ли с точки зрения пропускной способности СМО заставить все три канала обслуживать заявки сразу, причем среднее время обслуживания уменьшается втрое? Как это скажется на среднем времени пребывания заявки в СМО?

Решение. 1) Находим вероятности состояний СМО без взаимопомощи между каналами по формулам Эрланга (11.0.6):

$$p_0=\Big\{1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}\Big\}^{-1}\approx 0{,}158;\ P_{\text{отк}}=p_3=\frac{2^3}{3!}\,p_0\approx 0{,}21;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} \approx 0{,}79;\ A = \lambda Q \approx 3{,}16.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО вычислим как вероятность Q того, что заявка будет принята к обслуживанию, умноженную на среднее время обслуживания: $\bar{t}_{\text{сист}} \approx 0{,}79\cdot 0{,}5 \approx 0{,}395$ мин.

2) Объединяем все три канала в один с параметром $\mu = 3\cdot 2 = 6$; получаем

$$p_0 = \frac{1}{(1+2/3)^{-1}} = 0{,}6;\ \ p_1 = (2/3)\,0{,}6 = 0{,}4;$$

$$P_{\text{отк}} = p_1 = 0{,}4;\ \ Q = 1 - P_{\text{отк}} = 0{,}6;\ \ A = \lambda Q = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4.$$

Сравнив эту пропускную способность с пропускной способностью СМО в первоначальном варианте, видим, что она не увеличилась (как это было в предыдущей задаче), а уменьшилась! Легко понять, почему это произошло: благодаря объединению двух каналов в один увеличилась вероятность отказа (того, что пришедшая заявка застает оба канала занятыми и уйдет необслуженной).

Среднее время пребывания заявки в СМО во втором варианте будет меньше, чем в первом: $\bar{t}_{\text{сист}} = Q\ (1/6) = 0{,}1$ мин. Однако это уменьшение куплено «дорогой ценой» — тем, что ряд заявок вовсе не обслуживаются и, значит, проводят в СМО нулевое время.

Почему же в предыдущей задаче объединение двух каналов в один повысило эффективность обслуживания? Предлагаем читателю подумать над этим вопросом и объяснить кажущееся противоречие. Не потому ли, что в СМО с отказами заявки не становятся в очередь?

11.37. Имеется простейшая трехканальная СМО с неограниченной очередью. Интенсивность потока заявок $\lambda = 4$ заявки/ч; среднее время обслуживания $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1/\mu = 0{,}5$ ч. Выгодно ли, имея в виду: 1) среднюю длину очереди, 2) среднее время пребывания заявки в очереди, 3) среднее время пребывания заявки в СМО, объединить все три канала в один, с втрое меньшим средним временем обслуживания?

Р е ш е н и е. 1) В первоначальном варианте (трехканальная СМО): $n = 3$, $\lambda = 4$, $\mu = 1/0{,}5 = 2$; $\rho = \lambda/\mu = 2$; $\varkappa = \rho/n = 2/3 < 1$. Финальные вероятности существуют. Вычисляем p_0 по формулам (11.0.21):

$$p_0 = \left\{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4\cdot(2/3)}{3!\,(1-2/3)}\right\}^{-1} = \frac{1}{9};$$

$$\bar{r} = \frac{2^4\cdot 1/9}{3\cdot 3!\,(1/3)^2} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889;\ \ \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222\text{ ч};\ \bar{t}_{\text{сист}} =$$

$$= \bar{t}_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{об}} \approx 0{,}722.$$

2) При объединении трех каналов в один: $n = 1$; $\lambda = 4$; $\mu = 6$; $\rho = 2/3$. По формулам (11.0.12)—(11.0.14) имеем

$$\bar{r} = \frac{(2/3)^2}{1/3} \approx 1{,}333;\ \ \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx 0{,}333\text{ ч};\ \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{об}} =$$

$$= 1/3 + 1/6 = 0{,}500.$$

Таким образом, объединение трех каналов в один, несколько снизив среднее время пребывания заявки в СМО (с 0,722 до 0,500), повысило среднюю длину очереди и среднее время пребывания заявки в ней. Это произошло потому, что, пока три канала совместно обслуживают одну заявку, другим (вновь пришедшим) заявкам приходится ждать в очереди.

Повышение эффективности обслуживания, наблюдаемое при объединении каналов в замкнутой СМО, связано с тем, что интенсивность потока заявок при выходе из строя их источников (станков) уменьшается.

11.38. Рассматривается система массового обслуживания — стоянка такси, на которую поступают простейший поток пассажиров с интенсивностью λ и простейший поток машин с интенсивностью μ. Пассажиры образуют очередь, которая уменьшается на единицу, когда к стоянке подходит машина (берется «идеальный» случай, когда водитель безропотно везет каждого пассажира туда, куда ему требуется). В случае, если на стоянке нет пассажиров, в очередь становятся машины. Число мест для машин на стоянке ограничено (равно l); число

$s_{l,0}$ ⇄ … ⇄ $s_{c,0}$ ⇄ … ⇄ $s_{1,0}$ ⇄ $s_{0,0}$ ⇄ $s_{0,1}$ ⇄ … ⇄ $s_{0,k}$ ⇄ … ⇄ $s_{0,m}$ (переходы вправо с интенсивностью λ, влево — μ)

Рис. 11.38

мест в очереди для пассажиров также ограничено (равно l). Все потоки событий — простейшие. Посадка производится мгновенно. Построить граф состояний СМО, найти финальные вероятности состояний, среднюю длину $\bar{r}_{п}$ очереди пассажиров, среднюю длину $\bar{r}_{м}$ очереди машин, среднее время $\bar{t}_{оч.п}$ пребывания в очереди пассажира, среднее время $t_{оч.м}$ пребывания в очереди машины и посмотреть, как эти характеристики изменятся при $m \to \infty$, $l \to \infty$.

Решение. Состояния СМО будем нумеровать соответственно числу пассажиров и машин на стоянке двумя индексами: первый — число пассажиров, второй — число машин. Состояние $s_{0,0}$ означает, что на стоянке нет ни пассажиров, ни машин; состояние $s_{0,k}$ — нет машин, k пассажиров;состояние $s_{c,0}$ — c машин, ни одного пассажира. Граф состояний СМО показан на рис. 11.38. Граф соответствует схеме гибели и размножения. Применяя общие формулы (11.0.4) для этой схемы и обозначая $\lambda/\mu = \rho$, получаем:

$$p_{l-1,0} = \rho p_{l,0};\ p_{l-2,0} = \rho^2 p_{l,0};\ \ldots;\ p_{c,0} = \rho^{l-c} p_{l,0};\ \ldots;$$
$$p_{0,0} = \rho^l p_{l,0};\ \ldots;\ p_{0,k} = \rho^{l+k} p_{l,0};\ \ldots;\ p_{0,m} = \rho^{l+m} p_{l,0};$$
$$p_{l,0} = \{1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{l+m}\}^{-1} \qquad (11.38.1)$$

или, суммируя геометрическую прогрессию со знаменателем ρ,

$$p_{l,0} = (1-\rho)/(1-\rho^{l+m-1}). \qquad (11.38.2)$$

Вероятности (11.38.1) образуют геометрическую прогрессию с первым членом $p_{l,0}$ и знаменателем ρ. Если $\rho > 1$, наивероятнейшее состояние системы будет $s_{0,m}$ — машин нет, все места в очереди пассажиров заняты; если $\rho < 1$ — наивероятнейшее состояние $s_{l,0}$ — пассажиров нет, все места в очереди машин заняты.

При $m \to \infty$, $l \to \infty$ финальные вероятности не существуют; при $\rho > 1$ очередь пассажиров, а при $\rho < 1$ очередь машин имеют тенденцию возрастать неограниченно (эта тенденция сдерживается тем, что как число пассажиров, так и число такси в городе бесконечными быть не могут).

11.39*. В столовой самообслуживания имеется один раздаточный пункт, на котором отпускаются как первые, так и вторые блюда. Поток посетителей столовой — простейший с интенсивностью λ; на отпуск как первого, так и второго блюда идет случайное время, распределенное по показательному закону с одним и тем же параметром μ. Некоторые посетители берут и первое, и второе (доля таких посетителей равна q), другие — только второе (доля $1 - q$). Найти: 1) условия, при которых существует устойчивый, стационарный режим работы столовой; 2) среднюю длину очереди и среднее время пребывания посетителей в столовой, если он съедает одно блюдо в среднем за время τ, а два блюда — за время 2τ.

Р е ш е н и е. Время, идущее на обслуживание одного посетителя, представляет собой случайную величину T, распределенную с вероятностью q по закону Эрланга 2-го порядка, со средним значением $\bar{t}_{обсл} = 2/\mu$, а с вероятностью $1 - q$ — по показательному закону с параметром μ. Найдем математическое ожидание случайной величины T. Для этого воспользуемся формулой полного математического ожидания (4.0.20) с двумя гипотезами: $H_1 = \{$посетитель берет только второе$\}$; $H_2 = \{$посетитель берет оба блюда$\}$. Вероятности этих гипотез: $\text{P}(H_1) = 1 - q$; $\text{P}(H_2) = q$.

Полное математическое ожидание случайной величины T равно

$$\text{M}[T] = \text{P}(H_1)\,\text{M}[T \mid H_1] + \text{P}(H_2)\,\text{M}[T|H_2] = (1 - q)(1/\mu) + q(2/\mu) = (q + 1)/\mu;$$

значит, столовая может обслуживать в среднем $\mu/(q + 1)$ посетителей в единицу времени; если $\lambda \geqslant \mu/(q + 1)$, то СМО перегружена, и финальные вероятности не существуют, если же $\lambda < \mu/(q + 1)$, то они существуют. Предположим, что $\lambda < \mu/(q + 1)$.

Для нахождения средней длины очереди $\bar{r}$, средних времен пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{оч}$ и в системе (столовой) $\bar{t}_{сист}$ воспользуемся формулой Полячека—Хинчина (11.0.31). Для этого надо знать коэффициент вариации случайной величины T — времени обслуживания. Найдем сначала второй начальный момент этой величины $\text{M}[T^2]$. По формуле полного математического ожидания (с теми же гипотезами H_1 и H_2) получим

$$\text{M}[T^2] = (1 - q)\,\text{M}[T^2|H_1] + q\text{M}[T^2|H_2]. \tag{11.39.1}$$

При гипотезе H_1 случайная величина T распределена показательно с параметром μ:

$$\text{M}[T^2|H_1] = \text{D}[T|H_1] + (\text{M}[T|H_1])^2 = 1/\mu^2 + (1/\mu)^2 = 2/\mu^2.$$

При гипотезе H_2 вычислим второй начальный момент величины T по формуле

$$M[T^2|H_2] = D[T|H_2] + (M[T|H_2])^2.$$

Но $M[T|H_2] = 2/\mu$, $(M[T|H_2])^2 = 4/\mu^2$; дисперсия $D[T|H_2]$ вдвое больше, чем $D[T|H_1]$, как дисперсия суммы двух независимых одинаково распределенных случайных величин T_1 и T_2, т. е. $D[T|H_2] = 2/\mu^2$. Следовательно,

$$M[T^2|H_2] = 2/\mu^2 + 4/\mu^2 = 6/\mu^2,$$

откуда по (11.39.1)

$$M[T^2] = (1-q)\,2/\mu^2 + q6/\mu^2 = 2(1+2q)/\mu^2.$$

Дисперсия случайной величины T

$$D[T] = M[T^2] - (M[T])^2 = (1 + 2q - q^2)/\mu^2;$$

отсюда коэффициент вариации случайной величины T

$$v_\mu = \sqrt{1+2q-q^2}/(q+1).$$

Подставляя это выражение и $\rho = \lambda(q+1)/\mu$ в формулу Полячека—Хинчина (11.0.31), получаем

$$\bar{r} = \frac{(\lambda^2/\mu^2)(q+1)^2\left[1+\frac{1+2q-q^2}{(q+1)^2}\right]}{2[1-(\lambda/\mu)(q+1)]} = \frac{(\lambda^2/\mu^2)(1+2q)}{1-(\lambda/\mu)(q+1)}.$$

Далее $\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda$; $\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + (q+1)/\mu + (q+1)\tau = \bar{t}_{\text{оч}} + (q+1)(\tau + 1/\mu)$.

11.40. *Пример простейшей СМО с отказами и с приоритетом.* Имеется двухканальная СМО с отказами, на которую поступают два простейших потока заявок: I с интенсивностью λ_1 и II с интенсивностью λ_2 (будем кратко называть их «заявки I» и «заявки II»). Заявки I имеют перед заявками II приоритет, состоящий в следующем: если заявка I приходит в момент, когда все каналы заняты и хотя бы один из них обслуживает заявку II, то пришедшая заявка I «вытесняет» из-под обслуживания заявку II, становится на ее место, а та покидает СМО необслуженной. Если заявка I приходит в момент, когда все каналы заняты обслуживанием заявок I, то она получает отказ и покидает СМО. Заявка II получает отказ, если она приходит в момент, когда заняты оба канала (безразлично какими заявками).

Построить размеченный граф состояний СМО, нумеруя состояния двумя индексами (i, j); первый указывает число заявок I, второй — число заявок II, находящихся в СМО. Написать уравнения для финальных вероятностей состояний. Решить их при $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$. Выразить через p_{ij} $(i + j \leqslant 2)$ следующие характеристики эффективности СМО:

$P_{\text{отк}}^{(1)}$ $(P_{\text{отк}}^{(2)})$ — вероятность отказа в момент поступления для заявки I (II);

A_1 (A_2) — среднее число заявок I (II), обслуживаемое СМО в единицу времени;

$\bar{k}_1$ $(\bar{k}_2)$ — среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок I (II);

$P_{отк}$, A, $\bar{k}$ — те же характеристики для СМО в целом, безотносительно к виду заявок.

Решение. Состояния СМО: s_{00} — в СМО нет заявок; s_{10} — в СМО одна заявка I и ни одной заявки II; s_{01} — в СМО ни одной заявки I и одна заявка II; s_{20} — в СМО две заявки I и ни одной заявки II; s_{11} — в СМО по одной заявке I и II; s_{02} — в СМО ни одной заявки I и две заявки II. Размеченный граф состояний СМО дан на рис. 11.40.

Уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01}; \ (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) p_{10} = \lambda_1 p_{00} + 2\mu_1 \times \times p_{20} + \mu_2 p_{11}; \ 2\mu_1 p_{20} = \lambda_1 p_{10} + \lambda_1 p_{11}; \ (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) \times \times p_{01} = \lambda_2 p_{00} + \mu_1 p_{11} + 2\mu_2 p_{02}; \ (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) p_{11} = \lambda_2 p_{10} + + \lambda_1 p_{01} + \lambda_1 p_{02}; \ (\lambda_1 + 2\mu_2) p_{02} = \lambda_2 p_{01}; \ p_{00} + p_{10} + p_{20} + p_{01} + + p_{11} + p_{02} = 1.$$

Решая их при $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, получаем

$$p_{00} = 0{,}20; \ p_{10} = 0{,}25; \ p_{20} = 0{,}20; \ p_{01} = 0{,}15; \ p_{11} = 0{,}15; \ p_{02} = 0{,}05;$$
$$P_{отк}^{(1)} = p_{20} = 0{,}2 \quad P_{отк}^{(2)} = p_{20} + p_{11} + p_{02} = 0{,}40; \ A_1 = \lambda_1 (1 - - P_{отк}^{(1)}) = 0{,}8.$$

Величину A_2 вычислим, учитывая то, что некоторые заявки II, принятые к обслуживанию, вытесняются заявками I и покидают СМО необслуженными. Среднее число таких заявок в единицу времени равно $\lambda_{11} (p_{11} + p_{02})$, следовательно,

$$A_2 = \lambda_2 [1 - (p_{20} + p_{11} + p_{02})] - \lambda_1 (p_{11} + p_{02}) = 0{,}4;$$
$$\bar{k}_1 = A_1/\mu_1; \ \bar{k}_2 = A_2/\mu_2.$$

Вероятность $P_{отк}$ того, что произвольно выбранная заявка, поступившая в СМО, получит отказ, найдем по формуле полной вероятности с гипотезами: H_1 = {пришла заявка I}; H_2 = {пришла заявка II}. Вероятности этих гипотез

$$P(H_1) = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2); \ P(H_2) = \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Следовательно,

$$P_{отк} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} P_{отк}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} P_{отк}^{(2)} = 0{,}3.$$

Заметим, что все характеристики для заявок I можно было бы получить, совершенно игнорируя заявки II и рассматривая задачу так, как если бы на двухканальную СМО с отказами поступали только заявки I. Предоставляем читателю убедиться в этом, подсчитав все характеристики для двухканальной СМО с отказами, на которую поступает только поток заявок I.

11.41. Условия предыдущей задачи изменены так, что количество каналов СМО с отказами равно $n = 3$. Построить граф состояний СМО. Написать уравнения для финальных вероятностей p_{ij} $(i + j \leqslant 3)$, где i — число заявок I, j — число заявок II, находящихся в СМО.

Считая эти уравнения уже решенными, выразить через p_{ij} те же характеристики эффективности, что и в предыдущей задаче.

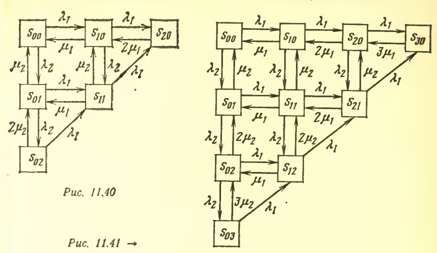


Рис. 11.40

Рис. 11.41 →

Р е ш е н и е. Граф состояний показан на рис. 11.41. Уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\, p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01}; \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)\, p_{10} = \lambda_1 p_{00} + 2\mu_1 p_{20} + \mu_2 p_{11}; \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1)\, p_{20} = \lambda_1 p_{10} + 3\mu_1 p_{30} + \mu_2 p_{21};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)\, p_{01} = \lambda_2 p_{00} + \mu_2 p_{11} + 2\mu_2 p_{02};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)\, p_{11} = \lambda_1 p_{01} + \lambda_2 p_{10} + 2\mu_1 p_{21} + 2\mu_2 p_{12};$$

$$(\lambda_1 + \mu_2 + 2\mu_1)\, p_{21} = \lambda_1 (p_{11} + p_{12}) + \lambda_2 p_{20}; \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_2)\, p_{02} = \lambda_2 p_{01} + \mu_1 p_{12} + 3\mu_2 p_{03}; \quad (\lambda_1 + \mu_1 + 2\mu_2)\, p_{12} = \lambda_1 (p_{02} + p_{03}) + \lambda_2 p_{11};$$

$$(\lambda_1 + 3\mu_2)\, p_{03} = \lambda_2 p_{02};$$

$$p_{00} + p_{10} + p_{20} + p_{30} + p_{01} + p_{11} + p_{21} + p_{02} + p_{12} + p_{03} = 1;$$

$$P^{(1)}_{\text{отк}} = p_{30}; \quad P^{(2)}_{\text{отк}} = p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03};$$

$$A_1 = \lambda_1 (1 - p_{30}); \quad A_2 = \lambda_2 [1 - (p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03})] - \lambda_1 (p_{03} + p_{12} + p_{03});$$

$$\bar{k}_1 = A_1/\mu_1; \; \bar{k}_2 = A_2/\mu_2; \; \bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2;$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} P^{(1)}_{\text{отк}} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} P^{(2)}_{\text{отк}}.$$

11.42. *Пример СМО с очередью и с абсолютным приоритетом.* Имеется одноканальная СМО с двумя местами в очереди ($m = 2$). На вход СМО поступают два простейших потока заявок I и II с интенсивностями λ_1, λ_2. Времена обслуживания — показательные с параметрами μ_1, μ_2. Заявка I, прибывшая в СМО, «вытесняет» заявку II, если она обслуживается, и занимает место в очереди перед ней, если она стоит в очереди. «Вытесненная» заявка II покидает СМО необслуженной, если в очереди уже нет мест, и становится в очередь, если места есть.

Нумеруя состояния СМО двумя индексами i, j соответственно числу заявок I и II, находящихся в СМО, построить размеченный граф состояний СМО и написать уравнения для финальных вероятностей состояний. Считая этим уравнения уже решенными, выразить через p_{ij}, $(i + j \leqslant 3)$ следующие характеристики эффективности СМО:

$P_{\text{отк}}^{(1)}$ $(P_{\text{отк}}^{(2)})$ — вероятность того, что заявка I (II) получит отказ немедленно после прибытия;

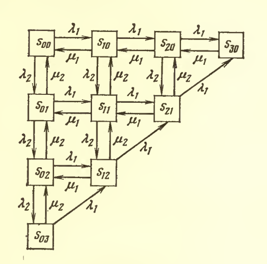


Рис. 11.42

Q_1 (Q_2) — вероятность того, что заявка I (II) будет обслужена;

$\bar{z}_1$ $(\bar{z}_2)$ — среднее число заявок I (II), связанных с СМО;

$\bar{r}_1$ $(\bar{r}_2)$ — среднее число заявок I (II), находящихся в очереди;

$\bar{t}_{\text{сист}}^{(1)}$, $\bar{t}_{\text{сист}}^{(2)}$ — среднее время пребывания в системе для заявки I (II);

$\bar{t}_{\text{оч}}^{(1)}$, $(\bar{t}_{\text{оч}}^{(2)})$ — среднее время пребывания в очереди для заявки I (II);

$\bar{t}_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания в системе для любой (произвольной) заявки;

$\bar{t}_{\text{оч}}$ — среднее время пребывания в очереди для любой заявки.

Решение. Состояние СМО: s_{ij} — в СМО находится i заявок I и j заявок II $(i + j \leqslant 3)$. Размеченный граф состояний показан на рис. 11.42.

Уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\, p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01}; \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)\, p_{10} = \lambda_1 p_{00} + \mu_1 p_{20} + \mu_2 p_{11}; \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)\, p_{20} = \lambda_1 p_{10} + \mu_1 p_{30} + \mu_2 p_{21};$$

$$\mu_1 p_{30} = \lambda_1 (p_{20} + p_{21}); \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)\, p_{01} = \lambda_2 p_{00} + \mu_1 p_1 + \mu_2 p_{02};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)\, p_{11} = \lambda_2 p_{10} + \lambda_1 p_{01} + \mu_1 p_{21} + \mu_2 p_{12}; \quad (\lambda_1 + \lambda_2 +$$

$+ \mu_2) p_{02} = \lambda_2 p_{01} + \mu_1 p_{12} + \mu_2 p_{03}$; $\quad (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) p_{12} = \lambda_1 p_{02} + \lambda_2 p_{11} + \lambda_1 p_{03}$; $\quad (\lambda_1 + \mu_2) p_{03} = \lambda_2 p_{02}$;

$$p_{00} + p_{10} + p_{20} + p_{30} + p_{01} + p_{11} + p_{21} + p_{02} + p_{12} + p_{03} = 1;$$

$$P_{\text{отк}}^{(1)} = p_{30};\; P_{\text{отк}}^{(2)} = p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03};\; Q_1 = 1 - P_{\text{отк}}^{1} = 1 - p_{30}.$$

Чтобы найти Q_2, найдем сначала A_2 — среднее число обслуженных заявок II в единицу времени:

$$A_2 = \lambda_2 (1 - P_{\text{отк}}^{(2)}) - \lambda_1 (p_{03} + p_{12} + p_{21}) = \lambda_2 [1 - (p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03})] - \lambda_1 (p_{03} + p_{12} + p_{21}).$$

Деля это выражение на λ_2, находим среднюю долю обслуживаемых заявок II (вероятность того, что заявка II будет обслужена): $Q_2 = A_2/\lambda_2$. Тогда

$$\bar{z}_1 = 1 \cdot (p_{10} + p_{11} + p_{12}) + 2 (p_{20} + p_{21}) + 3 p_{30};\; \bar{z}_2 = 1 \cdot (p_{01} + p_{11} + p_{21}) + 2 (p_{02} + p_{12}) + 3 p_{03};\; \bar{r}_1 = 1 \cdot (p_{20} + p_{21}) + 2 p_{30};\; \bar{r}_2 = 1\, (p_{11} + p_{21}) + 2 p_{12}.$$

По формулам Литтла

$$\bar{t}_{\text{сист}}^{(1)} = \bar{z}_1/\lambda_1;\; \bar{t}_{\text{сист}}^{(2)} = \bar{z}_2/\lambda_2;\; \bar{t}_{\text{оч}}^{(1)} = \bar{r}_1/\lambda_1;\; \bar{t}_{\text{оч}}^{(2)} = \bar{r}_2/\lambda_2;$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} t_{\text{сист}}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{t}_{\text{сист}}^{(2)};\; \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{t}_{\text{оч}}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{t}_{\text{оч}}^{(2)}.$$

Все характеристики, относящиеся к заявкам I, можно вычислить и не решая уравнений (11.42), а просто игнорируя наличие заявок II, рассматривая СМО с ограниченным числом мест в очереди ($m = 2$) и находя ее характеристики по формулам п. 3 раздела 11.0.

11.43. *Простейшая СМО без очереди и с «разогревом» каналов.* На вход n-канальной СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания — показательное с параметром μ. Перед тем, как начать обслуживание заявки, канал должен подготовиться («разогреться»). Время «разогрева» $T_{\text{раз}}$ имеет показательное распределение с параметром ν и не зависит от того, как давно канал прекратил работу. Заявка, заставшая канал свободным, «занимает» его и ждет, пока он разогреется, после чего поступает на обслуживание. Заявка, заставшая все каналы занятыми (обслуживаемой или ожидающей заявкой), покидает СМО и остается необслуженной. Найти финальные вероятности СМО и характеристики ее эффективности: вероятность отказа $P_{\text{отк}}$, относительную пропускную способность Q, абсолютную пропускную способность A, среднее число занятых каналов $\bar{k}$.

Решение. Будем считать, что обслуживание заявки состоит из двух фаз: ожидания разогрева и самого обслуживания: $\tilde{T}_{\text{обсл}} = T_{\text{раз}} + T_{\text{обсл}}$. Случайная величина $\tilde{T}_{\text{обсл}}$ распределена по обобщенному закону Эрланга 2-го порядка (см. задачу 8.39) с параметрами μ, ν. Мы знаем, что формулы Эрланга (11.0.6) справедливы не

только для показательного, но и для любого распределения времени обслуживания. Найдем величину $\tilde{\mu} = 1/M[\tilde{T}_{\text{обсл}}]$. Имеем

$M[\tilde{T}_{\text{обсл}}] = M[T_{\text{раз}}] + M[T_{\text{обсл}}] = 1/\mu + 1/\nu = (\mu + \nu)/(\mu\nu)$, откуда $\tilde{\mu} = (\mu\nu)/(\mu + \nu)$. Вычислив $\tilde{\rho} = \lambda/\tilde{\mu}$ и подставив это значение $\tilde{\rho}$ в формулы Эрланга (11.0.6), получим:

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\tilde{\rho}}{1!} + \ldots + \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} + \ldots + \frac{\tilde{\rho}^n}{n!}\right\}^{-1}; \; p_k = \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} p_0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n);$$

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0; \;\; Q = 1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0; \quad A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0\right).$$

Чтобы найти среднее число занятых каналов $\bar{k}$, нужно разделить A на $\tilde{\mu}$:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}}\left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!}\right) p_0 = \tilde{\rho}\left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!}\right) p_0.$$

11.44. *Простейшая одноканальная СМО с очередью и «разогревом» канала.* На одноканальную СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания — показательное с параметром μ $(\mu > \lambda)$. Перед тем как приступить к обслуживанию заявки, свободный до того канал должен «разогреться». Время «разогрева» — показательное с параметром ν и не зависит от того, как давно канал кончил работу. Если обслуживание начинается сразу же после конца обслуживания предыдущей заявки, «разогрева» не нужно. Составить граф состояний СМО и написать уравнения для финальных вероятностей состояний; выразить через эти вероятности характеристики эффективности СМО: средние числа заявок в системе $\bar{z}$ и в очереди $\bar{r}$, средние времена пребывания заявок в системе $\bar{t}_{\text{сист}}$ и в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$.

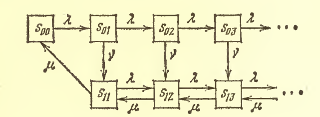


Рис. 11.44

Решение. Состояния СМО (рис. 11.44):

s_{00} — канал свободен, не разогрет;

s_{01} — пришла одна заявка и ждет, канал разогревается;

s_{11} — канал разогрет, одна заявка обслуживается, очереди нет;

s_{02} — канал разогревается, в очереди две заявки; ...;

s_{0l} — канал разогревается, в очереди l заявок;

s_{1l} — канал обслуживает одну заявку, $l-1$ заявка стоит в очереди; ... .

Уравнения для финальных вероятностей:

$$\lambda p_{00} = \mu p_{11};\quad (\lambda+\nu)\,p_{01} = \lambda p_{00};\quad (\lambda+\mu)\,p_{11} = \nu p_{01} + \mu p_{12};$$
$$(\lambda+\nu)\,p_{02} = \lambda p_{01};\ (\lambda+\mu)\,p_{12} = \nu p_{02} + \lambda p_{11} + \mu p_{13};\quad \ldots;$$
$$(\lambda+\nu)\,p_{0,l} = \lambda p_{0,\,l-1};$$
$$(\lambda+\mu)\,p_{1,l} = \nu p_{0,l} + \lambda p_{1,l-1} + \mu p_{1,l+1};\ldots;$$
$$\bar{z} = \sum_{l=0}^{\infty} l\,(p_{0,l}+p_{1,l});\quad \bar{r} = \sum_{l=1}^{\infty} l\,(p_{0,l}+p_{1,l+1}).$$

По формуле Литтла

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda;\quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda.$$

11.45*. Имеется одноканальная СМО с очередью, ограниченной числом мест $m = 2$. На вход СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания распределено по обобщенному закону Эрланга с параметрами μ_1, μ_2 (см. задачу 8.39). Найти вероятности состояний СМО:

s_0 — в СМО нет заявок;

s_1 — в СМО одна заявка (очереди нет);

s_2 — в СМО две заявки (одна обслуживается, одна в очереди);

s_3 — в СМО три заявки (одна обслуживается, две в очереди).

Найти характеристики эффективности СМО: $P_{\text{отк}}$, Q, A, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$. Вычислить их для значений $\lambda = 2$, $\mu_1 = 6$; $\mu_2 = 12$. 2) Сравнить их с теми, которые получились бы для простейшей СМО с таким же значением λ и значением μ, равным $1/\bar{t}_{\text{обсл}}$, где $\bar{t}_{\text{обсл}}$ — среднее время обслуживания заявки в данной СМО.

Решение. Поток обслуживаний — не пуассоновский, значит, система не марковская, и найти вероятности состояний СМО по обычной методике, которую мы применяем для марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем, нельзя. Однако процесс, протекающий в СМО, можно искусственно свести к марковскому, применив так называемый «метод фаз».

Представим обслуживание состоящим из двух фаз (I и II), продолжающихся соответственно время T_1 и T_2; полное время обслуживания $T_{\text{обсл}} = T_1 + T_2$, где T_1 имеет показательное распределение с параметром μ_1; T_2 — показательное распределение с параметром μ_2. Тогда $T_{\text{обсл}}$ будет иметь обобщенное распределение Эрланга с параметрами μ_1 и μ_2 (см. задачу 8.39).

Введем следующие состояния СМО:

s_0 — СМО свободна;

s_{11} — в СМО одна заявка, обслуживание в первой фазе;

s_{12} — в СМО одна заявка, обслуживание во второй фазе;

s_{21} — в СМО две заявки (одна обслуживается и одна в очереди); обслуживание в первой фазе;

s_{22} — в СМО две заявки, обслуживание во второй фазе;

s_{31} — в СМО три заявки, обслуживание в первой фазе;

s_{32} — в СМО три заявки, обслуживание во второй фазе.

Дальнейших состояний нет, так как (по условию $m = 2$) больше трех заявок в СМО быть не может. Размеченный граф состояний СМО показан на рис. 11.45. При таком подходе мы состояние s_1 расчленяем на два: s_{11} и s_{12} (или, короче, $s_1 = s_{11} + s_{12}$); аналогично $s_2 = s_{21} + s_{22}$, $s_3 = s_{31} + s_{32}$. Уравнения для финальных вероятностей, соответствующих графу рис. 11.45, будут:

$$\lambda p_0 = \mu_2 p_{12};\ (\lambda + \mu_1)\, p_{11} = \lambda p_0 + \mu_2 p_{22};\ (\lambda + \mu_2)\, p_{12} = \mu_1 p_{11};$$
$$(\lambda + \mu_1)\, p_{21} = \mu_2 p_{32} + \lambda p_{11};\quad (\lambda + \mu_2)\, p_{22} = \mu_1 p_{21} + \lambda p_{12};$$
$$\mu_1 p_{31} = \lambda p_{21};\quad \mu_2 n_{32} = \mu_1 p_{31} + \lambda p_{22};$$

нормировочное условие $p_0 + p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} + p_{31} + p_{32} = 1$.

Решая эти уравнения, получаем:

$$p_0 = \left\{1 + \frac{(\lambda+\mu_2)\,\lambda}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda^3(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \lambda^2\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^2\mu_2^2} + \right.$$
$$+ \frac{\lambda^2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2^2} + \frac{\lambda^4(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \lambda^3\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^2\mu_2^3} +$$
$$\left. + \frac{\lambda^3(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2^3} + \frac{\lambda^4(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \lambda^3\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^3\mu_2^2}\right\}^{-1};$$

$$p_{11} = \frac{(\lambda+\mu_2)\,\lambda}{\mu_1\mu_2}\,p_0;\quad p_{12} = \frac{\lambda}{\mu_2}\,p_0;\quad p_{21} = \frac{\lambda^3(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \lambda^2\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^2\mu_2^2}\,p_0;$$
$$p_{22} = \frac{\lambda^2(\mu_1+\mu_2+\lambda)}{\mu_1\mu_2^2}\,p_0;\quad p_{31} = \frac{\lambda^4(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \lambda^3\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^3\mu_2^2}\,p_0;$$
$$p_{32} = \left[\frac{\lambda^4(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \lambda^3\mu_2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1^2\mu_2^3} + \frac{\lambda^3(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2^3}\right] p_0. \qquad (11.45.1)$$

Далее находим финальные вероятности состояний s_1, s_2, s_3:

$$p_1 = p_{11} + p_{12} = \frac{\lambda}{\mu_1\mu_2}\,(\lambda+\mu_1+\mu_2)\,p_0;$$
$$p_2 = p_{21} + p_{22} = \frac{\lambda^2}{\mu_1^2\mu_2^2}\,[(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \mu_2(\lambda+\mu_2)]\,p_0;$$
$$p_3 = p_{31} + p_{32} = \frac{\lambda^3}{\mu_1^3\mu_2^3}\,[(\lambda\mu_2 + \lambda\mu_1 + \mu_1^2)(\lambda+\mu_1+\mu_2) +$$
$$+ \mu_2(\mu_1+\mu_2)(\lambda+\mu_2)]\,p_0, \qquad (11.45.2)$$

где p_0 определяется первой из формул (11.45.1).

Характеристики эффективности СМО могут быть найдены через вероятности p_0, p_1, p_2, p_3 по формулам:

$$P_{\text{отк}} = p_3;\quad Q = 1 - p_3;\ A = \lambda\,(1 - p_3);\ \bar{z} = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3;$$
$$\bar{r} = 1p_2 + 2p_3;\ \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda;\ t_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda. \qquad (11.45.3)$$

Подставляя в формулы (11.45.1) численные данные $\lambda = 2$, $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = 12$, получаем: $p_0 = 0{,}540$; $p_{11} = 0{,}182$; $p_{12} = 0{,}090$; $p_{21} = 0{,}087$; $p_{22} = 0{,}050$; $p_{31} = 0{,}029$; $p_{32} = 0{,}022$. Отсюда, возвращаясь к исходной (не марковской) СМО, имеем: $p_0 = 0{,}540$; $p_1 = 0{,}272$; $p_2 = 0{,}137$, $p_3 = 0{,}051$.

Далее, по формулам (11.45.3): $P_{\text{отк}} = 0{,}051$; $Q = 0{,}949$; $A = 1{,}89$; $\bar{z} = 0{,}705$; $\bar{r} = 0{,}243$; $\bar{t}_{\text{сист}} = 0{,}352$; $\bar{t}_{\text{оч}} = 0{,}122$.

2) Подсчитаем те же характеристики для простейшей СМО с теми же $\lambda = 2$, $\mu = (1/\mu_1 + 1/\mu_2)^{-1} = 4$. По формулам (11.0.12) — (11.0.15) имеем: $\rho = 0{,}5$; $p_0 \approx 0{,}533$; $\bar{k} = 1 - p_0 \approx 0{,}467$; $p_1 = \rho p_0 \approx 0{,}267$; $p_2 = \rho^2 p_0 \approx 0{,}133$; $p_3 = \rho^3 p_0 \approx 0{,}067$; $P_{\text{отк}} = p_3 \approx 0{,}067$; $Q = 1 - p_3 \approx 0{,}933$; $A \approx 1{,}866$; $\bar{z} \approx 0{,}733$; $\bar{r} = 0{,}267$; $\bar{t}_{\text{сист}} \approx 0{,}367$; $\bar{t}_{\text{оч}} \approx 0{,}133$.

Мы видим, что наша не марковская СМО имеет над простейшей СМО некоторое преимущество по пропускной способности и очень мало отличается от нее (в лучшую сторону) по времени пребывания заявки в СМО и по длине очереди.

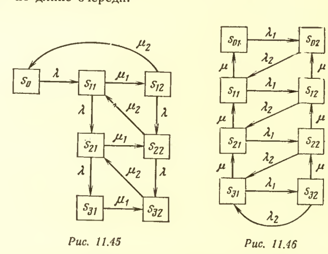


Рис. 11.45 *Рис. 11.46*

11.46*. Имеется одноканальная СМО с двумя местами в очереди. На ее вход поступает пальмовский поток заявок с интервалом T, распределенным по обобщенному закону Эрланга с параметрами λ_1, λ_2; время обслуживания — показательное с параметром μ. 1) Применяя метод фаз, написать уравнения для финальных вероятностей состояний p_0, p_1, p_2, p_3. Выразить через эти вероятности характеристики СМО: $P_{\text{отк}}$, Q, A, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$. 2) Вычислить финальные вероятности и характеристики эффективности для следующих исходных данных: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$; $\mu = 4$ и сравнить их с теми, которые соответствуют простейшей СМО с параметрами $\lambda = (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)^{-1} = 2$, $\mu = 4$, рассмотренной в задаче 11.45.

Решение. 1) Если рассматривать, как мы делаем обычно, состояния СМО, нумеруя их соответственно числу заявок в СМО: s_0,

s_1, s_2, s_3, то система не будет марковской. Чтобы ее марковизировать, разделим на две фазы (I и II) не время обслуживания, а интервал T между заявками: $T = T_1 + T_2$, где случайные величины T_1 и T_2 имеют показательное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

Состояния СМО будем нумеровать по числу заявок в СМО и номеру фазы между заявками:

s_{01} — заявок в СМО нет; интервал между заявками в первой фазе;

s_{02} — заявок в СМО нет; интервал между заявками во второй фазе;

s_{11} — в СМО одна заявка (обслуживается); интервал между заявками в первой фазе;

s_{12} — в СМО одна заявка (обслуживается); интервал между заявками во второй фазе;

s_{21} — в СМО две заявки (одна обслуживается, другая в очереди); интервал между заявками в первой фазе;

s_{22} — в СМО две заявки (одна обслуживается, другая в очереди), интервал между заявками во второй фазе;

s_{31} — в СМО три заявки (одна обслуживается, две в очереди); интервал между заявками в первой фазе;

s_{32} — в СМО три заявки (одна обслуживается, две в очереди), интервал между заявками во второй фазе.

Граф состояний СМО дан на рис. 11.46.

Уравнения для финальных вероятностей:

$$\lambda_1 p_{01} = \mu p_{11}; \quad \lambda_2 p_{02} = \lambda_1 p_{01} + \mu p_{12}; \quad (\lambda_1 + \mu)\, p_{11} = \lambda_2 p_{02} + \mu p_{21};$$

$$(\lambda_2 + \mu)\, p_{12} = \lambda_1 p_{11} + \mu p_{22}; \quad (\lambda_1 + \mu)\, p_{21} = \lambda_2 p_{12} + \mu p_{31};$$

$$(\lambda_2 + \mu)\, p_{22} = \lambda_1 p_{21} + \mu p_{32}; \quad (\lambda_1 + \mu)\, p_{31} = \lambda_2 p_{22} + \lambda_2 p_{32};$$

$$(\lambda_2 + \mu)\, p_{32} = \lambda_1 p_{31}.$$

Нормировочное условие $p_{01} + p_{02} + p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} + p_{31} + p_{32} = 1$.

Эти уравнения удобнее всего решать, выражая вероятности p_{ij} через последнюю, p_{32}. Выражения для вероятностей p_{ij} ($i = 0, 1, 2, 3$; $j = 1, 2$) имеют вид:

$$p_{32} = \left\{1 + \frac{\mu + \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\mu(\mu + \lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{\mu(\mu^2 + \lambda_1 \mu + 2\lambda_2 \mu + \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 \lambda_2} + \right.$$

$$+ \frac{\mu^2(\mu^2 + 2\lambda_1 \mu + 2\lambda_2 \mu + \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} +$$

$$+ \frac{\mu^2(\mu^3 + 2\lambda_1 \mu^2 + 3\lambda_2 \mu^2 + \lambda_1^2 \mu + 2\lambda_1 \lambda_2 \mu + 3\lambda_2^2 \mu + \lambda_2^3)}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} +$$

$$+ \frac{\mu^3(\mu^3 + 3\lambda_1 \mu^2 + 3\lambda_2 \mu^2 + 3\lambda_1^2 \mu + 4\lambda_1 \lambda_2 \mu + 3\lambda_2^2 \mu + \lambda_1^3 + \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_2^3)}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} +$$

$$\left. + \frac{\mu^3(\mu^3 + 2\lambda_1 \mu^2 + 3\lambda_2 \mu^2 + \lambda_1^2 \mu + 2\lambda_1 \lambda_2 \mu + 3\lambda_2^2 \mu + \lambda_2^3)}{\lambda_1^4 \lambda_2^3} \right\}^{-1}$$

$$p_{31} = \frac{\mu + \lambda_2}{\lambda_1}\, p_{32}; \quad p_{22} = \frac{\mu(\mu + \lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}\, p_{32};$$

$$p_{21} = \frac{\mu(\mu^2 + \lambda_1\mu + 2\lambda_2\mu + \lambda_2^2)}{\lambda_1^2\lambda_2} p_{32};$$

$$p_{12} = \frac{\mu^2(\mu^2 + 2\lambda_1\mu + 2\lambda_2\mu + \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)}{\lambda_1^2\lambda_2^2} p_{32};$$

$$p_{11} = \frac{\mu^2(\mu^3 + 2\lambda_1\mu^2 + 3\lambda_2\mu^2 + \lambda_1^2\mu + 2\lambda_1\lambda_2\mu + 3\lambda_2^2\mu + \lambda_2^3)}{\lambda_1^3\lambda_2^2} p_{32};$$

$$p_{02} = \frac{\begin{matrix}\mu^3(\mu^3 + 3\lambda_1\mu^2 + 3\lambda_2\mu^2 + \lambda_1^2\mu + 4\lambda_1\lambda_2\mu + \\ + 3\lambda_2^2\mu + \lambda_1^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_2^3\end{matrix}}{\lambda_1^3\lambda_2^2} p_{32};$$

$$p_{01} = \frac{\mu^3(\mu^3 + 2\lambda_1\mu^2 + 3\lambda_2\mu^2 + \lambda_1^2\mu + 2\lambda_1\lambda_2\mu + 3\lambda_2^2\mu + \lambda_2^3)}{\lambda_1^4\lambda_2^2} p_{32}.$$

Переходя обратно к исходной (не марковской) СМО, получаем: $p_0 = p_{01} + p_{02}$; $p_1 = p_{11} + p_{12}$; $p_2 = p_{21} + p_{22}$; $P_3 = p_{31} + p_{32}$.

Далее, $P_{\text{отк}} = p_3$; $Q = 1 - p_3$; $A = Q\lambda$; $\bar{z} = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3$; $\bar{r} = 1p_2 + 2p_3$; $\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda$; $\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda$.

Финальные вероятности состояний: $p_{01} \approx 0{,}308$; $p_{02} \approx 0{,}208$; $p_{11} \approx 0{,}231$; $p_{12} \approx 0{,}082$; $p_{21} \approx 0{,}091$; $p_{22} \approx 0{,}032$; $p_{31} \approx 0{,}037$; $p_{32} \approx 0{,}011$.

Для исходной (не марковской) СМО $p_0 = 0{,}616$; $p_1 = 0{,}313$; $p_2 \approx 0{,}123$; $p_3 \approx 0{,}048$; $P_{\text{отк}} \approx 0{,}048$; $Q \approx 0{,}952$; $A \approx 1{,}904$; $\bar{z} \approx 0{,}703$; $\bar{r} \approx 0{,}219$; $\bar{t}_{\text{сист}} \approx 0{,}352$; $\bar{t}_{\text{оч}} \approx 0{,}110$.

Из сравнения этих данных с результатами предыдущей задачи 11.45 делаем вывод, что СМО задачи 11.46 имеет незначительное преимущество перед СМО задачи 11.45 по всем характеристикам эффективности и несколько большее преимущество перед простейшей СМО с теми же λ, μ.

11.47. *Простейшая СМО без очереди с неограниченной взаимопомощью между каналами.* На n-канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Каналы работают со «взаимопомощью» — если в момент обслуживания очередной заявки в СМО есть свободные каналы, то все они подключаются к обслуживанию данной заявки. Интенсивность простейшего потока обслуживаний заявки есть некоторая функция $\mu = \varphi(k)$ числа k каналов, одновременно обслуживающих ее. Построить граф состояний СМО и найти финальные вероятности состояний. Выразить через них характеристики эффективности СМО: вероятность отказа $P_{\text{отк}}$, относительную пропускную способность Q, среднее число занятых каналов $\bar{k}$. Подсчитать эти характеристики при $n = 4$, $\lambda = 1$, $\mu(k) = k\mu$, $\mu = 0{,}5$ и сравнить их с теми же характеристиками в случае отсутствия взаимопомощи между каналами.

Решение. Так как в момент прихода первой же заявки все n каналов подключаются к ее обслуживанию, то это означает, что все каналы вместе всегда работают как один. СМО превращается в одноканальную СМО с отказами; ее состояния: s_0 — ни один канал не занят; s_n — все n каналов заняты. Размеченный граф состояний показан

на рис. 11.47. Пользуясь этим графом, получаем финальные вероятности состояний:

$$p_0=\left\{1+\frac{\lambda}{\varphi(n)}\right\}^{-1}=\frac{\varphi(n)}{\varphi(n)+\lambda}; \quad p_1=\frac{\lambda}{\varphi(n)}p_0=\frac{\lambda}{\varphi(n)+\lambda}.$$

При $\varphi(n) = n\mu$ имеем $p_0 = (n\mu)/(n\mu + \lambda)$; $p_1 = \lambda/(n\mu + \lambda)$.

При $n = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = 0{,}5$ имеем $p_0 = 2/3$; $p_1 = 1/3$; $P_{\text{отк}} = p_1 = 1/3$; $Q = 1 - p_1 = 2/3$; $A = \lambda Q = 2/3 \approx 0{,}667$.

Среднее число занятых каналов $\bar{k} = 4\cdot 1/3 + 0\cdot 2/3 = 4/3 \approx 1{,}333$. Этот же результат получим, деля A на μ: $\bar{k} = (2/3)/0{,}5 = 4/3$.

Рис. 11.47

Для сравнения рассчитаем те же характеристики эффективности для четырехканальной СМО без взаимопомощи между каналами [см. формулы Эрланга (11.0.6) и вытекающую из них (11.0.7)]; при $\rho = \lambda/\mu = 2$

$$p_0 = \{1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/6 + \rho^4/24\}^{-1} = 1/7;$$

$$P_{\text{отк}} = p_4 = (2/3)\,(1/7) = 2/21; \quad A = \lambda\,(1 - 2/21) \approx 0{,}905; \quad Q = A;$$

$$\bar{k} = A/\mu \approx 1{,}81.$$

Сравнивая эти характеристики с ранее полученными для СМО со взаимопомощью между каналами, приходим к выводу, что в наших условиях взаимопомощь невыгодна. Это на самом деле так — для СМО с отказами неограниченная взаимопомощь (когда все каналы сразу «набрасываются» на одну заявку, а тем временем вновь приходящие заявки получают отказ) всегда невыгодна.

11.48. *Простейшая СМО без очереди с равномерной взаимопомощью между каналами.* Имеется простейшая n-канальная СМО с отказами, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ. Между каналами осуществляется взаимопомощь, но не объединением всех каналов в один, как в предыдущем примере, а так называемая «равномерная» организованная следующим образом. Если заявка приходит в момент, когда все n каналов свободны, то все каналы принимаются за ее обслуживание; если в момент обслуживания заявки приходит еще одна, часть каналов переключается на ее обслуживание; если, пока обслуживаются эти две заявки, приходит еще заявка, часть каналов переключаются на ее обслуживание и т. д., пока не окажутся занятыми все n каналов; если они все заняты, вновь пришедшая заявка получает отказ. Функция $\varphi(k) = k\mu$, т. е. обслуживание k каналами в k раз быстрее обслуживания одним каналом.

Составить размеченный граф состояний СМО, определить финальные вероятности состояний и характеристики эффективности: Q, A,

$\bar{k}$. Подсчитать их при $n = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = 0,5$, т. е. в условиях задачи 11.47, и сравнить с тем, что получается без взаимопомощи*).

Решение. Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО. Граф состояний дан на рис. 11.48. Этот граф — тот же, что для простейшей одноканальной СМО с производительностью $\mu^* = n\mu$ и ограниченной очередью, имеющей $n - 1$ мест. Для определения ее характеристик можно воспользоваться формулами (11.0.16)—(11.0.19); полагая $\rho = \rho^* = \lambda/\mu^* = \lambda/(n\mu) = 0,5$; имеем при $m = 3$:

$$p_0 = \frac{1-\rho^*}{1-(\rho^*)^5} = \frac{0,5}{1-0,5^5} \approx 0,514; \quad p_4 = (\rho^*)^4 p_0 \approx 0,032;$$

$$A = \lambda(1-p_4) \approx 0,968; \quad Q = 1 - p_4 \approx 0,968; \quad \bar{k} = A/\mu^* \approx 1,936.$$

В тех же условиях (см. задачу 11.47) при отсутствии взаимопомощи имеем: $A \approx 0,905$; $Q \approx 0,905$; $\bar{k} \approx 1,81$, т. е. «равномерная» взаимопомощь несколько увеличивает пропускную способность СМО. В данном случае это увеличение незначительно, так как СМО сравнительно мало нагружена.

Рис. 11.48

1.49. Для простейшей трехканальной СМО с отказами и параметрами: $\lambda = 4$ заявки/мин, среднее время обслуживания заявки одним каналом $1/\mu = 0,5$ мин, интенсивность обслуживания заявки k каналами $\varphi(k) = k\mu$ определить характеристики эффективности СМО Q, A, $\bar{k}$ для трех вариантов использования СМО: 1) при отсутствии взаимопомощи; 2) при неограниченной взаимопомощи; 3) при равномерной взаимопомощи между каналами.

Ответ: 1) $Q \approx 0,79$; $A \approx 3,16$; $\bar{k} \approx 1,58$; 2) $Q = 0,6$; $A = 2,4$; $\bar{k} = 1,2$; 3) $Q \approx 0,887$; $A \approx 3,51$; $\bar{k} \approx 1,76$.

11.50. *Простейшая СМО с неограниченной очередью и со взаимопомощью между каналами.* Имеется простейшая n-канальная СМО, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ; время обслуживания заявки одним каналом — показательное с параметром μ. Интенсивность потока обслуживаний заявки k каналами пропорциональна их числу: $\varphi(k) = k\mu$. Каналы распределяются по заявкам, находящимся в СМО, произвольным образом, но при условии, что если

*) При нашей постановке задачи все равно, какая часть каналов переключается на обслуживание вновь прибывшей заявки; важно, что все время работают все n каналов и ни одна вновь пришедшая заявка не получает отказа, пока в СМО не окажется n заявок и все n каналов будут по одному их обслуживать.

в СМО находится хотя бы одна заявка, все n каналов заняты обслуживанием.

Нумеруя состояния СМО по числу заявок, находящихся в ней, построить размеченный граф состояний, найти финальные вероятности состояний и вычислить характеристики эффективности СМО: $\bar{k}$, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$.

Р е ш е н и е. Граф состояний этой СМО совпадает с графом состояний простейшей одноканальной СМО с неограниченной очередью, с интенсивностью потока заявок λ и потока обслуживаний $n\mu$ (см. п. 2 раздела 11.0). Полагая в формулах (11.0.12)—(11.0.15) $\rho = \varkappa = \lambda/(n\mu)$, получаем $p_0 = 1 - \varkappa$; $p_k = \varkappa^k (1 - \varkappa)$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $\bar{z} = \varkappa/(1 - \varkappa)$; $\bar{r} = \varkappa^2/(1 - \varkappa)$; $\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\varkappa}{\lambda(1-\varkappa)}$; $\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\varkappa^2}{\lambda(1-\varkappa)}$.

Характеристики эффективности СМО в данном случае совершенно не зависят от того, обслуживают ли каналы заявки «все как один» или «равномерно», так как заявки не получают отказов (заметим, что не меняются от этого только средние значения случайных величин Z, R, $T_{\text{сист}}$, $T_{\text{оч}}$, а не их распределения).

11.51. *Простейшая СМО с ограниченной очередью и равномерной взаимопомощью между каналами.* Рассматривается простейшая СМО с n каналами и равномерной взаимной помощью между каналами. На СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; поток обслуживаний одного канала — простейший с интенсивностью μ; k каналов, обслуживающих одну заявку, дают суммарный поток обслуживаний с интенсивностью $\varphi(k) = k\mu$. Каналы распределяются между заявками «равномерно» в том смысле, что каждая вновь пришедшая заявка начинает обслуживаться, если только есть возможность выделить для этого канал. Заявка, пришедшая в момент, когда все n каналов заняты, становится в очередь. Число мест в очереди m; если они все заняты, заявка получает отказ.

Нумеруя состояния СМО по числу заявок, находящихся в ней, составить размеченный граф состояний СМО и найти финальные вероятности состояний. Найти характеристики эффективности СМО: $P_{\text{отк}}$, Q, A, $\bar{z}$; $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$.

Р е ш е н и е. Состояния СМО:

s_0 — система свободна;

s_1 — одна заявка обслуживается всеми n каналами; ...;

s_k — k заявок обслуживаются всеми n каналами $(1 < k < n)$; ...;

s_n — n заявок обслуживаются n каналами, очереди нет;

s_{n+1} — n заявок обслуживаются n каналами, одна заявка стоит в очереди; ...;

s_{n+m} — n заявок обслуживаются n каналами, m заявок стоят в очереди.

Граф состояний СМО дан на рис. 11.51. Этот граф состояний СМО совпадает с графом состояний простейшей одноканальной СМО с ограниченным числом m мест в очереди, интенсивностью потока заявок λ и интенсивностью потока обслуживаний $n\mu$ (см. раздел

$$\boxed{s_0} \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{s_1} \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{s_2} \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{s_k} \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{n\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \boxed{s_{n+m}}$$

Рис. 11.51

11.0, п. 3). Подставляя в формулы (11.0.16)—(11.0.20) $\varkappa=\lambda/(n\mu)$ вместо ρ и $n+m$ вместо m, получаем:

$$p_0=(1-\varkappa)/(1-\varkappa^{n+m+2}); \quad p_k=\varkappa^k p_0 \quad (k=1,\dots, n+m);$$

$$P_{\text{отк}}=p_{n+m}; \quad Q=1-p_{n+m}; \quad A=\lambda Q.$$

$$\bar{r}=\frac{\varkappa^2[1-\varkappa^{n+m}(n+m+1-(n+m)\varkappa)]}{(1-\varkappa^{n+m+2})(1-\varkappa)}; \quad \bar{z}=\bar{r}+\bar{k};$$

$$\bar{t}_{\text{сист}}=\bar{z}/\lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}}=\bar{r}/\lambda.$$

11.52. На вход автоматизированного банка данных (АБД) подается в среднем $\lambda = 335$ статей/ч. Первая операция по обработке входного потока первичных информационных документов (ПИД) состоит в отборе тех статей, которые должны вводиться в АБД. В отборе участвует 6 человек (отборщиков); средняя производительность каждого отборщика $\mu = 60$ статей/ч. Известно, что в среднем из входного потока отбирается для ввода в АБД 61,3% ПИД. Все потоки событий — простейшие. Рассматривая систему отбора ПИД для ввода в АБД как шестиканальную ($n = 6$) СМО с неограниченной очередью, определить ее характеристики эффективности: A, Q, $\bar{k}$, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$.

Решение. Так как очередь неограниченна, $Q = 1$; $A = \lambda$. Интенсивность потока ПИД, отобранных для ввода в АБД, $\lambda_0 = \lambda p$, где $p \approx 0{,}613$, т. е. $\lambda_0 = 335 \cdot 0{,}613 \approx 205$ статей/ч.

Интенсивность потока ненужных для ввода в АБД ПИД будет $\lambda_н = \lambda(1-p) \approx 130$ статей/ч.

Среднее число отборщиков, занятых отбором ПИД, $\bar{k} = \lambda/\mu = \rho = 5{,}58$ и не зависит от числа каналов (отборщиков). Стационарный режим в СМО существует, если выполнено условие $\varkappa = \lambda/(n\mu) < 1$; в нашем случае оно выполнено ($\varkappa = 0{,}93$).

Вероятность того, что в СМО будут заняты работой все n отборщиков [см. формулу (11.0.22)], равна

$$p_n = P(n, \rho) \Big/ \left[R(n, \rho) + P(n, \rho)\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right].$$

Пользуясь таблицами, данными в приложениях 1, 2, получаем

$$p_6 = 0{,}1584 \Big/ \left(0{,}6703 + 0{,}1584\,\frac{0{,}93}{0{,}07}\right) \approx 0{,}0569.$$

Среднее число ПИД в очереди [см. (11.0.23)] $\bar{r} = p_n\varkappa/(1-\varkappa)^2 \approx 10{,}8$. Среднее время пребывания ПИД в очереди $\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda \approx 1{,}87$ мин. Среднее число ПИД, находящихся в системе (в очереди и на обработ-

ке), $\bar{z} = r + \rho \approx 15{,}38$. Среднее время пребывания ПИД в системе $\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + 1/\mu \approx 2{,}87$ мин.

11.53. На вход СМО (рис. 11.53) подается простейший поток заявок с интенсивностью λ. Обслуживание состоит из двух последовательных фаз, выполняемых в $СМО_1$ и $СМО_2$. В $СМО_1$ проводится об-

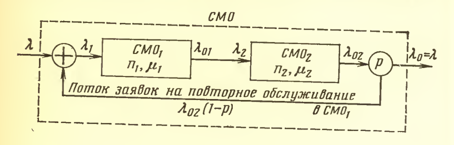


Рис. 11.53

служивание заявки, а в $СМО_2$ контролируется качество проведенного в $СМО_1$ обслуживания. Если в $СМО_2$ не обнаружено недостатков в обслуживании, то заявка считается обслуженной в СМО; если в $СМО_2$ обнаружены недостатки в обслуживании, то заявка возвращается на повторное обслуживание в $СМО_1$ (см. рис. 11.53). Вероятность того, что заявка, обработанная в $СМО_1$, будет в результате контроля в $СМО_2$ возвращена на повторное обслуживание в $СМО_1$, равна $1 - p$ и не зависит от того, сколько раз она была обработана в $СМО_1$.

$СМО_1$ и $СМО_2$ представляют собой n_1- и n_2-канальные системы с неограниченной очередью и интенсивностью потоков обслуживаний в каждом канале μ_1 и μ_2 соответственно. Время повторного обслуживания заявки в канале в $СМО_1$ и повторного контроля качества обслуживания заявки в канале в $СМО_2$ распределено (так же, как и при проведении этих операций впервые) по показательному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Определить условия существования стационарного режима работы рассмотренной СМО, считая, что потоки заявок, поступающие в $СМО_1$ и $СМО_2$, простейшие.

Решение. Обозначим λ_1 интенсивность потока заявок, подаваемых на вход $СМО_1$. Очевидно, что $\lambda_1 > \lambda$, так как на вход $СМО_1$ будет поступать поток заявок, направляемых на обслуживание в $СМО_1$ впервые (интенсивность потока λ), плюс поток заявок, направляемых на повторное обслуживание (см. рис. 11.53). Если стационарный режим существует, то интенсивность потока обслуженных в $СМО_1$ заявок λ_{01} будет равна интенсивности λ_1. Поток обслуженных в $СМО_1$ заявок поступает в $СМО_2$, следовательно, на вход $СМО_2$ поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_{01}$. В силу наличия стационарного режима в $СМО_2$ интенсивность потока заявок на выходе $СМО_2$ (λ_{02}) будет также равна λ_2. Таким образом,

$$\lambda_1 = \lambda_{01} = \lambda_2 = \lambda_{02}. \qquad (11.53.1)$$

Очевидно, что интенсивность потока обслуженных заявок λ_0 на выходе СМО в стационарном режиме будет равна интенсивности входного потока λ.

Интенсивность потока обслуженных в СМО заявок λ_0 будет равна интенсивности потока заявок на выходе $СМО_2$ (λ_{02}), умноженной на вероятность p того, что заявка не будет возвращена в $СМО_1$ на повторное обслуживание:

$$\lambda_{02}p = \lambda_0 = \lambda, \qquad (11.53.2)$$

откуда

$$\lambda_{02} = \lambda/p. \qquad (11.53.3)$$

Таким образом [см. формулы (11.53.1)—(11.53.3)],

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda/p. \qquad (11.53.4)$$

Для того чтобы существовал стационарный режим работы в СМО, необходимо, чтобы как $СМО_1$, так и $СМО_2$ «справлялись» с потоком поступающих на них заявок; следовательно, должны выполняться два условия:

$$\varkappa_1 = \lambda_1/(n_1\mu_1) = \lambda/(pn_1\mu_1) < 1; \qquad (11.53.5)$$

$$\varkappa_2 = \lambda_2/(n_2\mu_2) = \lambda/(pn_2\mu_2) < 1. \qquad (11.53.6)$$

Они вытекают из того, что как $СМО_1$, так и $СМО_2$ представляют собой n_1- и n_2-канальные системы с интенсивностью обслуживания в каналах μ_1 и μ_2 соответственно, с неограниченными очередями (см. п. 4 начала этой главы).

11.54. Для условий предыдущей задачи определить среднее время пребывания заявки в СМО и среднее число заявок, находящихся в СМО.

Р е ш е н и е. Среднее время однократного пребывания заявки в $СМО_1$ $\bar{t}_1$ (см. рис. 11.53) будет определяться из условия, что на вход этой системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda_1 = \lambda/p$, число каналов обслуживания n_1, интенсивность обслуживания μ_1, число мест в очереди неограниченно. Для этих условий в соответствии с (11.0.21)—(11.0.25) имеем

$$\bar{t}_1 = (\rho_1 + \bar{r}_1)\lambda_1^{-1} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\rho_1^{n_1+1} p_{01}}{n_1 \cdot n_1! (1-\varkappa_1)\lambda_1}, \qquad (11.54.1)$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{p\mu_1}; \quad \varkappa_1 = \frac{\rho_1}{n_1}; \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{p};$$

$$p_{01} = \left[1 + \frac{\rho_1}{1!} + \frac{\rho_1^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} + \frac{\rho_1^{n_1+1}}{n_1 \cdot n_1!}\frac{1}{1-\varkappa_1}\right]^{-1}.$$

Аналогично рассчитываем величину $\bar{t}_2$ — среднее время однократного пребывания заявки в $СМО_2$ для условий $\lambda_2 = \lambda/p$; n_2; μ_2:

$$\bar{t}_2 = (\rho_2 + \bar{r}_2)\lambda_2^{-1} = \frac{1}{\mu_2} + \frac{\rho_2^{n_2+1} p_{02}}{n_2 \cdot n_2! (1-\varkappa_2)^2\lambda_2}, \qquad (11.54.2)$$

где

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{p\mu_2}; \quad \varkappa_2 = \frac{\rho_2}{n_2}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{p};$$

$$p_{02} = \left[1 + \frac{\rho_2}{1!} + \frac{\rho_2^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} + \frac{\rho_2^{n_2+1}}{n_2 \cdot n_2!} \frac{1}{1-\varkappa}\right]^{-1}.$$

Следовательно, среднее время однократной обработки заявки $СМО_1$ и $СМО_2$ будет

$$\bar{\tau}_{12} = \bar{t}_1 + \bar{t}_2. \tag{11.54.3}$$

Из условия задачи 11.53 следует, что случайная величина X — число циклов обработки одной заявки в $СМО_1$ и $СМО_2$ будет иметь геометрическое распределение, начинающееся с единицы, с параметром p:

$$X: \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ \hline p & pq & pq^2 & \ldots & pq^{k-1} & \ldots \end{array} \tag{11.54.4}$$

Обозначим $T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots$ — время первого, второго, ..., k-го цикла обработки заявки в $СМО_1$ и $СМО_2$. По условиям задачи случайные величины $T_1, \ldots, T_k, \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют математическое ожидание $\bar{\tau}_{12}$.

Время пребывания заявки в СМО (с учетом возможных возвратов заявки на повторное обслуживание) можно записать в виде $T = \sum_{k=1}^{X} T_k$, т. е. оно представляет собой сумму случайного числа случайных слагаемых, где число слагаемых X не зависит от случайных величин $T_1, T_2, T_3, \ldots$ В соответствии с решением задачи 7.64 находим математическое ожидание величины T:

$$\bar{t} = M[T] = M[T_k]\, M[X] = \bar{\tau}_{12}/p. \tag{11.54.5}$$

Для рассмотренной СМО формула Литтла также справедлива, поэтому среднее число заявок, находящихся в СМО, будет определяться по формуле

$$\bar{z} = \bar{t}\lambda. \tag{11.54.6}$$

11.55. Условия задачи (11.53) изменены так, что в $СМО_1$ и $СМО_2$ проводится только первичное обслуживание и его контроль; если заявка не прошла контроль в $СМО_2$, то она направляется на повторное обслуживание в $СМО_3$ и повторный контроль в $СМО_4$ (рис. 11.55). $СМО_3$ и $СМО_4$ представляют собой n_3- и n_4-канальные системы с показательным распределением времени обслуживания заявок в каналах с параметрами μ_3 и μ_4 соответственно. Вероятность того, что заявка, обработанная в $СМО_3$, будет в результате контроля в $СМО_4$ возвращена на повторное обслуживание в $СМО_3$, равна $1 - \pi$. Определить условия существования стационарного режима работы рассмотренной в этой задаче СМО, считая, что потоки заявок, поступающие в $СМО_1$, $СМО_2$, $СМО_3$ и $СМО_4$, являются простейшими.



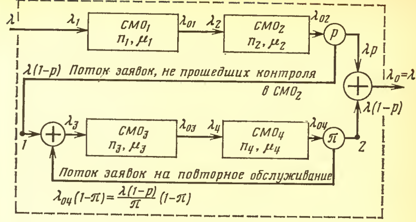


Рис. 11.55

Р е ш е н и е. В рассматриваемой СМО в стационарном режиме будет иметь место очевидное равенство (см. рис. 11.55)

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_{01} = \lambda_2 = \lambda_{02}. \qquad (11.55.1)$$

Следовательно, интенсивность потока заявок, которые прошли однократное обслуживание и контроль в $СМО_1$ и $СМО_2$, будет λp. Поток заявок, не прошедших контроля в $СМО_2$ и направляемых на повторное обслуживание в $СМО_3$ и $СМО_4$, будет иметь интенсивность $\lambda\,(1-p)$. Работа системы повторного обслуживания $СМО_3$ и $СМО_4$ (от точки 1 до точки 2 на рис. 11.55) принципиально ничем не отличается от работы системы, рассмотренной в задаче 11.53.

Из всего сказанного следует, что для стационарной работы рассматриваемой в этой задаче СМО должны выполняться совместно следующие условия:

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda}{n_1 \mu_1} < 1; \quad \varkappa_2 = \frac{\lambda}{n_2 \mu_2} < 1; \quad \varkappa_3 = \frac{\lambda\,(1-p)}{\pi n_3 \mu_3} < 1;$$

$$\varkappa_4 = \frac{\lambda\,(1-p)}{\pi n\ \mu_4} < 1. \qquad (11.55.2)$$

Кроме того, будут иметь место равенства (см. рис. 11.55)

$$\lambda_3 = \lambda_{03} = \lambda_4 = \lambda_{04} = \lambda\,(1-p)\,\pi^{-1}. \qquad (11.55.3)$$

11.56. Для условий предыдущей задачи определить среднее время $\bar{t}$ пребывания заявки в СМО и среднее число заявок $\bar{z}$, находящихся в СМО.

Р е ш е н и е. Среднее время пребывания заявки в $СМО_1$ будет определяться из условия, что на вход этой системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda_1 = \lambda$ [см. рис. 11.55 и формулу

(11.55.1)], число каналов обслуживания n_1, интенсивность обслуживания в канале μ_1, число мест в очереди неограниченно. Для этих условий в соответствии с (11.0.21)—(11.0.25)

$$\bar{t}_1 = (\rho_1 + \bar{r}_1)\lambda^{-1} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\rho_1^{n_1+1} p_{01}}{n_1 \cdot n_1! (1-\varkappa_1)^2 \lambda}, \qquad (11.56.1)$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}; \quad \varkappa_1 = \frac{\rho_1}{n_1};$$

$$p_{01} = \left[1 + \frac{\rho_1}{1!} + \frac{\rho_2^2}{2} + \ldots + \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} + \frac{\rho_1^{n_1+1}}{n_1 \cdot n_1!}\frac{1}{1-\varkappa_1}\right]^{-1}.$$

Аналогично рассчитываем величину $\bar{t}_2$ для СМО$_2$ при $\lambda_2 = \lambda$, n_2, μ_2:

$$\bar{t}_2 = (\rho_2 + \bar{r}_2)\lambda^{-1} = \frac{1}{\mu_2} + \frac{\rho_2^{n_2+1} p_{02}}{n_2 \cdot n_2! (1-\varkappa_2)^2 \lambda}, \qquad (11.56.2)$$

где

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}; \quad \varkappa_2 = \frac{\rho_2}{n_2};$$

$$p_{02} = \left[1 + \frac{\rho_2}{1!} + \frac{\rho_2^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} + \frac{\rho_2^{n_2+1}}{n_2 \cdot n_2!}\frac{1}{1-\varkappa_2}\right]^{-1}.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО$_1$ и СМО$_2$ равно

$$\bar{\tau}_{12} = \bar{t}_1 + \bar{t}_2. \qquad (11.56.3)$$

Среднее время $\bar{t}_3$ однократного пребывания заявки в СМО$_3$ будет определяться из следующих условий: на вход этой системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda_3 = \lambda(1-p)/\pi$ [см. рис. 11.55 и формулу (11.55.3)], число каналов обслуживания n_3, интенсивность обслуживания в канале μ_3, число мест в очереди неограниченно. Тогда в соответствии с (11.0.21)—(11.0.25)

$$\bar{t}_3 = (\rho_3 + \bar{r}_3)\lambda_3^{-1} = 1/\mu_3 + \rho_3^{n_3+1} p_{03}/[n_3 n_3! (1-\varkappa_3)^2 \lambda_3], \qquad (11.56.4)$$

где

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{\lambda(1-p)}{\pi\mu_3}; \quad \varkappa_3 = \frac{\rho_3}{n_3};$$

$$p_{03} = \left[1 + \frac{\rho_3}{1!} + \frac{\rho_3^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^{n_3}}{n_3!} + \frac{\rho_3^{n_3+1}}{n_3 n_3!}\frac{1}{1-\varkappa_3}\right]^{-1}.$$

Аналогично рассчитываем величину $\bar{t}_4$ для СМО$_4$ при $\lambda_4 = \lambda(1-p)/\pi$, n_4, μ_4:

$$\bar{t}_4 = (\rho_4 + \bar{r}_4)\lambda_4^{-1} = 1/\mu_4 + \rho_4^{n_4+1} p_{04}/[n_4 \cdot n_4! (1-\varkappa_4)^2 \lambda_4], \qquad (11.56.5)$$

где

$$\rho_4=\frac{\lambda_4}{\mu_4}=\frac{\lambda(1-p)}{\pi\mu_3}; \quad \varkappa_4=\frac{\rho_4}{n_4};$$

$$p_{04}=\left[1+\frac{\rho_4}{1!}+\frac{\rho_4^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho_4^{n_4}}{n_4!}+\frac{\rho_4^{n_4+1}}{n_4 n_4!}\frac{1}{1-\varkappa_4}\right]^{-1}.$$

Следовательно, среднее время однократной обработки заявки в $СМО_3$ и $СМО_4$ будет

$$\bar{\tau}_{34}^{(1)}=\bar{t}_3+\bar{t}_4. \qquad (11.56.6)$$

В соответствии с формулой (11.54.6) математическое ожидание времени пребывания заявки в $СМО_3$ и $СМО_4$ (см. рис. 11.55) с учетом возможной повторной обработки равно

$$\bar{\tau}_{34}=\bar{\tau}_{34}^{(1)}/\pi. \qquad (11.56.7)$$

Для определения среднего времени пребывания заявки в СМО рассмотрим две гипотезы: 1) H_1 — заявка подвергалась только однократной обработке; $P(H_1)=p$; 2) H_2 — заявка подвергалась многократной обработке; $P(H_2)=1-p$.

При гипотезе H_1 математическое ожидание времени пребывания заявки в СМО будет определяться по формуле (11.56.3), при гипотезе H_2 — по формулам (11.56.7) и (11.56.3). Полное математическое ожидание времени пребывания заявки в СМО будет

$$\bar{t}=\bar{\tau}_{12}+\bar{\tau}_{34}^{(1)}(1-p)/\pi. \qquad (11.56.8)$$

Среднее число заявок, находящихся в СМО, определяется по формуле Литтла:

$$\bar{z}=\bar{t}\lambda. \qquad (11.56.9)$$

11.57. Рассмотрим условия задачи 11.53 применительно к многократной обработке информации в двух фазах. С целью контроля правильности перфорации она осуществляется дважды: на перфораторе и на «контрольнике», с помощью которого обнаруживают ошибку. Перфораторщица осуществляет в среднем одну ошибку на 1000 знаков (букв, цифр и т. п.). Каждая перфокарта содержит в среднем 80 знаков. Если во время контроля на перфокарте обнаружена хотя бы одна ошибка, то эта перфокарта возвращается снова на перфорацию. За год необходимо обработать 50 000 документов, каждый из которых содержит в среднем 400 знаков.

Найти минимально необходимое число перфораторщиц, работающих на перфораторах и контрольниках, если одна перфораторщица в год перфорирует $4{,}2\cdot10^6$ знаков, и определить характеристики такой системы.

Р е ш е н и е. Из условий задачи следует, что в год необходимо в среднем отперфорировать и проконтролировать $50\,000\cdot400/80=$ $=250\,000$ перфокарт. Следовательно, $\lambda=250\,000$ перф./год $=125$ перф./ч $=2{,}083$ перф./мин. Производительность перфораторщицы, ра-

ботающей за перфоратором или на «контрольнике», составляет $\mu_1 = \mu_2 = 4{,}2\cdot10^6/80 = 52\cdot5000$ перф./год $= 26{,}25$ перф./ч $= 0{,}438$ перф./мин. Вероятность необнаружения ни одной ошибки на перфокарте равна $p = 0{,}999^{80} \approx 0{,}9$. При этом мы пренебрегаем вероятностью того, что и перфораторщица и контролер ошибутся одинаково в одном и том же знаке. Эта вероятность намного меньше, чем $(0{,}001)^2 = 10^{-6}$, так как клавиатура перфоратора и «контрольника» имеет около 50 различных знаков. Если считать, что ошибочно может быть нажат на клавиатуре любой знак из 50, то получим вероятность одинаковой ошибки, равную $10^{-6}/2500$. Если считать, что ошибочно может быть нажат на клавиатуре только ближайший к нужному знак (а их от 5 до 8), то эта вероятность будет $10^{-6}/25 - 10^{-6}/64$.

Условие стационарной работы перфораторщиц будет [см. формулы (11.53.5), (11.53.6)]

$$\lambda/(n_1\mu_1 p) = \varkappa_1 < 1; \quad \lambda/(n_2\mu_2 p) = \varkappa_2 < 1,$$

откуда $n_1 > \lambda/(\mu_1 p) = 250\,000/(52\cdot500\cdot0{,}9) = 5{,}29$; $\quad n_2 > 5{,}29$.

Таким образом, нужно иметь шесть перфораторщиц и шесть контролеров.

Характеристики работы перфораторщиц: $\lambda_{\text{вх}1} = \lambda/p = 250\,000 : 0{,}9 = 278\,000$ перф./год; $n_1 = 6$; $\mu_1 = 52\cdot500$ перф./год; $\varkappa_1 = \lambda : (n_1 p\mu) = 0{,}882$; $\rho_1 = \lambda/(p\mu_1) = 5{,}29$.

По формуле (11.0.22) находим вероятность того, что все шесть перфораторщиц будут заняты и «очереди» документов, подлежащих перфорации, нет:

$$p_{n_1} = \frac{P(n_1, \rho_1)}{R(n_1, \rho_1) + P(n_1, \rho_1)\dfrac{\varkappa_1}{1-\varkappa_1}} = \frac{0{,}152}{0{,}282 + 0{,}152\dfrac{0{,}882}{1-0{,}882}} = 0{,}107.$$

Среднее число перфокарт, ожидающих в очередь на перфорацию, $\bar r_1 = p_{n_1}\varkappa_1/(1-\varkappa_1)^2 = 6{,}78$.

Среднее время ожидания перфокарты в очереди: $\bar t_{\text{оч}} = \bar r_1 p\lambda^{-1} = 2{,}92$ мин; $\bar t_1 = \bar t_{\text{оч}\,1} + 1/\mu_1 = 5{,}21$ мин.

Общее число перфокарт в первой фазе $\bar z_1 = \bar r_1 + \bar k_1 = \bar r_1 + \rho_1 = 12{,}07$.

Так как характеристики второй фазы (контроля) такие же, как и в первой, то можно выписать общие характеристики работы системы с учетом возврата перфокарт на новую обработку. Общее среднее число перфокарт, находящихся в системе, $\bar z = 2\bar z_1 = 24{,}14$; из них в очереди будет $\bar r = 2\bar r_1 = 13{,}56$. Общее среднее время обработки одной перфокарты с учетом ее возможного возврата на повторную обработку равно $\bar t = \tau_{12}/p = (\bar t_1 + \bar t_2)/p = 2\bar t_1/p = 11{,}57$ мин.

Приложение 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА $P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

m \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,2237
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0 0002
24										0,0001

Приложение 2. *ЗНАЧЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ*)*

$$\overline{R}(m,\ a)=1-R(m\ \ a)=1-\sum_{k=0}^{m}\frac{a^k}{k!}\,e^{-a}$$

m	$a=0.1$	$a=0.2$	$a=0,3$	$a=0$ 4	$a=0,5$
0	$9{,}5163^{-2}$	$1{,}8127^{-1}$	$2{,}5918^{-1}$	$3{,}2968^{-1}$	$8{,}9347^{-1}$
1	$4{,}6788^{-3}$	$1{,}7523^{-2}$	$3{,}6936^{-2}$	$6{,}1552^{-2}$	$9{,}0204^{-2}$
2	$1{,}5465^{-4}$	$1{,}1485^{-3}$	$3{,}5995^{-3}$	$7{,}9263^{-3}$	1,4388
3	$3{,}8468^{-6}$	$5{,}6840^{-5}$	$2{,}6581^{-4}$	$7{,}7625^{-4}$	$1{,}7516^{-3}$
4		$2{,}2592^{-6}$	$1{,}5785^{-5}$	$6{,}1243^{-5}$	$1{,}7212^{-4}$
5				$4{,}0427^{-6}$	$1{,}4165^{-5}$
6					$1{,}0024^{-6}$

m	$a=0,6$	$a=0,7$	$a=0,8$	$a=0,9$	
0	$4{,}5119^{-1}$	$5{,}0341^{-1}$	$5{,}5067^{-1}$	$5{,}9343^{-1}$	
1	1,2190	1,5580	1,9121	2,2752	
2	$2{,}3115^{-2}$	$3{,}4142^{-2}$	$4{,}7423^{-2}$	$6{,}2857^{-2}$	
3	$3{,}3581^{-3}$	$5{,}7535^{-3}$	$9{,}0799^{-3}$	1,3459	
4	$3{,}9449^{-4}$	$7{,}8554^{-4}$	1,4113	$2{,}3441^{-3}$	
5	$3{,}8856^{-5}$	$9{,}0026^{-5}$	$1{,}8434^{-4}$	$3{,}4349^{-4}$	
6	$3{,}2931^{-6}$	$8{,}8836^{-6}$	$2{,}0747^{-5}$	$4{,}3401^{-5}$	
7			$2{,}0502^{-6}$	$4{,}8172^{-6}$	

m	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$
0	$6{,}3212^{-1}$	$8{,}6466^{-1}$	$9{,}5021^{-1}$	$9{,}8168^{-1}$	$9{,}9326^{-1}$
1	2,6424	5,9399	8,0085	9,0842	9,5957
2	$8{,}0301^{-2}$	3,2332	5,7681	7,6190	8,7535
3	1,8988	1,4288	3,5277	5,6653	7,3497
4	$3{,}6598^{-3}$	$5{,}2653^{-2}$	1,8474	3,7116	5,5951
5	$5{,}9418^{-4}$	1,6564	$8{,}3918^{-2}$	2,1487	3,8404
6	$8{,}3241^{-5}$	$4{,}5338^{-3}$	3,3509	1,1067	2,3782
7	1,0219	1,0967	1,1905	$5{,}1134^{-2}$	1,3337
8	$1{,}1252^{-6}$	$2{,}3745^{-4}$	$3{,}8030^{-3}$	2,1363	$6{,}8094^{-2}$
9		$4{,}6498^{-5}$	1,1025	$8{,}1322^{-3}$	3,1828
10		$8{,}3082^{-6}$	$2{,}9234^{-4}$	2,8398	1,3695
11		1,3646	$7{,}1387^{-5}$	$9{,}1523^{-4}$	$5{,}4531^{-3}$
12			1,6149	2,7372	2,0189
13			$3{,}4019^{-6}$	$7{,}6328^{-5}$	$6{,}9799^{-4}$
14				1,9932	2,2625
15				$4{,}8926^{-6}$	$6{,}9008^{-5}$
16				1,1328	1,9869
17					$5{,}4163^{-6}$
18					1,4017

*) Вероятность $P(m,\ a)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}$ может быть найдена через вероятность $\overline{R}\ (m,\ a)$ следующим образом: $P\ (m,\ a)=\overline{R}\ (m-1,\ a)-\overline{R}\ (m,\ a)\ (m>0)$, $P\ (0,\ a)=1-\overline{R}\ (0,\ a)$.

m	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
0	$9,9752^{-1}$	$9,9909^{-1}$	$9,9966^{-1}$	$9,9988^{-1}$	$9,9995^{-1}$
1	9,8265	9,9270	9,9698	9,9877	9,9950
2	9,3803	9,7036	9,8625	9,9377	9,9723
3	8,4880	9,1823	9,5762	9,7877	9,8966
4	7,1494	8,2701	9,0037	9,4504	9,7075
5	5,5432	6,9929	8,0876	8,8431	9,3291
6	3,9370	5,5029	6,8663	7,9322	8,6986
7	2,5602	4,0129	5,4704	6,7610	7,7978
8	1,5276	2,7091	4,0745	5,4435	6,6718
9	$8,3924^{-2}$	$1,6950^{-1}$	$2,8338^{-1}$	$4,1259^{-1}$	$5,4207^{-1}$
10	4,2621	$9,8521^{-2}$	1,8411	2,9401	4,1696
11	2,0092	5,3350	1,1192	1,9699	3,0322
12	$8,8275^{-3}$	2,7000	$6,3797^{-2}$	1,2423	2,0844
13	3,6285	1,2811	3,4181	$7,3851^{-2}$	1,3554
14	1,4004	$5,7172^{-3}$	1,7257	4,1466	$8,3458^{-2}$
15	$5,0910^{-4}$	2,4066	$8,2310^{-3}$	2,2036	4,8740
16	1,7488	$9,5818^{-4}$	3,7180	1,1106	2,7042
17	$5,6917^{-5}$	3,6178	1,5943	$5,3196^{-3}$	1,4278
18	1,7597	1,2985	$6,5037^{-4}$	2,4264	$7,1865^{-3}$

m	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
19	$5,1802^{-6}$	$4,4402^{-5}$	2,5294	1,0560	3,4543
20	1,4551	1,4495	$9,3968^{-5}$	$4,3925^{-4}$	1,5883
21		$4,5263^{-6}$	3,3407	1,7495	$6,9965^{-4}$
22		1,3543	1,1385	$6,6828^{-5}$	2,9574
23			$3,7255^{-6}$	2,4519	1,2012
24			1,1722	$8,6531^{-6}$	$4,6949^{-5}$
25				2,9414	1,7680
26					$6,4229^{-6}$
27					2,2535

Пример. Требуется определить вероятность того, что событие A появится не более двух раз, если $a = 7$.

Имеем

$$R\ (2,7) = 1 - \overline{R}\ (2,7) = 1 - 9,7036^{-1} = 1 - 0,97036 = 0,02964.$$

Примечания: 1. Если у числа в таблице показатель степени отсутствует, то им будет показатель степени ближайшего вышестоящего числа, у которого есть показатель степени. Например, $\overline{R}\ (33; 19) = 1,2067 \cdot 10^{-3}$.

2. При $a > 20$ вероятность $R\ (m,\ a)$ можно рассчитывать по приближенной формуле:

$$R\ (m\ \ a) \approx \Phi\left(\frac{m+0,5-a}{\sqrt{a}}\right)+0,5$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа (приложение 5).

m	$a=11$	$a=12$	$a=13$	$a=14$	$a=15$
0	$9,9998^{-1}$	$9,9999^{-1}$			
1	9,9980	9,9992	$9,9997^{-1}$	$9,9999^{-1}$	
2	9,9879	9,9948	9,9978	9,9991	$9,9996^{-1}$
3	9,9508	9,9771	9,9895	9,9953	9,9979
4	9,8490	9,9240	9,9626	9,9819	9,9914
5	9,6248	9,7966	9,8927	9,9447	9,9721
6	9,2139	9,5418	9,7411	9,8577	9,9237
7	8,5681	9,1050	9,4597	9,6838	9,8200
8	7,6801	8,4497	9,0024	9,3794	9,6255
9	6,5949	7,5761	8,3419	8,9060	9,3015
10	5,4011	6,5277	7,4832	8,2432	8,8154
11	4,2073	5,3840	6,4684	7,3996	8,1525
12	3,1130	4,2403	5,3690	6,4154	7,3239
13	2,1871	3,1846	4,2693	5,3555	6,3678
14	1,4596	2,2798	3,2487	4,2956	5,3435
15	$9,2604^{-2}$	1,5558	2,3639	3,3064	4,3191
16	5,5924	1,0129	1,6451	2,4408	3,3588
17	3,2191	$6,2966^{-2}$	1,0954	1,7280	2,5114
18	1,7687	3,7416	$6,9833^{-2}$	1,1736	1,8053
19	$9,2895^{-3}$	2,1280	4,2669	$7,6505^{-2}$	1,2478
20	4,6711	1,1598	2,5012	4,7908	$8,2972^{-2}$
21	2,2519	$6,0651^{-3}$	1,4081	2,8844	5,3106
22	1,0423	3,0474	$7,6225^{-3}$	1,6712	3,2744
23	$4,6386^{-4}$	1,4729	3,9718	$9,3276^{-3}$	1,9465
24	1,9871	$6,8563^{-4}$	1,9943	5,0199	1,1165
25	$8,2050^{-5}$	3,0776	$9,6603^{-4}$	2,6076	$6,1849^{-3}$
26	3,2693	1,3335	4,5190	1,3087	3,3119
27	1,2584	$5,5836^{-5}$	2,0435	$6,3513^{-4}$	1,7158
28	$4,6847^{-6}$	2,2616	$8,9416^{-5}$	2,9837	$8,6072^{-4}$
29	1,6882	$8,8701^{-6}$	3,7894	1,3580	4,1843
30		3,3716	1,5568	$5,9928^{-5}$	1,9731
31		1,2432	$6,2052^{-6}$	2,5665	$9,0312^{-5}$
32			2,4017	1,0675	4,0155
33				$4,3154^{-6}$	1,7356
34				1,6963	$7,2978^{-6}$
35					2,9871
36					1,1910

m	$a=16$	$a=17$	$a=18$	$a=19$	$a=20$
0					
1					
2	$9,9998^{-1}$	$9,9999^{-1}$			
3	9,9991	9,9996	$9,9998^{-1}$	$9,9999^{-1}$	
4	9,9960	9,9982	9,9992	9,9996	$9,9998^{-1}$
5	9,9862	9,9933	9,9968	9,9985	9,9993
6	9,9599	9,9794	9,9896	9,9948	9,9974
7	9,9000	9,9457	9,9711	9,9849	9,9922
8	9,7801	9,8740	9,9294	9,9613	9,9791
9	9,5670	9,7388	9,8462	9,9114	9,9500
10	9,2260	9,5088	9,6963	9,8168	9,8919
11	8,7301	9,1533	9,4511	9,6533	9,7861
12	8,0688	8,6498	9,0833	9,3944	9,6099
13	7,2545	7,9913	8,5740	9,0160	9,3387
14	6,3247	7,1917	7,9192	8,5025	8,9514
15	5,3326	6,2855	7,1335	7,8521	8,4349
16	4,3404	5,3226	6,2495	7,0797	7,7893
17	3,4066	4,3598	5,3135	6,2164	7,0297
18	2,5765	3,4504	4,3776	5,3052	6,1858
19	1,8775	2,6368	3,4908	4,3939	5,2974
20	1,3183	1,9452	2,6928	3,5283	4,4091
21	$8,9227^{-2}$	1,3853	2,0088	2,7450	3,5630
22	5,8241	$9,5272^{-2}$	1,4491	2,0687	2,7939
23	3,6686	6,3296	1,0111	1,5098	2,1251
24	2,2315	4,0646	$6,8260^{-2}$	1,0675	1,5677
25	1,3119	2,5245	4,4608	$7,3126^{-2}$	1,1218
26	$7,4589^{-3}$	1,5174	2,8234	4,8557	$7,7887^{-2}$
27	4,1051	$8,8335^{-3}$	1,7318	3,1268	5,2481
28	2,1886	4,9838	1,0300	1,9536	3,4334

m	$a=16$	$a=17$	$a=18$	$a=19$	$a=20$
29	1,1312	2,7272	$5,9443^{-3}$	1,1850	2,1818
30	$5,6726^{-4}$	1,4484	3,3308	$6,9819^{-3}$	1,3475
31	2,7620	$7,4708^{-4}$	1,8133	3,9982	$8,0918^{-3}$
32	1,3067	3,7453	$9,5975^{-4}$	2,2267	4,7274
33	$6,0108^{-5}$	1,8260	4,9416	1,2067	2,6884
34	2,6903	$8,6644^{-5}$	2,4767	$6,3674^{-4}$	1,4890
35	1,1724	4,0035	1,2090	3,2732	$8,0366^{-4}$
36	$4,9772^{-6}$	1,8025	$5,7519^{-5}$	1,6401	4,2290
37	2,0599	$7,9123^{-6}$	2,6684	$8,0154^{-5}$	2,1708
38		3,3882	1,2078	3,8224	1,0875
39		1,4162	$5,3365^{-6}$	1,7797	$5,3202^{-5}$
40			2,3030	$8,0940^{-6}$	2,5426
41				3,5975	1,1877
42				1,5634	$5,4252^{-6}$
43					2,4243
44					1,0603

Приложение 3

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ e^{-x}

x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ
0,00	1,000	10	0,40	0,670	7	0,80	0,449	4	3,00	0,050	5
0,01	0,990	10	0,41	0,664	7	0,81	0,445	5	3,10	0,045	4
02	980	10	42	657	7	82	440	4	3,20	41	4
03	970	9	43	650	6	83	436	4	3,30	37	4
04	961	10	44	644	6	84	432	5	3,40	33	3
05	951	9	45	638	7	85	427	4	3,50	30	3
06	942	10	46	631	6	86	423	4	3,60	27	2
07	932	9	47	625	6	87	419	4	3,70	25	3
08	923	9	48	619	6	88	415	4	3,80	22	2
09	914	9	49	613	7	89	411	4	3,90	20	2
0,10	0,905	9	0,50	0,606	6	0,90	0,407	4	4,00	0,0183	17
11	896	9	51	600	5	91	403	4	4,10	166	16
12	887	9	52	595	6	92	399	4	4,20	150	14
13	878	9	53	589	6	93	395	4	4,30	136	13
14	869	8	54	583	6	94	391	4	4,40	123	12
15	861	9	55	577	6	95	387	4	4,50	111	10
16	852	8	56	571	6	96	383	4	4,60	101	10
17	844	9	57	565	5	97	379	4	4,70	0,0091	9
18	835	8	58	560	6	98	375	3	4,80	82	8
19	827	8	59	554	5	99	372	4	4,90	74	7
0,20	0,819	8	0,60	0,549	6	1,00	0,368	35	5,00	0,0067	6
21	811	8	61	543	5	1,10	333	31	5,10	61	6
22	803	8	62	538	5	1,20	302	29	5,20	55	5
23	795	8	63	533	6	1,30	273	26	5,30	50	5
24	787	8	64	527	5	1,40	247	24	5,40	45	4
25	779	8	65	522	5	1,50	223	21	5,50	41	4
26	771	8	66	517	5	1,60	202	19	5,60	37	4
27	763	7	67	512	5	1,70	183	18	5,70	33	3
28	756	8	68	507	5	1,80	165	15	5,80	30	3
29	748	7	69	502	5	1,90	150	15	5,90	27	2
0,30	0,741	8	0,70	0,497	5	2,00	0,135	13	6,00	0,0025	3
31	733	7	71	492	5	2,10	122	11	6,10	22	2
32	726	7	72	487	5	2,20	111	11	6,20	20	2
33	719	7	73	482	5	2,30	100	9	6,30	18	1
34	712	7	74	477	5	2,40	0,091	9	6,40	17	2
35	705	7	75	472	4	2,50	82	8	6,50	15	1
36	698	7	76	468	5	2,60	74	7	6,60	14	2
37	691	7	77	463	5	2,70	67	6	6,70	12	1
38	684	7	78	458	4	2,80	61	6	6,80	11	1
39	677	7	79	454	5	2,90	55	5	6,90	10	1
0,40	0,670		0,80	0,449		3,00	0,050		7,00	0,0009	

Приложение 4

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	49999997								

Приложение 6

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

При решении задач, связанных со случайными функциями, часто бывает удобно выполнять преобразования с помощью различных скачкообразных функций, а также обобщенных функций типа дельта-функции.

Приводим определения и основные свойства таких функций от действительного аргумента τ.

1. $|\tau|$ — модуль (абсолютная величина):

$$|\tau| = \begin{cases} \tau & \text{при } \tau \geqslant 0; \\ -\tau & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

2. $1(\tau)$ — единичная функция (единичный скачок):

$$1(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau > 0; \\ \frac{1}{2} & \text{при } \tau = 0; \\ 0 & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

3. $\operatorname{sign}\tau$ — знак величины τ (сигнум):

$$\operatorname{sign}\tau = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau > 0; \\ 0 & \text{при } \tau = 0; \\ -1 & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

4. $\delta(\tau)$ — дельта-функция:

$$\delta(\tau) = \frac{d}{d\tau}\,1(\tau).$$

Дельта-функция — четная функция τ. Основные свойства дельта-функции:

а) $\tau\delta(\tau) \equiv 0$ и вообще $\varphi(\tau)\delta(\tau) \equiv 0$, если $\varphi(\tau)$ — нечетная функция, непрерывная при $\tau = 0$;

б) $\int\limits_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \psi(\tau)\delta(\tau)d\tau = \psi(0)$, если функция $\psi(t)$ непрерывна в точке $\tau = 0\,(\varepsilon > 0)$;

$$\int\limits_{0-\varepsilon}^{0} \varphi(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \int\limits_{0}^{0+\varepsilon} \psi(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\,\psi(0),$$

если функция $\psi(\tau)$ непрерывна в точке $\tau = 0$.

Из этих определений вытекают следующие свойства, имеющие место для любых действительных τ и нечетной функции $\varphi(\tau)$:

$$1)\ |\tau| = \tau\operatorname{sign}\tau;\quad 2)\ \tau = |\tau|\operatorname{sign}\tau;$$

$$3)\ \varphi(\tau) = \varphi(|\tau|)\operatorname{sign}\tau;\quad 4)\ \varphi(|\tau|) = \varphi(\tau)\operatorname{sign}\tau;$$

$$5)\ \varphi^2(|\tau|) = \varphi^2(\tau);\quad 6)\ \operatorname{sign}\tau = 2\cdot 1(\tau) - 1;$$

$$7)\ 1(\tau) = \frac{\operatorname{sign}\tau + 1}{2};\quad 8)\ |\tau| = \tau[2\cdot 1(\tau) - 1];$$

$$9)\ \frac{d|\tau|}{d\tau} = \operatorname{sign}\tau;\quad 10)\ \frac{d^2|\tau|}{d\tau^2} = \frac{d\operatorname{sign}\tau}{d\tau} = 2\delta(\tau);$$

$$11)\ 1(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\tau} d(\operatorname{sign}\tau).$$

ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ $k_x(\tau)$ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ $S_x^*(\omega)$

	$k_x(\tau)$	$S_x^*(\omega)$
1.	$D\delta(\tau)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция	$D/(2\pi)$
2.	D	$D\delta(\omega)$
3.	$D\cos\beta\tau$	$(D/2)\,[\delta(\omega+\beta)+\delta(\omega-\beta)]$
4.	$\sum\limits_{i=1}^{n} D_i\cos\beta_i\tau$	$\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} D_i\,[\delta(\omega+\beta_i)+\delta(\omega-\beta_i)]$
5.	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$	$(D\alpha/\pi)\,(\alpha^2+\omega^2)^{-1}$
6.	$\sum\limits_{i=1}^{n} D_i e^{-\alpha_i\lvert\tau\rvert}$	$\frac{1}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{D_i\alpha_i}{\alpha_i^2+\omega^2}$
7.	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\cos\beta\tau$	$\frac{D\alpha}{\pi}\,\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{[\alpha^2+(\beta-\omega)^2]\,[\alpha^2+(\beta+\omega)^2]}$
8.	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\lvert\tau\rvert\right)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\,\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$
9.	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(\cos\beta\tau-\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\lvert\tau\rvert\right)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\,\frac{2\omega^2}{(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2}$
10.	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(\operatorname{ch}\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta\lvert\tau\rvert\right)(\alpha\geqslant\beta)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\,\frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{[(\alpha-\beta)^2+\omega^2]\,[(\alpha+\beta)^2+\omega^2]}$
11.	$D(1-\lvert\tau\rvert)\,1(1-\lvert\tau\rvert)$, где $1(x)$ — единичная функция	$\frac{D}{2\pi}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2$
12.	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}(1+\alpha\lvert\tau\rvert)$	$(D\alpha/\pi)\,[2\alpha^3/(\omega^2+\alpha^2)^2]$
13.	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(1+\alpha\lvert\tau\rvert+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\,\frac{\alpha^4}{3(\omega^2+\alpha^2)^3}$
14.	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}\left(1+\alpha\lvert\tau\rvert-2\alpha^2\tau^2+\frac{1}{3}\alpha^3\lvert\tau\rvert^3\right)$	$\frac{D\alpha}{\pi}\,\frac{16\alpha^3\omega^4}{(\omega^2+\alpha^2)^4}$
15.	$2\alpha\sin\beta\tau/\tau$	$\alpha 1(1-\lvert\omega\rvert/\beta)$
16.	$2\alpha^2(2\cos\beta\tau-1)\frac{\sin\beta\tau}{\tau}$	$\begin{cases}0 & \text{при } 0\leqslant\lvert\omega\rvert\leqslant\beta,\\ \alpha^2 & \text{при } \beta<\lvert\omega\rvert\leqslant2\beta,\\ 0 & \text{при } 2\beta<\lvert\omega\rvert\end{cases}$
17.	$De^{-(\alpha\tau)^2}$	$\frac{D}{2\alpha\sqrt{\pi}}\exp\left[-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2\right]$
18.	$De^{-\alpha\lvert\tau\rvert}[2\delta(\tau)-\alpha(\operatorname{sign}\tau)^2]$	$(D\alpha/\pi)[\omega^2/(\alpha^2+\omega^2)]$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1964. — 564 с.
2. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973. — 366 с.
3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высшая школа, 1979. — 477 с.
4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Физматгиз, 1961—406 с.
5. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1966. — 431 с.
6. Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1973. — 368 с.
7. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание, теория и применение. — М.: Мир, 1965. — 302 с.
8. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей — Изд. МГУ, 1963. — 131 с.
9. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. — М.: Машиностроение, 1969. — 324 с.
10. Пугачев В. С. Теория случайных функций. — М.: Физматгиз, 1962. — 659 с.
11. Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1968. — 368 с.
12. Пугачев В. С. Теория вероятности и математическая статистика. — М.: Наука, 1979. — 495 с.
13. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А. А. Свешникова. — М.: Наука, 1965. — 656 с.
14. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Теория вероятностей и математическая статистика в механике. — М.: Физматгиз, 1965. — 554 с.
15. Тараканов К. В., Овчаров Л. А., Тырышкин А. Н. Аналитические методы исследования систем. — М.: Сов. радио, 1975. — 240 с.
16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применение в 2-х т. — М.: Мир, 1964. — Т. 1 — 500 с., 1967. — Т. 2 — 752 с.
17. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. — М: Физматгиз, 1963. — 127 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЕЛЕНА СЕРГЕЕВНА ВЕНТЦЕЛЬ
ЛЕВ АЛЕКСАНДРОВИЧ ОВЧАРОВ

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор *Н. Г. Давыдова*
Обложка художника *П. П. Рогачева*
Художественный редактор *Л. Н. Сильянов*
Технический редактор *Т. Н. Зыкина*
Корректор *Н. Л. Жукова*

ИБ № 157

Сдано в набор 21.06.82 г. Подписано в печать 22.11.82 г. Т-20367 Формат 60×90[1]/16.
Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. п. л. 26,0. Усл. кр.-отт. 26,0
Уч.-изд. л. 27,23. Тираж 30 000 экз. Изд. № 19639 Заказ № 1040 Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Радио и связь», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129041, Москва, Б. Переяславская, 46



